Analisi II per Ingegneria Elettronica&Internet, Informatica (frontale e online)
04–02–2019 A.A. 2018/2019, Sessione Invernale, secondo appello (A)

Nome(Stampatello) **Cognome**(Stampatello) **Matricola**

Consegnare il presente foglio sempre, anche in caso di ritiro

Le risposte vanno motivate. Se immotivate, ancorché esatte, non verranno prese in considerazione. **In caso di ritiro scrivere "Ritirata/o" sotto al cognome**

Gli studenti di **Elettronica&Internet** risolvano gli esercizi 1,1.1,2,3,4. Gli studenti di **Informatica** risolvano gli esercizi 2,3,5,5.1,6.

1) (7.5 punti) Si risolva l'equazione differenziale

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = (t * (\sin t)^2), & x > 0, t > 0 \\ u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = 0,\ u(0,t) = 0, & x \geq 0, t \geq 0 \end{cases}$$

$f * g$ è il prodotto di convoluzione

1.1) (3 punti) Dimostrare che $u_t(2a, \sqrt{\frac{3}{2}}) > 1/32$ oppure dimostrare che è falso.

2) (7.5 punti) Sia data la superficie S definita da $\{\underline{x} \in \mathbf{R}^3 \colon \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{16} = 1, 0 \leq z \leq xy,\ x, y \geq 0\}$. Se ne calcoli l'area.

Avvertimento. La superficie $x^2/9 + y^2/16 - 1 = 0$ *non è* cartesiana del tipo $z = f(x,y)$ e quindi non ha senso scrivere $\sqrt{1 + \frac{4x^2}{81} + \frac{4y^2}{256}}$ nelle formule;

3) (7.5 punti) Si calcoli l'integrale $V.P. \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(bx) - \sin(ax)}{x^2(x^2+x+1)} dx,\ a, b > 0$. Nell'esecuzione dell'esercizio va indicato quale cammino si una nel piano complesso e vanno parametrizzate tutte le curve in gioco. Bisogna inoltre dire quali integrali tendono a zero ma senza dimostrazione

Avvertimento: *se si "chiude" il cammino con un semicerchio nel semipiano superiore o inferiore che tende all'infinito e si integra la funzione* $\frac{\sin(bz)-\sin(az)}{z^2(z^2+z+1)}$, *si va nei guai. Il risultato è reale e va scritto senza la presenza dell'unità immaginaria i*

4) (7.5 punti) Si calcoli $\displaystyle\oint_{\underline{\varphi}} \omega$ dove $\omega = (yz - \frac{1}{3}y^3)dx + (xz + \frac{1}{3}x^3)dy + xydz$ e $\underline{\varphi}$ è la curva percorsa in senso antiorario il cui sostegno è dato dall'insieme $z = x^2 + y^2$, $z = 2x + y + 1$

5) (10 punti) Si risolva l'equazione differenziale

$$x'' - 4x' + 4x = (y * (\sin y)^2)\Big|_{y=t-1} \cdot H(t-1), \quad x(0) = 0 \quad x'(0) = 0$$

$f * g$ è il prodotto di convoluzione

5.1) (3 punti) Dimostrare che $x'(0.5) + x'(2) > \frac{e^2}{8} + \frac{1}{16}$ oppure dimostrare che è falso

6) (5 punti) i valuti $\displaystyle\int_{\underline{\gamma}} \omega$ dove $\omega = (xy^2 + x + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \frac{1}{1+x^2+y^2})dx + (yx^2 + y + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \frac{1}{1+x^2+y^2})dy$ e $\underline{\gamma} = (\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \colon [0, 2\pi] \to \mathbf{R}^2$ $\gamma_1(t) = \left(1 + \frac{t}{2\pi}\right)\cos t$, $\gamma_2(t) = \left(1 + \frac{t}{2\pi}\right)\sin t$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

04–02–2019 A.A. 2018/2019, Sessione Invernale, secondo appello (B)

Nome(Stampatello) **Cognome**(Stampatello) **Matricola**

Consegnare il presente foglio sempre, anche in caso di ritiro

Le risposte vanno motivate. Se immotivate, ancorché esatte, non verranno prese in considerazione. In caso di ritiro scrivere "Ritirata/o" sotto al cognome

Gli studenti di **Elettronica&Internet** risolvano gli esercizi 1,1.1,2,3,4. Gli studenti di **Informatica** risolvano gli esercizi 2,3,5,5.1,16.

