Appendix A

Il gruppo ortogonale

Sia $M(n,\mathbb{R})$ lo spazio vettoriale delle matrici n per n a coefficienti reali, e $GL(n,\mathbb{R}) = \{A \in M(n,\mathbb{R}) \; : \; \det(A) \neq 0\}$ il gruppo (rispetto alla moltiplicazione) delle matrici n per n. Una matrice invertibile definisce un cambio di base: sia $A \in GL(n,\mathbb{R})$, e $w_i = Ae_i$ allora se $v = \sum_{i=1}^n a_i w_i$ si ha $v_l = \sum_{i=1}^n a_i A_{li}$, cioè $v = \sum_{l=1}^n \sum_{i=1}^n A_{li} a_i e_l$.

Esercizio A.0.1. *Si mostri che $GL(n,\mathbb{R})$ è uno spazio vettoriale normato e un'algebra (non commutativa).*[1]

In particolare, abbiamo una distanza definita in $GL(n,\mathbb{R})$ che definisce una topologia. Da ora in poi la assumeremo data.

Esercizio A.0.2. *Si mostri che il determinante è una funzione continua da $GL(n,\mathbb{R})$ in $\mathbb{R}$.*

Se chiediamo che la nuova base, associata al cambio di variabile, sia ortonormale abbiamo $\delta_{ij} = \langle w_i, w_j\rangle = \langle e_i, A^T A e_j\rangle$ ovvero $A^T A = \mathbb{1}$. In altre parole $A^T = A^{-1}$ e quindi anche $AA^T = \mathbb{1}$. Si noti inoltre che se $A^T A = \mathbb{1}$ allora $\det(A)^2 = 1$ e quindi $\det(A) = \pm 1$.

Esercizio A.0.3. *Si mostri che $O(n,\mathbb{R}) = \{A \in GL(n,\mathbb{R}) \; : \; A^T A = \mathbb{1}\}$ forma un gruppo (il gruppo ortogonale) e lo stesso accade per $SO(n,\mathbb{R}) = \{A \in O(n,\mathbb{R}) \; : \; \det(A) = 1\}$ (il gruppo ortogonale speciale).*

Esercizio A.0.4. *Si mostri che date due basi ortonormali di $\mathbb{R}^n$ $\{v_i\}$ e $\{w_i\}$ esiste una sola matrice $A \in O(n,\mathbb{R})$ tale che $w_i = Av_i$.*

Se $\Gamma : [0,1] \to O(n,\mathbb{R})$ è una curva continua allora $\det(\Gamma(t))$ è una funzione continua e quindi non può passare da $+1$ a-1. Se ne evince che $O(n,\mathbb{R})$ è disconnesso.[2]

Ma come è fatto $SO(n,\mathbb{R})$? Se identifichiamo $GL(n,\mathbb{R})$ con $\mathbb{R}^{n^2}$ allora $SO(n,\mathbb{R})$ è un sottoinsieme di $\mathbb{R}^{n^2}$.

[1] Infatti si possono definire varie norme, la mia preferita è $\|A\| = \sup_{\|v\|=1} \|Av\|$. Si verifichi che, con questa norma, $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$, ovvero abbiamo un'algebra normata.

[2] Infatti, come vedremo, consiste di due componenti connesse, una essendo $SO(n,\mathbb{R})$.

Esercizio A.0.5. *Si mostri che la topologia indotta da* $\mathbb{R}^{n^2}$ *è la stessa indotta dalla norma di cui sopra.*

D'altra parte $\mathbb{R}^{n^2}$ ha una struttura differenziabile, possiamo quindi parlare di curve differenziabili nello spazio delle matrici. È possibile che una curva differenziabile appartenga interamente a $SO(n,\mathbb{R})$? Vediamo: supponiamo $\Gamma : (0,1) \to SO(n,\mathbb{R})$ differenziabile, dunque $\Gamma(t)^T\Gamma(t) = \mathbb{1}$ per ogni $t \in (0,1)$. Differenziando si ha

$$\Gamma'(t)^T\Gamma(t) + \Gamma(t)^T\Gamma'(t) = 0. \tag{A.0.1}$$

Ponendo $\Gamma(t)^{-1}\Gamma'(t) = B(t)$ si ha $B(t)^T = -B(t)$, ovvero B deve essere una matrice antisimmetrica. Sia $\mathfrak{so}(n,\mathbb{R}) = \{A \in M(n,\mathbb{R}) \; : \; A^T = -A\}$, si noti che è uno spazio vettoriale di dimensione $\frac{n(n-1)}{2}$.

