Analisi II per Ingegneria Elettronica&Internet, Informatica (frontale e online)
01–03–2019 A.A. 2018/2019, Sessione Invernale, terzo appello

Nome(Stampatello) **Cognome**(Stampatello) **Matricola**

Consegnare il presente foglio sempre, anche in caso di ritiro

Le risposte vanno motivate. Se immotivate, ancorché esatte, non verranno prese in considerazione. **In caso di ritiro scrivere "Ritirata/o" sotto al cognome**

Gli studenti di **Elettronica&Internet** risolvano gli esercizi 1,2,3,6. Gli studenti di **Informatica** risolvano gli esercizi 2,4,5,6

1) (7.5 punti) Si risolva l'equazione differenziale

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = x, \quad x > 0, t > 0 \\ u(x,0) = 0, \ u_t(x,0) = 0, \ u_x(0,t) = t, \quad x \geq 0, t \geq 0, T > 0 \end{cases}$$

2) (7.5 punti) Calcolare il volume dell'insieme definito da $D = \{\underline{x} \in \mathbf{R}^3\colon\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 4z,\ 0 \leq z \leq (x^2 + y^2)$

3) (7.5 punti) Sia data la serie di funzioni $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} x^2 e^{-kx^2}$, $x \in \mathbf{R}$.

1) Si stabilisca l'insieme di convergenza puntuale

2) Si dica se nell'intervallo $[1, +\infty)$ la convergenza è uniforme.

3) Si dica se nell'intervallo $[0, +\infty)$ la convergenza è uniforme.

4) (7.5 punti) Si risolva l'equazione differenziale

$$x'' - 2x' + x = t^2 H(t-1), \quad x(0) = 1 \quad x'(0) = 0$$

5) (7.5 punti) Calcolare l'integrale curvilineo

$$\int_{\underline{\gamma}} \frac{x^3 + yx^4 + y^5}{x^4 + y^4} dx + \frac{x^4 + y^3 + y^4}{x^4 + y^4} dy$$

dove $\underline{\gamma}$ è data nell'ordine dal quarto di circonferenza $x^2 + y^2 = 1$ da $(1, 0)$ a $(0, 1)$, dal segmento da $(0, 1)$ a $(0, 3)$ e dal quarto di ellisse $9x^2 + 4y^2 = 36$ da $(0, 3)$ a $(2, 0)$.

6) (7.5 punti) Calcolare $V.P. \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(ax)}{x(x^4 - x^2 b^2 + b^4)} dx$, $a, b > 0$

Soluzioni

1). $v(x,p)\doteq \mathcal{L}u(x,t)$. L'equazione diventa $p^2v-a^2v_{xx}=\dfrac{x}{p}$ da cui $v(x,p)=\alpha e^{-px/a}+\beta e^{px/a}+\dfrac{x}{p^3}$. Come la solito $\beta=0$. La condizione iniziale è $\mathcal{L}u_x(0,t)=\dfrac{1}{p^2}\doteq v_x(0,p)$ per cui

$$-\frac{p}{a}\alpha+\frac{1}{p^3}=\frac{1}{p^2}\implies \alpha=\frac{a}{p^4}-\frac{a}{p^3}\implies v(x,p)=\left(\frac{a}{p^4}-\frac{a}{p^3}\right)e^{\frac{-px}{a}}+\frac{x}{p^3}$$

e quindi

$$u(x,t)=aH(t-\frac{x}{a})\left(\frac{1}{6}(t-\frac{x}{a})^3-\frac{1}{2}(t-\frac{x}{a})^2\right)+\frac{xt^2}{2}$$

2). Eliminando x^2+y^2 dalle due superfici si ottiene $z+z^2\leq 4z$ ossia $z\leq 3$. Conviene integrare per strati. Il piano $z=z_0$ interseca la sfera generando una circonferenza di centro $(0,0,z_0)$ e raggio $\sqrt{4z_0-z_0^2}$. Lo stesso piano interseca il parabolide e genera una circonferenza di centro lo stesso di prima e raggio $\sqrt{z_0}$. Il volume è quindi

$$\pi\int_0^3 dz_0(4z_0-z^2-z_0)=\frac{27\pi}{2}-\frac{27\pi}{3}=\pi\frac{9}{2}$$

3). Si veda il giornale delle lezioni dell'anno accademico 2014/2015.