1) (7.5 punti) Si risolva l'equazione differenziale

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = (t * (\cos t)^2), & x > 0, t > 0 \\ u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = 0,\ u(0,t) = 0, & x \geq 0, t \geq 0 \end{cases}$$

$f * g$ è il prodotto di convoluzione

1.1) (3 punti) Dimostrare che $u_t(2a, \sqrt{\frac{3}{2}}) < -1/32$ oppure dimostrare che è falso.

2) (7.5 punti) Sia data la superficie S definita da $\{\underline{x} \in \mathbf{R}^3 \colon \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{16} = 1, 0 \leq z \leq xy,\ x, y \geq 0\}$. Se ne calcoli l'area.

Avvertimento. La superficie $x^2/9 + y^2/16 - 1 = 0$ *non è* cartesiana del tipo $z = f(x,y)$ e quindi non ha senso scrivere $\sqrt{1 + \frac{4x^2}{81} + \frac{4y^2}{256}}$ nelle formule;

3) (7.5 punti) Si calcoli l'integrale $V.P. \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(bx) - \sin(ax)}{x^2(x^2 - x + 1)} dx,\ a, b > 0$. Nell'esecuzione dell'esercizio va indicato quale cammino si una nel piano complesso e vanno parametrizzate tutte le curve in gioco. Bisogna inoltre dire quali integrali tendono a zero ma senza dimostrazione

Avvertimento: *se si "chiude" il cammino con un semicerchio nel semipiano superiore o inferiore che tende all'infinito e si integra la funzione* $\frac{\sin(bz) - \sin(az)}{z^2(z^2+z+1)}$, *si va nei guai. Il risultato è reale e va scritto senza la presenza dell'unità immaginaria i*

4) (7.5 punti) Si calcoli $\displaystyle\oint_{\underline{\varphi}} \omega$ dove $\omega = (yz - \frac{1}{3}y^3)dx + (xz + \frac{1}{3}x^3)dy + xydz$ e $\underline{\varphi}$ è la curva percorsa in senso antiorario il cui sostegno è dato dall'insieme $z = x^2 + y^2$, $z = x + 2y + 1$

5) (10 punti) Si risolva l'equazione differenziale

$$x'' - 4x' + 4x = (y * (\sin y)^2)\Big|_{y=t-1} \cdot H(t-1), \quad x(0) = 0 \quad x'(0) = 0$$

$f * g$ è il prodotto di convoluzione

5.1) (3 punti) Dimostrare che $x'(0.5) + x'(2) > \frac{e^2}{8} + \frac{1}{16}$ oppure dimostrare che è falso

6) (5 punti) Si valuti $\displaystyle\int_{\underline{\gamma}} \omega$ dove $\omega = (xy^2 + x + \frac{x}{x^2+y^2})dx + (yx^2 + y + \frac{y}{x^2+y^2})dy$ e $\underline{\gamma} = (\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \colon [\pi, 3\pi] \to \mathbf{R}^2$ $\gamma_1(t) = \left(1 + \frac{t}{2\pi}\right)\cos t$, $\gamma_2(t) = \left(1 + \frac{t}{2\pi}\right)\sin t$, $\pi \leq t \leq 3\pi$.