Allora, data qualunque curva continua $B : (0,1) \to \mathfrak{so}(n,\mathbb{R})$ e $A \in SO(n,\mathbb{R})$ l'equazione

$$\begin{aligned} \Gamma'(t) &= \Gamma(t)B(t) \\ \Gamma(0) &= A \end{aligned} \tag{A.0.2}$$

ha una unica soluzione che appartiene a $SO(n,\mathbb{R})$. Infatti, detto $U(t) = \Gamma^T(t)\Gamma(t)$, si ha

$$\begin{aligned} U'(t) &= -B(t)U(t) + U(t)B(t) \\ U(0) &= \mathbb{1} \end{aligned}$$

che ha $U(t) = \mathbb{1}$ come unica soluzione.

Questo suggerisce l'idea che $O(n,\mathbb{R})$ sia un manifold $\frac{n(n-1)}{2}$ dimensionale. Vediamo di dimostrarlo.

Lemma A.0.6. $O(n,\mathbb{R})$ *è compatto.*

Proof. Sia $A \in O(n,\mathbb{R})$, allora, per ogni $v \in \mathbb{R}^n$ si ha

$$\|v\|^2 = \langle v, A^TAv\rangle = \langle Av, Av\rangle$$

ovvero

$$\|A\| = \sup_{\|v\|=1} \|Av\| = 1.$$

Dunque $O(n,\mathbb{R})$ è limitato, per concludere basta dimostrare che è chiuso. Supponiamo che $\{A_n\} \subset O(n,\mathbb{R})$ e $\lim_{n\to\infty} A_n = A$, allora

$$A^TA = \lim_{n\to\infty} A_n^TA_n = \mathbb{1},$$

dunque $A \in O(n,\mathbb{R})$. □

Dato $\bar{A} \in O(n,\mathbb{R})$ consideriamo l'equazione

$$F(A) := A^TA - \mathbb{1} = 0 \tag{A.0.3}$$

in un intorno di $\bar{A}$. Si noti che possiamo scrivere $A = \bar{A}e^B$, infatti $\bar{A}$ è invertibile e il problema si riduce a risolvere l'equazione $e^B = \bar{A}^{-1}A$ dove $\bar{A}^{-1}A$ è vicino alla matrice identità $\mathbb{1}$.

Lemma A.0.7. *Sia $D \in M(n,\mathbb{R})$, $\|D\| < 1/4$, allora l'equazione $e^B = \mathbb{1} + D$ ha una e una sola soluzione in $\mathcal{B} = \{B \in M(n,\mathbb{R}) \;:\; \|B\| \leq \frac{1}{2}\}$. Inoltre se $[D, D^T] = 0$ allora $[B^T, B] = 0$.*

Proof. Si definisca la funzione $\Phi(B) = \mathbb{1}+B+D-e^B$. Il problema è equivalente a risolvere $\Phi(B) = B$. Ora se $\|B\| \leq 1/2$ si ha

$$\|\Phi(B)\| \leq \frac{1}{4} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\|B\|^k}{k!} = e^{\|B\|} - \|B\| - \frac{3}{4} \leq e^{\frac{1}{2}} - \frac{5}{4} \leq \frac{1}{2}.$$

Dunque si ha $\Phi(\mathcal{B}) \subset \mathcal{B}$. Inoltre, per ogni $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ si ha

$$\begin{aligned}\|\Phi(B_1) - \Phi(B_2)\| &\leq \left\|\sum_{k=2}^{\infty} \frac{B_1^k - B_2^k}{k!}\right\| \leq \left\|\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\sum_{j=0}^{k-1} B_1^{k-j-1}(B_1 - B_2)B_2^j}{k!}\right\| \\ &\leq \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k2^{-k+1}}{k!}\|B_1 - B_2\| \leq (e^{\frac{1}{2}} - 1)\|B_1 - B_2\| \leq 0.7\|B_1 - B_2\|.\end{aligned}$$

Quindi Φ è una contrazione. Dunque $B_n = \Phi^n(0)$ è una successione di Chauchy e il limite soddisfa

$$B = \lim_{n\to\infty} B_n = \lim_{n\to\infty} \Phi(B_{n-1}) = \Phi(B).$$

D'altra canto se abbiamo due soluzioni $\{X_i\}_{i=1}^2 \subset \mathcal{B}$, ovvero $\Phi(X_i) = X_i$, allora

$$\|X_1 - X_2\| = \|\Phi(X_2) - \Phi(X_i)\| \leq 0.7\|X_1 - X_2\|,$$

quindi $X_1 = X_2$, dunque la soluzione è unica.