4). Conviene scrivere $t^2H(t-1)=((t-1)^2+2(t-1)+1)H(t-1)$ per cui se $X(p)=\mathcal{L}u(x,t)$ si ha

$$X(p)(p-1)^2=2\frac{e^{-p}}{p^3}+2\frac{e^{-p}}{p^2}+\frac{e^{-p}}{p}+p-2$$

da cui

$$X(p)=2\frac{e^{-p}}{p^3(p-1)^2}+2\frac{e^{-p}}{p^2(p-1)^2}+\frac{e^{-p}}{p(p-1)^2}+\frac{p-2}{(p-1)^2}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{p-2}{(p-1)^2}\right]=\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}e^{pt}\left(\frac{1}{p-1}-\frac{1}{(p-1)^2}\right)dp=(1-t)e^t\quad \operatorname{Re}a>1$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-p}}{p(p-1)^2}\right]&=\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{e^{p(t-1)}}{p(p-1)^2}dp=\left(1+\lim_{p\to1}\frac{d}{dp}\frac{e^{p(t-1)}}{p}\right)H(t-1)=\\&=(1+(t-1)e^{t-1}-e^{t-1})H(t-1)=(1+e^{t-1}(t-2))H(t-1)\end{aligned}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-p}}{p^2(p-1)^2}\right]=\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{2e^{p(t-1)}}{p^2(p-1)^2}dp=2\left(\lim_{p\to1}\frac{d}{dp}\frac{e^{p(t-1)}}{p^2}+\lim_{p\to0}\frac{d}{dp}\frac{e^{p(t-1)}}{(p-1)^2}\right)H(t-1)=$$
$$=2((t-1)e^{t-1}-2e^{t-1}+(t-1)+2)H(t-1)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-p}}{p^3(p-1)^2}\right]=\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{2e^{p(t-1)}}{p^3(p-1)^2}dp=2\left(\lim_{p\to1}\frac{d}{dp}\frac{e^{p(t-1)}}{p^3}+\frac{1}{2}\lim_{p\to0}\frac{d^2}{dp^2}\frac{e^{p(t-1)}}{(p-1)^2}\right)H(t-1)=$$
$$=2((t-1)e^{t-1}-3e^{t-1}+\frac{1}{2}(t-1)^2+2(t-1)+3)H(t-1)$$

Sommando si ottiene

$$(e^{t-1}(5t-16)+t^2+4t+6)H(t-1)+(1-t)e^t;$$

Ormai non so più in che lingua scriverlo, dirlo, ribadirlo, puntualizzarlo, enfatizzarlo, sottolinearlo, enuclearlo, evidenziarlo, ripeterlo: non si può scrivere il prodotto delle trasformate di $H(t-1)$ e di t^2 e chi lo fa prende 0 all'esercizio.

Si può scrivere il prodotto delle trasformate nel caso in cui si abbia il prodotto di convoluzione di due funzioni. Ovviamente qualcuno si è "giocato" il compito per tale errore

5). Conviene scrivere

$$\omega = \left(\frac{x^3}{x^4+y^4}dx + \frac{y^3}{x^4+y^4}dy\right) + ydx + dy \doteq \omega_1 + \omega_2$$

La prima forma è definita su tutto il paino ad eccezione dell'origine ed è esatta in quanto la funzione $\frac{1}{4}\ln(x^4+y^4) = U(x,y)$ ha come derivate parziali le componenti della forma **ed è definita esattamente dove è definita la forma.** Quindi $\int \omega_1 = U(2,0) - U(1,0) = \ln 2$

$\int dy = 0$ chiaramente.