Soluzioni (A)

1) Come la solito $\mathcal{L}(u) = v(p)$ e l'equazione diventa

$$p^2 v(p,x) - a^2 v_{xx}(p,x) = \frac{1}{2p^3} - \frac{1}{2p(p^2+4)}, \qquad v(0,p) = \mathcal{L}u(0,t) = 0$$

da cui la soluzione

$$v(p,x) = \alpha e^{\frac{-xp}{a}} + \beta e^{\frac{xp}{a}} + \frac{1}{2p^5} - \frac{1}{2p^3(p^2+4)}$$

Sappiamo che deve essere $\beta = 0$ e quindi

$$v(0,p) = \alpha + \frac{1}{2p^5} - \frac{1}{2p^3(p^2+4)} = 0 \implies \alpha = -\frac{1}{2p^5} + \frac{1}{2p^3(p^2+4)}$$

Abbiamo

$$v(p,x) = \left(-\frac{1}{2p^5} + \frac{1}{2p^3(p^2+4)}\right) e^{\frac{-px}{a}} + \frac{1}{2p^5} - \frac{1}{2p^3(p^2+4)}$$

ed inoltre

$$\frac{1}{2p^3(p^2+4)} = \frac{1}{8p^3} - \frac{1}{32p} + \frac{1}{32}\frac{p}{p^2+4}$$

Antitrasformando si ha

$$u(x,t) = \frac{t^4}{48} - \frac{t^2}{16} + \frac{1}{32} - \frac{1}{32}\cos(2t) - H(t-\frac{x}{a})\left(\frac{1}{48}(t-\frac{x}{a}) - \frac{1}{16}(t-\frac{x}{a})^2 + \frac{1}{32} - \frac{1}{32}\cos(2(t-\frac{x}{a}))\right) =$$
$$= \frac{t^4}{48} - \frac{t^2}{16} + \frac{\sin^2 t}{16} - H(t-\frac{x}{a})\left(\frac{1}{48}(t-\frac{x}{a}) - \frac{1}{16}(t-\frac{x}{a})^2 + \frac{1}{16}\sin^2(t-\frac{x}{a}))\right)$$

1.1)

$$u_t(x,t) = \frac{t^3}{12} - \frac{t}{8} + \frac{\sin(2t)}{16} - \delta(t-\frac{x}{a})\left(\frac{1}{48}(t-\frac{x}{a}) - \frac{1}{16}(t-\frac{x}{a})^2 + \frac{1}{16}\sin^2(t-\frac{x}{a}))\right) +$$
$$+ H(t-\frac{x}{a})\left(\frac{1}{48} + \frac{1}{8}(t-\frac{x}{a}) + \frac{1}{16}\sin(2t-\frac{2x}{a}))\right) =$$
$$= \frac{t^3}{12} - \frac{t}{8} + \frac{\sin(2t)}{16} + H(t-\frac{x}{a})\left(\frac{1}{8}(t-\frac{x}{a}) + \frac{1}{16}\sin(2t-\frac{2x}{a}))\right)$$

Per $x = 2a$, $t = \sqrt{3/2}$ si ha $t - x/a = \sqrt{3/2} - 2 < 0$ per cui

$$u_t(2a, \sqrt{\frac{3}{2}}) = \frac{\sqrt{6}}{16} - \frac{\sqrt{6}}{16} + \frac{\sin\sqrt{6}}{16} > \frac{1}{32} \iff \sin\sqrt{6} > \frac{1}{2}$$

e basta osservare che $\sqrt{6} < 5\pi/6$ che è ovvia

2) Si veda il compito del 22/6/2016. Il risultato è 112/9.

3) Per il cammino su cui integrare si veda il giornale delle lezioni.

$$I = \text{Im}\left[V.P.\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ibx} - e^{iax}}{x^2(x^2+x+1)}dx\right]$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ibx}-e^{iax}}{x^2(x^2+x+1)}dx = i\pi \lim_{x\to 0} \frac{e^{ibx}-e^{iax}}{x(x^2+x+1)} + 2\pi i \text{Res}\left(\frac{e^{ibz}-e^{iaz}}{z^2(z^2+z+1)}, z=e^{\frac{i2\pi}{3}}\right) =$$

$$= i\pi i(b-a) + \lim_{z\to e^{\frac{2\pi i}{3}}} \frac{e^{ibz}-e^{iaz}}{z^2(2z+1)} = -\pi(b-a) + \frac{e^{\frac{-i4\pi}{3}}}{i\sqrt{3}}\left(e^{ib(\frac{-1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2})} - e^{ia(\frac{-1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2})}\right) =$$