Assumiamo che $[D, D^T] = 0$, e dimostriamo per induzione che $[B^T, B] = 0$. Supponiamo che $[D, B_n] = [D^T, B_n] = [B_n, B_n^T] = 0$ allora[3]

$$\begin{aligned}[D, B_{n+1}] &= [D, \Phi(B_n)] = [D, \mathbb{1} + B_n + D - e^{B_n}] = -[D, e^{B_n}] = 0 \\ [B_{n+1}^T, B_{n+1}] &= [\mathbb{1} + B_n^T + D^T - e^{B_n^T}, \mathbb{1} + B_n + D - e^{B_n}] = 0\end{aligned}$$

le altre relazioni si dimostrano analogamente. Poichè $B_0 = 0$, che commuta con tutto, il Lemma segue per induzione. $\square$

Possiamo ora applicare il Lemma A.0.7 all'equazione (A.0.3). Per ogni $A \in O(n,\mathbb{R})$ tale che $\|A - \bar{A}\| \leq \frac{1}{4\|\bar{A}^{-1}\|}$ possiamo definire $D = \bar{A}^{-1}A - \mathbb{1}$. Poichè

$$\|D\| = \|\bar{A}^{-1}(A - \bar{A})\| \leq \frac{1}{4}$$

possiamo scrivere $A = \bar{A}e^B$. Per di più, poichè $\bar{A}, A \in O(n,\mathbb{R})$ si ha $\bar{A}^{-1} = \bar{A}^T$ e $A^{-1} = A^T$, dunque

$$[D^T, D] = [A^{-1}\bar{A}, \bar{A}^{-1}A] = A^{-1}\bar{A}\bar{A}^{-1}A - \bar{A}^{-1}AA^{-1}\bar{A} = 0.$$

[3] Si noti che se $[A, C] = 0$ allora $[A^2, C] = A^2C - CA^2 = A[A, C] + [A, C]A = 0$. Quindi $[A^n, C] = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Quindi $[e^A, C] = 0$.

Dunque Lemma A.0.7 implica che $[B^T, B] = 0$, da cui segue[4]

$$\mathbb{1} = e^{B^T} \bar{A}^T \bar{A} e^B = e^{B^T} e^B = e^{B^T+B}.$$

Dall'unicià del Lemma A.0.7 segue $B^T = -B$, ovvero $B \in \mathfrak{so}(n, \mathbb{R})$. D'altro canto $\mathfrak{so}(n, \mathbb{R})$ è naturalmente identificato con $\mathbb{R}^{\frac{n(n-1)}{2}}$, il numero di entrate indipendenti in una matrice antisimmentrica n per n. Questo significa per ogni $A \in O(n, \mathbb{R})$ esiste un intorno U_A e una mappa $\phi_A : U_A \to \mathfrak{so}(n, \mathbb{R})$ definita da $\phi_A^{-1}(B) = Ae^B$ tale che (U_A, ϕ_A) è una carta.

Esercizio A.0.8. *Si mostri che se (U_{A_1}, ϕ_{A_1}) e (U_{A_2}, ϕ_{A_2}) sono due carte tali che $U_{A_1} \cap U_{A_2} \neq \emptyset$, allora, dove è definito, $\phi_{A_1} \circ \phi_{A_2}^{-1} \in \mathcal{C}^\infty$.*

Questo significa che $\{(U_A, \phi_A)\}_{A \in O(n,\mathbb{R})}$ forma un atlante. Sfortunatamente non è finito. Tuttavia $\{U_A\}_{A \in O(n,\mathbb{R})}$ è un ricoprimento aperto di $O(n, \mathbb{R})$. Ma essendo $O(n, \mathbb{R})$ compatto si può estrarre un sottoricoprimento finito $\{U_{A_i}\}_{i=1}^N$. Ne segue che $\{(U_A, \phi_A)\}_{i=1}^N$ è un atlante e quindi $O(n, \mathbb{R})$ è un manifold $\frac{n(n-1)}{2}$ dimensionale.

Ora capiamo la struttura locale di $O(n, \mathbb{R})$, cosa possiamo dire di quella globale? Siccome $\det : O(n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ è una funzione continua che ha valori solo ± 1, ne segue che deve avere almeno due componenti disconnesse. D'altro canto, detta R la matrice diagonale tale che $Re_1 = -e_1$ e $Re_i = e_i$ per ogni $i > 1$, possiamo definire $G : O(n, \mathbb{R}) \to O(n, \mathbb{R})$ come $G(B) = BR$. Chiaramente $\det(G(B)) = -\det(B)$ inoltre è facile verificare che G è biettiva. Ne segue che $O(n, \mathbb{R}) = SO(n, \mathbb{R}) \cup G(SO(n, \mathbb{R}))$.