Per calcolare $\int ydx$ osserviamo che sul tratto verticale si ha $x = 0$. Sul quarto di circonferenza abbiamo.

$$\int ydx = \int_0^{\pi/2} \sin t(-\sin t)dt = \frac{\sin(2t)}{4} - \frac{t}{2}\Big|_0^{\pi/2} = \frac{-\pi}{4}$$

Sul quarto di ellisse abbiamo

$$-\int_0^{\pi/2} 3\sin t(-2\sin t)dt = \frac{-3}{2}\sin(2t) + 3t\Big|_0^{\pi/2} = \frac{3\pi}{2}$$

La somma dei vari pezzi dà $\frac{5\pi}{4} + \ln 2$

6). Sappiamo che

$$V.P.\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(ax)}{x(x^4-x^2b^2+b^4)}dx = \mathrm{Im}\left[V.P.\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iax}}{x(x^4-x^2b^2+b^4)}dx\right] =$$

$$= \frac{i\pi}{b^4} + 2\pi i \lim_{z\to be^{i\pi/6}} \frac{(z-be^{i\pi/6})e^{iaz}}{z(z^4-z^2b^2+b^4)} + 2\pi i \lim_{z\to be^{i5\pi/6}} \frac{(z-be^{i\pi/6})e^{iaz}}{z(z^4-z^2b^2+b^4)} \underbrace{=}_{l'Hopital}$$

$$= \frac{i\pi}{b^4} + 2\pi i \lim_{z\to be^{i\pi/6}} \frac{e^{iaz}}{z(4z^3-2zb^2)} + 2\pi i \lim_{z\to be^{i5\pi/6}} \frac{e^{iaz}}{z(4z^3-2zb^2)}$$

$$4z^4 - 2z^2b^2\Big|_{z=be^{i\pi/6}} = 4b^4e^{\frac{i2\pi}{3}} - 2b^4e^{\frac{i\pi}{3}} = b^4(-3+i\sqrt{3}) = 2b^4\sqrt{3}(\frac{-\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}) = 2b^4\sqrt{3}e^{\frac{i5\pi}{6}}$$

$$4z^4 - 2z^2b^2\Big|_{z=be^{i5\pi/6}} = 4z^4 - 2z^2b^2\Big|_{z=be^{i\pi/6}}$$

per cui otteniamo

$$\frac{i\pi}{b^4} + 2\pi i\frac{1}{2b^4\sqrt{3}}e^{\frac{-i5\pi}{6}}\left(e^{iab(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2})} + e^{iab(\frac{-\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2})}\right) =$$

$$= \frac{i\pi}{b^4} + \pi i\frac{e^{-ab/2}}{b^4\sqrt{3}}\left(\cos\left(\frac{ab\sqrt{3}}{2} - \frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{ab\sqrt{3}}{2} - \frac{5\pi}{6}\right)\right)$$

$$+ \frac{i\pi}{b^4} + \pi i\frac{e^{-ab/2}}{b^4\sqrt{3}}\left(\cos\left(\frac{ab\sqrt{3}}{2} + \frac{5\pi}{6}\right) - i\sin\left(\frac{ab\sqrt{3}}{2} + \frac{5\pi}{6}\right)\right)$$

e quindi l'integrale vale

$$\frac{\pi}{b^4}+\pi\frac{e^{-ab/2}}{b^4\sqrt{3}}\cos\left(\frac{ab\sqrt{3}}{2}-\frac{5\pi}{6}\right)+\pi\frac{e^{-ab/2}}{b^4\sqrt{3}}\cos\left(\frac{ab\sqrt{3}}{2}+\frac{5\pi}{6}\right)=$$
$$=\frac{\pi}{b^4}-2\pi\frac{e^{-ab/2}}{b^4\sqrt{3}}\sin\frac{ab\sqrt{3}}{2}$$