$$= -\pi(b-a) + \frac{-i}{\sqrt{3}} e^{\frac{-b\sqrt{3}}{2}}\left(\cos(\frac{b}{2}+\frac{4\pi}{3}) - i\sin(\frac{b}{2}+\frac{4\pi}{3})\right) + \frac{i}{\sqrt{3}} e^{\frac{-a\sqrt{3}}{2}}\left(\cos(\frac{a}{2}+\frac{4\pi}{3}) - i\sin(\frac{a}{2}+\frac{4\pi}{3})\right)$$

La parte immaginaria è

$$\frac{-1}{\sqrt{3}} e^{\frac{-b\sqrt{3}}{2}} \cos(\frac{b}{2}+\frac{4\pi}{3}) + \frac{1}{\sqrt{3}} e^{\frac{-a\sqrt{3}}{2}} \cos(\frac{a}{2}+\frac{4\pi}{3})$$

Non si possono calcolare separatamente le due quantità

$$V.P. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ibx}}{x^2(x^2+x+1)}dx, \qquad V.P. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iax}}{x^2(x^2+x+1)}dx,$$

e il motivo sta nell'espressione $\lim_{x\to 0} \frac{e^{ibx}-e^{iax}}{x(x^2+x+1)}$**. Se si toglie uno dei due esponenziali il limite fa** $\pm\infty$

4) Si interseca il piano col paraboloide e si ottiene $(x-1)^2+(y-\frac{1}{2})^2 = \frac{9}{4}$. Applichiamo Stokes. Il rotore è $(0,0,x^2+y^2)$. Il vettore esterno al piano è $(-1,-1,1)$ per cui abbiamo

$$\iint_{(x-1)^2+(y-\frac{1}{2})^2\le 9/4} (x^2+y^2)dxdy = \int_0^1 dr\, \frac{9}{4} r \int_0^{2\pi} \left(\frac{5}{4}+\frac{9}{4}r^2\right) dt = \frac{171\pi}{32}$$

Studiando "meccanicamente" la soluzione del precedente compito, alcuni hanno scritto $(0,0,1)$ **quale normale esterna al piano interessato dal presente esercizio. Grave e gratuito errore! Solo casualmente non cambia il risultato finale**

5) Sia $g(y) \doteq y*(\sin y)^2$. $\mathcal{L}(g(t-1)H(t-1)) = e^{-p}\mathcal{L}(g)$. $\sin^2 y = \frac{1-\cos(2y)}{2}$ da cui $y*(\sin y)^2 = \frac{y*1}{2} - \frac{y*\cos(2y)}{2}$. Quindi $\mathcal{L}(g) = \frac{1}{2p^3} - \frac{1}{2}\frac{1}{p(p^2+4)}$ e alla fine abbiamo $\mathcal{L}\Big((y*(\sin y)^2\Big)|_{t-1}H(t-1) = \frac{e^{-p}}{2p^3} - \frac{1}{2}\frac{e^{-p}}{p(p^2+4)}$.

In trasformata di Laplace

$$X(p) = \frac{e^{-p}}{2p^3(p-2)^2} - \frac{1}{2}\frac{e^{-p}}{p(p^2+4)(p-2)^2}$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\frac{d^2}{dp^2}\frac{e^{pt}}{(p-2)^2}\right)\Big|_{p=0} = \frac{1}{4}\frac{d}{dp}\left[\frac{te^{pt}}{(p-2)^2} - \frac{2e^{pt}}{(p-2)^3}\right]\Big|_{p=0} =$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{t^2e^{pt}}{(p-2)^2} - \frac{2te^{pt}}{(p-2)^3} - \frac{2te^{pt}}{(p-2)^3} + \frac{6e^{pt}}{(p-2)^4}\right]\Big|_{p=0} = \frac{1}{4}\left(\frac{t^2}{4}+\frac{t}{2}+\frac{3}{8}\right)$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dp}\frac{e^{pt}}{2p^3}\Big|_{p=2} = \frac{1}{2}\left(\frac{te^{2t}}{16} - \frac{3e^{2t}}{32}\right)$$

e il primo termine di $X(p)$ ci dà

$$\left[\frac{(t-1)^2}{16}+\frac{t-1}{8}+\frac{3}{32}+\frac{(t-1)e^{2(t-1)}}{32}-\frac{3e^{2(t-1)}}{64}\right]H(t-1)$$