Lemma A.0.9. *$SO(n, \mathbb{R})$ è connesso.*

Proof. Prima di tutto occorre capire meglio la struttura degli elementi di $SO(n, \mathbb{R})$, ovvero il loro spettro. A questo scopo, come è conveniente fare nella teoria spettrale, consideriamo l'azione degli elementi di $SO(n, \mathbb{R})$ su $\mathbb{C}^n$ invece che $\mathbb{R}^n$. Sia $A \in SO(n, \mathbb{R})$, $\lambda \in \mathbb{C}$ un suo autovalore e v un autovettore corrispondente di norma uno, allora[5]

$$|\lambda|^2 = \langle Av, Av \rangle = \langle v, A^T Av \rangle = \langle v, v \rangle = 1.$$

Dunque deve essere $\lambda = e^{i\theta}$ per qualche $\theta \in \mathbb{R}$. Sia V l'autospazio associato a $e^{i\theta}$ e v un autovettore, allora se $w \perp v$ si ha

$$\langle Aw, v \rangle = e^{-i\theta} \langle Aw, Av \rangle = e^{-i\theta} \langle w, v \rangle = 0.$$

Perciò $V_1 = \{w \in V \; : \; \langle w, v \rangle = 0\}$ è uno spazio invariante per A, quindi deve contenere un autovettore. Ne segue che la molteciplicità algebrica e geometrica devono coincidere e gli autovettori sono ortogonali tra di loro. Se l'autovalore è complesso allora esiste un autospazio bidimensionale invariante e possiamo costruire una matrice antisimmetrica che agisce non trivialmente solo su tale

[4] Si ricordi che se A e B commutano, allora $e^A e^B = e^{A+B}$.

[5] Si ricordi che il prodotto scalare in $\mathbb{C}^n$ è definito come $\langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^n \overline{v}_i w_i$.

spazio. Ne segue che esiste $b \in \mathfrak{so}(n,\mathbb{R})$ tale che Ae^b è l'identià su tale spazio ed agisce come A nel perpendicolare. Si noti che A e Ae^b sono connessi dalla curva Ae^{tb}, $t \in [0,1]$. In questo modo è facile vedere che esiste una curva che connette A con una matrice C che ha autovalori 1 su tutti gli autospazi su cui A ha un autovalore complesso. Ne segue che C può avere solo un numero pari di autovalori -1. Dati due tali autovalori sia V lo spazio generato dagli autovettori. Si veda che esiste una matrice $c \in \mathfrak{so}(n,\mathbb{R})$ tale che Ce^c è l'identità quando ristretta a V. In conclusione abbiamo una curva che unisce A ad $\mathbb{1}$ e quindi $SO(n,\mathbb{R})$ è connesso. □

Esercizio A.0.10. *Si mostri che $\mathfrak{so}(n,\mathbb{R})$ è un'algebra dove il prodotto è dato dal commutatore $[A,B] = AB - BA$. Si chiama Algebra di Lie.*

Si noti che se $a \in \mathfrak{so}(n,\mathbb{R})$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ è un autovalore, con corrispondente autovettore v, allora

$$\lambda\|v\|^2 = \langle av, v\rangle = \langle v, a^T v\rangle = -\langle v, av\rangle = -\lambda\|v\|^2$$

dunque $\lambda = 0$. Mentre se $\lambda \in \mathbb{C}$ e $v \in \mathbb{C}^n$ è il corrispondente autovettore, allora $av = \lambda v$ implica $a\overline{v} = \overline{\lambda}\overline{v}$, dunque anche $\overline{\lambda}$ è un autovettore. D'altro canto

$$\overline{\lambda}\|v\|^2 = \langle av, v\rangle = \langle v, a^T v\rangle = -\langle v, av\rangle = -\lambda\|v\|^2$$

ovvero $\lambda = i\theta$ per qualche $\theta \in \mathbb{R}$. Inoltre, se V è uno spazio invariante per $a \in \mathfrak{so}(n,\mathbb{R})$ allora, se w è perpendicolare a V si ha, per ogni $v \in V$

$$0 = \langle w, av\rangle = -\langle aw, v\rangle$$

Ovvero anche $V^\perp$ è uno spazio invariante. Questo significa che esistono n autovettori e che sono ortogonali.

Bene questa è una bella teoria che ci poterebbe a parlare di algebre e gruppi di Lie ma veramente ci siamo lasciati distrarre: noi siamo interessati a $n = 3$. !

