Fisica Matematica I

Secondo Esonero, Mercoledì 24-05-23

Cognome......................... Nome.........................

Avete 2:00 ore di tempo. Ogni domanda vale 6 punti. Solo le **risposte chiaramente giustificate** saranno prese in considerazione. Le parti degli elaborati scritte in maniera **disordinata** o **incomprensibile** saranno **ignorate**.

- Si consideri disco omegeneo, di raggio R e densità 1, in un piano orizzontale con un un punto materiale P di massa m fissato alla distanza $R/2$ dal centro. Il centro del disco è fissato al punto $(0,0)$ mentre il punto P è collegato ad un punto B, di massa $2m$ con una molla di lunghezza a riposo nulla e constante elastica K. Il punto B è vincolato a muoversi su una retta passante per l'origine.

  1. Si scriva la Lagrangina
  2. Si scrivano le equazioni di Eulero Lagrange
  3. Si trovino i punti di equilibrio e se ne studi la stabilità
  4. Si esibiscano delle condizioni iniziali per cui il moto è periodico.

Soluzione

Il disco può solamente ruotare attorno al punto $(0,0)$. Il momento di inerzia è dato da

$$I = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R dr\, r^3 = \frac{\pi}{2} R^4.$$

Come coordinate si possono usare l'angolo θ tra la retta congiungente P e l'origine e la posizione x del punto B sulla retta. La Lagrangiana si scrive quindi come

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \frac{1}{2}\dot\theta^2 I + \frac{1}{8} m R^2 \dot\theta^2 + m\dot x^2 - \frac{K}{2}\left\| \frac{R}{2}(\cos\theta, \sin\theta) - (x, 0)\right\|^2 \\
&= \frac{1}{2} A\dot\theta^2 + m\dot x^2 - \frac{K}{4}R^2 + \frac{K}{2} R x\cos\theta - \frac{K}{2}x^2
\end{aligned}$$

dove $A = \frac{\pi}{2}R^4 + \frac{m}{8}R^2$.

Le equazioni di Eulero Lagrange sono

$$\begin{aligned}
A\ddot\theta + \frac{KR}{2} x \sin\theta = 0 \\
2m\ddot x - \frac{KR}{2}\cos\theta + Kx = 0.
\end{aligned}$$

I punti di equilibrio sono $(\theta, x) \in \{(\frac{\pi}{2}, 0), (\frac{3\pi}{2}, 0), (0, \frac{R}{2}), (\pi, -\frac{R}{2})\}$. Per la stabilità basta studiare la derivata seconda del potenziale nei punti di equilibrio.

Finalmente, se $\theta(0) = 0$ allora $\theta(t) = 0$ e $2m\ddot x = -K\left(x - \frac{R}{2}\right)$, che è lequazione di un oscillatore armonico con centro $R/2$ e quinidi ha un moto periodico.