Il secondo termine ci dà

$$\frac{-1}{2}\left(\frac{1}{16}+\frac{d}{dp}\frac{e^{pt}}{p(p^2+4)}\Big|_{p=2}+\frac{e^{2it}}{(2i)(4i)(2i-2)^2}+\frac{e^{-2it}}{(-2i)(-4i)(-2i-2)^2}\right)=$$
$$=\frac{-1}{2}\left(\frac{1}{16}+\frac{te^{2t}}{16}-\frac{e^{2t}}{32}-\frac{e^{2t}}{32}+\frac{e^{2it}}{64i}-\frac{e^{-2it}}{64i}\right)=\frac{-1}{2}\left(\frac{1}{16}+\frac{te^{2t}}{16}-\frac{e^{2t}}{16}+\frac{\sin(2t)}{32}\right)$$

che genera il termine

$$\left(\frac{-1}{32}-\frac{(t-1)e^{2(t-1)}}{32}+\frac{e^{2(t-1)}}{32}-\frac{\sin(2(t-1))}{64}\right)H(t-1)$$

La somma è

$$x(t)=\left(\frac{1}{16}+\frac{t-1}{8}+\frac{(t-1)^2}{16}-\frac{e^{2(t-1)}}{64}-\frac{\sin(2(t-1))}{64}\right)H(t-1)$$

5.1)

$$x'(t)=\delta(t-1)\left(\frac{1}{16}+\frac{t-1}{8}+\frac{(t-1)^2}{16}-\frac{e^{2(t-1)}}{64}-\frac{\sin(2(t-1))}{64}\right)+$$
$$+\left(\frac{1}{8}+\frac{t-1}{8}-\frac{e^{2(t-1)}}{32}-\frac{\cos(2(t-1))}{32}\right)H(t-1)=$$

$$x'(2)=\left(\frac{1}{16}-\frac{e^2}{64}-\frac{\sin 2}{64}\right)+\left(+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}-\frac{e^2}{32}-\frac{\cos 2}{32}\right)>\frac{e^2}{8}+\frac{1}{16}$$

è necessario che $(\sin 2+\cos 2>0)$ $\frac{1}{4}>\frac{11e^2}{64}$ ed è falso.

6) La forma è esatta ed il potenziale è $U(x,y)=\frac{x^2y^2}{2}+\frac{x^2+y^2}{2}+\arctan\sqrt{x^2+y^2}$ La curva connette i punti $(1,0)$ e $(3,0)$ da cui

$$U(2,0)-U(1,0)=2+\arctan 2-\frac{1}{2}-\arctan 1=\frac{3}{2}-\frac{\pi}{4}+\arctan 2$$

Notare che il dominio della funzione $U(x,y)$ **è lo stesso** della forma.

Senza trovare $U(x,y)$ ma sapendo che ω è chiusa si poteva pure agire come nel precedente compito ossia chiudiamo la curva con il segmento che da $(2,0)$ va a $(1,0)$. L'integrale sulla curva chiusa vale zero in quanto per Gauss–Green uguaglia l'integrale sulla curva, ad esempio, $x=\varepsilon\cos t$, $y=\varepsilon\sin t$, $0\le t\le 2\pi$ che vale $(\cos t=C,\ \sin t=S)$

$$\int_0^{2\pi}\left[\left(\varepsilon^3C^2S+C+\frac{\varepsilon C}{\varepsilon(1+\varepsilon^2)}\right)(-\varepsilon S)+\left(\varepsilon^3SC^2+S+\frac{\varepsilon S}{\varepsilon(1+\varepsilon^2)}\right)(\varepsilon C)\right]dt=0$$