A.1 L'algebra $\mathfrak{so}(3,\mathbb{R})$ e il gruppo $SO(3,\mathbb{R})$

Nel caso $n = 3$ la dimensione di $\mathfrak{so}(3,\mathbb{R})$ è 3. Questa è una curiosa coincidenza che permette di identificare $\mathfrak{so}(3,\mathbb{R})$ con $\mathbb{R}^3$ in una maniera che facilita molti conti. Vediamo come. Se $a \in \mathfrak{so}(3,\mathbb{R})$ non ha autovalori complessi, allora tutti gli autovalori sono nulli e quindi $a = 0$. Dunque devono esistere autovalori complessi, che però vengono in coppie. Ne segue che gli autovalori di $a \in \mathfrak{so}(3,\mathbb{R})$, $a \neq 0$ devono essere $\{0, i\theta, -i\theta\}$. Per ogni $\omega \in \mathbb{R}^3$, scriviamo

$$a(\omega) = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix} \tag{A.1.1}$$

Allora $a(\omega)\omega = 0$.

Esercizio A.1.1. *Si verifichi che* $\omega \to a(\omega)$ *è un isomorfismo tra* $\mathbb{R}^3$ *e* $\mathfrak{so}(3, \mathbb{R})$.

Esercizio A.1.2. *Si verifichi che* $e^{a(\omega)}$ *corrisponde ad una rotazione di un angolo* $\|\omega\|$ *attorno all'asse* ω.

I fisici amano quello che chiamano il *prodotto vettoriale* che è definito come[6]

$$v \wedge w = (v_2w_3 - v_3w_2, w_1v_3 - v_1w_3, v_1w_2 - v_2w_1) \tag{A.1.2}$$

la cui definizione si può ricordare con la formula mnemonica

$$v \wedge w = \det \begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_2 \end{pmatrix}$$

Esercizio A.1.3. *Si verifichi che, per ogni* $v \in \mathbb{R}^3$, $a(\omega)v = \omega \wedge v = -a(v)\omega$.

Esercizio A.1.4. *Si verifichi che* $[a(\omega_1), a(\omega_1)] = a(\omega_1 \wedge \omega_2)$.

Esercizio A.1.5. *Si verifichi che* $a(v)w$ *è perpendicolare a* v *e* w.

Ne segue che, dati $v, w \in \mathbb{R}^3$ se n è un vettore unitario perpendicolare a v, w, allora

$$\|a(v)w\| = |\langle n, a(v)w\rangle| = \left| \det \begin{pmatrix} n \\ v \\ w \end{pmatrix} \right|$$

Dunque $\|a(v)w\|$ è uguale al volume del parallelepipedo determinato da v, w, n, che è uguale all'area del parallelogramma determinato dai vettori v, w. Quindi, detto α l'angolo tra v e w si ha

$$\|a(v)w\| = \|v\|\|w\|| \sin \alpha|.$$

Ne segue che

$$\|a(v)\| = \|v\|.$$

La conclusione di questo argomento è che dato un elemento $a \in \mathfrak{so}(3, \mathbb{R})$ e un vettore v tale che $av = 0$ e $\|a\| = \|v\|$ allora $a \in \{a(\pm v)\}$.

Sia ora $U \in O(3, n)$ e si consideri il cambio di coordinate indotto a U. Allora

$$Ua(v)w = Ua(v)U^TUw$$

significa che nelle nuove coordinate l'azione di $a(v)$ è sostituita dall'azione di $Ua(v)U^T$. Ma $[Ua(v)U^T]Uv = Ua(v)v = 0$ mentre

$$\|Ua(v)U^T\| = \sup_{\|w\|=1} \|Ua(v)U^Tw\| = \sup_{\|U^Tw\|=1} \|a(v)U^Tw\| = \|a(v)\| = \|v\|.$$

[6]Nei libri di fisica il prodotto vettoriale di due vettori in $\mathbb{R}^3$ è spesso indicato con la notazione alternativa $v \times w$.

Dunque $Ua(v)U^T \in \{a(\pm Uv)\}$. Per decidere il segno supponiamo che v, w, n sia una base ortogonale tale che $\langle n, a(v)w\rangle > 0$. Allora se $Ua(v)U^T = a(\sigma Uv)$, con $\sigma \in \{-1, 1\}$,

$$\langle n, a(v)w\rangle = \langle Un, Ua(v)U^T Uw\rangle = \langle Un, a(\sigma Uv)Uw\rangle.$$

Questo significa che l'orientamento della base $\{v, w, n\}$ deve essere lo stesso di quello della base $\{Uv, Uw, \sigma Un\}$ ovvero $\sigma = \det U$.

Commento A.1.6. *Questo è quello che intendono i fisici quando dicono che il vettore v è* assiale*: non è affatto un vettore, è una matrice antisimmetrica e sotto riflessione non cambia segno. Infatti abbiamo appena visto che si trasforma come $Ua(v)U^T = a([\det U]Uv)$ che coincide col modo in cui si trasformano i vettori solo se $U \in SO(3,\mathbb{R})$.*

Risulta conveniente considerare la mappa $E : \mathbb{R} \times S^2 \to SO(3,\mathbb{R})$, $S^2 = \{\omega \in \mathbb{R}^3 \ ; \ \|\omega\| = 1\}$, definita da

$$E((\theta\hat{\omega})) = e^{a(\theta\hat{\omega})}.$$

Definiamo inoltre la relazione di equivalenza[7] $(\theta, \hat{\omega}) \sim (\theta', \hat{\omega}')$ se $\theta\hat{\omega} = (\theta' + 2k\pi)\hat{\omega}'$ per qualche $k \in \mathbb{Z}$ e definiamo $\Omega = \mathbb{R} \times S^2/\sim$. Il nostro scopo è mostrare che E si può quozientare su Ω.

Per cominciare capiamo un poco meglio come sono fatte le classi di equivalenza: $a \in \Omega$ e $x = (\theta, \hat{\omega}) \in a$ allora $\{(\theta + 2\pi k, \hat{\omega})\}_{k\in\mathbb{Z}} \subset a$. Se $\theta = 2\pi k$ allora $(0, \hat{\omega}) \in a$ e quindi $(0, \hat{\omega}') \in a$ per ogni $\hat{\omega}' \in S^2$ dunque $a = \{(2\pi k, \hat{\omega})\}_{k\in\mathbb{Z},\hat{\omega}\in S^2}$. Se invece $\theta \notin \{(2\pi k, \hat{\omega})\}_{k\in\mathbb{Z}}$ allora deve essere $a = \{(\sigma\theta + 2\pi k, \sigma\hat{\omega})\}_{k\in\mathbb{Z},\sigma^2=1}$

Lemma A.1.7. *La mappa E induce una mappa $\mathcal{E} : \Omega \to SO(3,\mathbb{R})$. Inoltre $\mathcal{E}$ è biunivoca.*

Proof. Sia $A \in SO(3,\mathbb{R})$. Sappiamo che esiste $\hat{\omega} \in \mathbb{R}^3$, $\|\hat{\omega}\| = 1$, tale che $A\hat{\omega} = \hat{\omega}$, inoltre avrà due autovalori $e^{i\theta}, e^{-i\theta}$. Allora sia $U \in SO(3,\mathbb{R})$ tale che $U\hat{\omega} = e_3$. Allora $UAU^T e_3 = UA\hat{\omega} = U\hat{\omega} = e_3$ e ha anche lei due autovalori $e^{i\theta}, e^{-i\theta}$. D'altro canto

$$e^{a(\theta e_3)} = \mathrm{Exp}\begin{pmatrix} 0 & -\theta & 0 \\ \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =: R(\theta) \tag{A.1.3}$$

Esercizio A.1.8. *Si verifichi che i soli elementi di $SO(3,\mathbb{R})$ che lasciano invariato e_3 e hanno autovalori $e^{i\theta}, e^{-i\theta}$, sono $R(\theta + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.*

Dunque $UAU^T \in \left\{e^{a(\theta e_3)}, e^{a((\theta+\pi)e_3)}\right\}$ e

$$A = U^T e^{a(\theta e_3)} U = e^{U^T a(\theta e_3) U} = e^{a(\theta U^T e_3)} = e^{a(\theta\hat{\omega})}$$

oppure $A = e^{a((\theta+\pi)\hat{\omega})}$. Dunque A appartiene all'immagine di E che quindi è suriettiva.

[7] Si verifichi che si tratta proprio di una relazione di equivalenza.