Quindi il risultato è

$$-\int_{-2}^{-1}(-t+\frac{-t}{-t}\frac{1}{1+t^2})(-dt)=\int_{-2}^{-1}(-t+\frac{1}{1+t^2})dt=\frac{3}{2}+\arctan(-1)-\arctan(-2)=\frac{3}{2}-\frac{\pi}{4}+\arctan 2$$

Soluzioni (B)

1) Come la solito $\mathcal{L}(u) = v(p)$ e l'equazione diventa

$$p^2 v(p,x) - a^2 v_{xx}(p,x) = \frac{1}{2p^3} + \frac{1}{2p(p^2+4)}, \qquad v(0,p) = \mathcal{L}u(0,t) = 0$$

da cui la soluzione

$$v(p,x) = \alpha e^{\frac{-xp}{a}} + \beta e^{\frac{xp}{a}} + \frac{1}{2p^5} + \frac{1}{2p^3(p^2+4)}$$

Sappiamo che deve essere $\beta = 0$ e quindi

$$v(0,p) = \alpha + \frac{1}{2p^5} + \frac{1}{2p^3(p^2+4)} = 0 \implies \alpha = -\frac{1}{2p^5} - \frac{1}{2p^3(p^2+4)}$$

Abbiamo

$$v(p,x) = \left(-\frac{1}{2p^5} - \frac{1}{2p^3(p^2+4)}\right) e^{\frac{-px}{a}} + \frac{1}{2p^5} + \frac{1}{2p^3(p^2+4)}$$

ed inoltre

$$\frac{1}{2p^3(p^2+4)} = \frac{1}{8p^3} - \frac{1}{32p} + \frac{1}{32}\frac{p}{p^2+4}$$

Antitrasformando si ha

$$u(x,t) = \frac{t^4}{48} - \frac{t^2}{16} - \frac{1}{32} + \frac{1}{32}\cos(2t) - H(t-\frac{x}{a})\left(\frac{1}{48}(t-\frac{x}{a}) - \frac{1}{16}(t-\frac{x}{a})^2 - \frac{1}{32} + \frac{1}{32}\cos(2(t-\frac{x}{a}))\right) =$$
$$= \frac{t^4}{48} - \frac{t^2}{16} + \frac{\cos^2 t}{16} - H(t-\frac{x}{a})\left(\frac{1}{48}(t-\frac{x}{a}) - \frac{1}{16}(t-\frac{x}{a})^2 + \frac{1}{16}\cos^2(t-\frac{x}{a}))\right)$$

1.1)

$$u_t(x,t) = \frac{t^3}{12} - \frac{t}{8} + \frac{-\sin(2t)}{32} - \delta(t-\frac{x}{a})\left(\frac{1}{48}(t-\frac{x}{a}) - \frac{1}{16}(t-\frac{x}{a})^2 - \frac{1}{32} + \frac{1}{32}\cos(2t-\frac{2x}{a}))\right) +$$
$$+ H(t-\frac{x}{a})\left(\frac{1}{48} - \frac{1}{8}(t-\frac{x}{a}) + \frac{-1}{32}\sin(2(t-\frac{x}{a}))\right)$$
$$= \frac{t^3}{12} - \frac{t}{8} - \frac{\sin(2t)}{32} + H(t-\frac{x}{a})\left(\frac{1}{48}(t-\frac{x}{a}) - \frac{1}{16}(t-\frac{x}{a})^2 - \frac{1}{32}\cos(2t-\frac{2x}{a}))\right)$$

Per $x = 2a$, $t = \sqrt{3/2}$ si ha $t - x/a = \sqrt{3/2} - 2 < 0$ per cui

$$u_t(2a, \sqrt{\frac{3}{2}}) = \frac{\sqrt{6}}{16} - \frac{\sqrt{6}}{16} - \frac{\sin\sqrt{6}}{16} < \frac{-1}{32} \iff \sin\sqrt{6} > \frac{1}{2}$$

e basta osservare che $\sqrt{6} < 5\pi/6$ che è ovvia

2) Si veda il compito del 22/6/2016. Il risultato è 148/7.