D'altro canto, abbiamo visto che $E(\theta\hat{\omega})$ ha autovalori $1, e^{\pm\theta}$, dunque se $E(\theta\hat{\omega}) = E(\theta'\hat{\omega}')$ allora deve essere $\{e^{\pm\theta}\} = \{e^{\pm\theta'}\}$. Se $\theta \in \{2\pi k\}_{k\in\mathbb{Z}} =: 2\pi\mathbb{Z}$, allora $\theta' \in 2\pi\mathbb{Z}$ e $E(\theta\hat{\omega}) = \mathbb{1} = E(\theta'\hat{\omega}')$ se e solo $(\theta', \hat{\omega}') \in [(0, \hat{\omega})]$.[8] Se $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$ allora, cambiando variabili come sopra, si ha che deve essere $E(\theta e_3) = E(\theta' U\hat{\omega}')$, dunque $U\hat{\omega}' = \sigma e_3$, $\sigma^2 = 1$. Ne segue che $E(\theta\hat{\omega}) = E(\theta'\hat{\omega}')$ se e solo se $\theta'\sigma e_3 = (\theta + 2k\pi)e_3$ per qualche $k \in \mathbb{Z}$, ovvero, ricambiando variabili, $(\theta, \hat{\omega}) \sim (\theta', \hat{\omega}')$. In conclusione, le classi di equivalenza coincidono con le preimagini di $E(A)$ per $A \in SO(3, \mathbb{R})$, e quindi E induce naturalmente la mappa $\mathcal{E}(a) = E(x)$ per $x \in a$ e tale mappa è biunivoca. □

Il lemma precedente ci dice che in un qualche senso Ω e $SO(3, \mathbb{R})$ sono uguali. Tuttavia una applicazione biunivoca può essere veramente orribile. Noi vorremmo una corrispondenza che preserva cose naturali come, ad esempio, la vicinanza. Ovvero vorremmo, come minimo, un omeomorfismo. Dobbiamo quindi discutere un attimo di topologia.

Lemma A.1.9. *Ω è uno spazio metrico completo.*[9]

Proof. Poichè $\mathbb{R} \times S^2 \subset \mathbb{R}^4$ è naturalmente uno spazio metrico completo con la metrica di $\mathbb{R}^4$, chiamiamola d. Per ogni $a, b \in \Omega$ definiamo

$$\tilde{d}(a, b) = \inf_{x\in a, y\in b} d(x, y).$$

Verifichiamo che $\tilde{d}$ è una metrica.[10]

Se $d(a, b) = 0$ allora esistono successioni $\{x_n\} \subset a$ e $\{y_n\} \subset b$ tali che

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 0.$$

Visto che, per ogni $k \in \mathbb{Z}$, $d(x + (2\pi k, 0), y + (2\pi k, 0)) = d(x, y)$, possiamo assumere che $x_n = (\theta_n, \hat{\omega}_n)$ con $\theta_n \in [-\pi, \pi]$. Ne segue che esistono $\theta, \hat{\omega}$ tali che $x_n \in \{(\theta, \hat{\omega}), (-\theta, -\hat{\omega})\}$ per n abbastanza grande. Possiamo quindi prendere una sottosuccesione in cui $x_{n_j} = x_*$, costante. Ne segue che, per j grande abbastanza, $y_n = x_*$ e quindi $x_* \in a \cap b$, che implica $a = b$.

La proprietà $\tilde{d}(a, b) = \tilde{d}(b, a)$ è ovvia. Rimane da verificare la disuguaglianza triangolare: se $(\theta, \hat{\omega}) \in a$

$$\begin{aligned}\inf_{(\theta',\hat{\omega}')\in b} d((\theta, \hat{\omega}), (\theta', \hat{\omega}')) &= \inf_{(\theta',\hat{\omega}')\in b} d((-\theta, -\hat{\omega}), (\theta', \hat{\omega}')) \\ &= \inf_{(\theta',\hat{\omega}')\in b} d((\theta + 2\pi k, \hat{\omega}), (\theta' + 2\pi k, \hat{\omega}')).\end{aligned}$$

[8] Uso $[x]$ per indicare la casse di equivalenza cui appartiene x.

[9] Uno spazio metrico è una coppia (X, d) dove X è un insieme e d una distanza. Ovviamente questo implica che si tratta di uno spazio topologico: gli aperti sono generati dagli insiemi $\{x \in X : d(x, \bar{x}) < \varepsilon\}$, $\bar{x} \in X$ e $\varepsilon > 0$. Ne segue che dati due spazi topologici (X, d_X) e (Y, d_Y) e una funzione $f : X \to Y$, f è continua se e solo se, per ogni x, $\lim_{z\to x} f(z) = f(x)$, ovvero $\lim_{d_X(z,x)\to 0} d_Y(f(z), f(x)) = 0$. Completo significa che ogni successione di Cauchy ha limite.

[10] Il fatto che sia una pseudometrica è completamente generale (sebbene con una definizione della distanza un poco più generale), il fatto che $d(a, b) = 0$ implichi $a = b$ dipende invece da qualche proprietà specifica della relazione di equivalenza.

Quindi

$$\tilde{d}(a,b) = \inf_{y\in b} d((\theta,\hat{\omega}),y)$$

per ogni $(\theta,\hat{\omega}) \in a$. Siano $a,b,c \in \Omega$ allora per ogni $x \in a$ e $y \in b$

$$\tilde{d}(a,c) = \inf_{z\in c} d(x,z) \le \inf_{z\in c} d(x,y) + d(y,z) = d(x,y) + \tilde{d}(b,c),$$

che da la disuguaglianza triangolare prendendo l'inf su x,y. □

Esercizio A.1.10. *Si mostri che Ω è compatto.*

Lemma A.1.11. *La mappa $\mathcal{E} : \Omega \to SO(3,\mathbb{R})$ è un omeomorfismo.*

Proof. Si noti che la mappa $\widetilde{E} : \mathbb{R}^3 \to SO(3,\mathbb{R})$ definita da $\widetilde{E}(v) = e^{a(v)}$ è continua (in fatti differenziabile). Anche la mappa $g : \Omega \to \mathbb{R}^3$ definita da $g(\theta,\hat{\omega}) = \theta\hat{\omega}$ è continua, quindi $E = \widetilde{E} \circ g$ è anche continua, ne segue che $\mathcal{E}$ è continua. D'altro canto $\mathcal{E}$ è una mappa tra spazi compatti quindi l'immagine di un chiuso è chiuso, se ne evince che anche l'inversa è continua. □

Lo spazio Ω non è particolarmente familiare, vale quindi la pena di notare che è isomorfo ad uno spazio topologico più familiare ai matematici.[11]

Lemma A.1.12. *Si mostri che $SO(3,\mathbb{R})$ è isomorfo allo spazio proiettivo P_3.*[12]

Proof. Definiamo la mappa $F : \mathbb{R} \times S^2 \to P_3$ come

$$F((\theta,\hat{\omega})) = [(\cos\theta/2, \hat{\omega}\sin\theta/2)]_p$$

dove $[z]_p$ è la classe di equivalenza di $z \in \mathbb{R}^4$. Si noti che

$$\begin{aligned} F((\theta+2\pi,\hat{\omega})) &= [(\cos(\theta/2+\pi), \hat{\omega}\sin(\theta/2+\pi))]_p \\ &= [-(\cos(\theta/2), \hat{\omega}\sin(\theta/2))]_p = F((\theta,\hat{\omega})), \end{aligned}$$

Ne segue che $F((\theta+2\pi k,\hat{\omega})) = F((\theta,\hat{\omega}))$ per ogni $k \in \mathbb{Z}$.

Se $F(\theta,\hat{\omega}) = [(1,0)]_p$ allora deve essere $\sin\theta/2 = 0$ ovvero $\theta \in 2\pi\mathbb{Z}$. D'altro canto se $\theta \in 2\pi k$ allora $F(\theta,\hat{\omega}) = (\cos k\pi, 0) = ((-1)^k, 0) \in [(1,0)]_p$, ovvero $F^{-1}([(1,0)]_p) = [(0,\hat{\omega})]$. Se invece $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$, ne se segue che $F((\theta',\hat{\omega}')) = [(\theta,\hat{\omega})]_p$ se e solo se $(\cot\theta'/2, \hat{\omega}') = \lambda(\cot\theta/2, \hat{\omega})$. Dunque $\lambda\hat{\omega} = \hat{\omega}'$, quindi $\lambda \in \{\pm 1\}$. Visto che ci possiamo restringere al caso $\theta,\theta' \in [-\pi,\pi) \setminus \{0\}$ e che su questo dominio cot è invertibile, questo mostra che se $\lambda = 1$ allora $\theta' = \theta$ e se $\lambda = -1$ allora $\theta' = -\theta$, ma in tal caso $\theta'\hat{\omega}' = \theta\hat{\omega}$ e dunque in ogni caso $(\theta',\hat{\omega}') \sim (\theta,\hat{\omega})$. Questo mostra che F è costante sulle classi di equivalenza di Ω e induce una biezione $\widetilde{F} : \Omega \to P_3$. Poichè F è continua anche $\widetilde{F}$ lo è. Ne segue che $\widetilde{F}$ è un omeomorfismo. Ma allora $F \circ \mathcal{E}^{-1}$ è l'omeomorfismo cercato. □

Esercizio A.1.13. *Se vi volete divertire, mostrate che $F \circ \mathcal{E}^{-1}$ è un diffeomorfismo, ovvero $SO(3,\mathbb{R})$ e P_3 sono diffeomorfi.*

[11] Due spazi si dicono isomorfi se esiste un omeomorfismo tra di loro.

[12] Si ricordi che P_n è definito come $(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\})/\sim$ dove $x \sim y$ se esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che $y = \lambda x$.