3) Per il cammino su cui integrare si veda il giornale delle lezioni.

$$I = \operatorname{Im}\left[V.P.\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ibx} - e^{iax}}{x^2(x^2-x+1)}dx\right]$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ibx}-e^{iax}}{x^2(x^2-x+1)}dx=i\pi\lim_{x\to 0}\frac{e^{ibx}-e^{iax}}{x(x^2-x+1)}+2\pi i\text{Res}\left(\frac{e^{ibz}-e^{iaz}}{z^2(z^2-z+1)},z=e^{\frac{i\pi}{3}}\right)=$$

$$=i\pi i(b-a)+\lim_{z\to e^{\frac{\pi i}{3}}}\frac{e^{ibz}-e^{iaz}}{z^2(2z-1)}=-\pi(b-a)+\frac{e^{\frac{-i2\pi}{3}}}{i\sqrt{3}}\left(e^{ib(\frac12+\frac{i\sqrt3}{2})}-e^{ia(\frac12+\frac{i\sqrt3}{2})}\right)=$$

$$=-\pi(b-a)-\frac{i}{\sqrt3}e^{\frac{-b\sqrt3}{2}}\left(\cos(\frac b2-\frac{2\pi}{3})+i\sin(\frac b2-\frac{2\pi}{3})\right)+\frac{i}{\sqrt3}e^{\frac{-a\sqrt3}{2}}\left(\cos(\frac a2-\frac{2\pi}{3})+i\sin(\frac a2-\frac{2\pi}{3})\right)$$

La parte immaginaria è

$$\frac{-e^{\frac{-b\sqrt3}{2}}}{\sqrt3}\cos\left(\frac b2-\frac{2\pi}{3}\right)+\frac{e^{\frac{-a\sqrt3}{2}}}{\sqrt3}\cos\left(\frac a2-\frac{2\pi}{3}\right)$$

Non si possono calcolare separatamente le due quantità

$$V.P.\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ibx}}{x^2(x^2-x+1)}dx,\qquad V.P.\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{iax}}{x^2(x^2-x+1)}dx,$$

e il motivo sta nell'espressione $\lim_{x\to0}\frac{e^{ibx}-e^{iax}}{x(x^2-x+1)}$. **Se si toglie uno dei due esponenziali il limite fa** $\pm\infty$

4) Si interseca il piano col paraboloide e si ottiene $(x-\frac12)^2+(y-1)^2=\frac94$. Applichiamo Stokes. Il rotore è $(0,0,x^2+y^2)$. Il vettore esterno al piano è $(-1,-1,1)$ per cui abbiamo

$$\iint_{(x-\frac12)^2+(y-1)^2\le 9/4}(x^2+y^2)dxdy=\int_0^1 dr\,\frac94 r\int_0^{2\pi}\left(\frac54+\frac94 r^2\right)dt=\frac{171\pi}{32}$$

Studiando “meccanicamente” la soluzione del precedente compito, alcuni hanno scritto $(0,0,1)$ quale normale esterna al piano interessato dal presente esercizio. Grave e gratuito errore! Solo casualmente non cambia il risultato finale

5) Come il compito A.

5.1)

6) La forma è esatta ed il potenziale è $U(x,y)=\frac{x^2y^2}{2}+\frac{x^2+y^2}{2}+\frac12\ln(x^2+y^2)$. La curva connette i punti $(-3/2,0)$ e $(-5/2,0)$ da cui

$$U(5/2,0)-U(3/2,0)=2-\ln\frac53$$

Notare che il dominio della funzione $U(x,y)$ **è lo stesso** della forma.

Senza trovare $U(x,y)$ ma sapendo che ω è chiusa si poteva pure agire come nel precedente compito ossia chiudiamo la curva con il segmento che da $(-5/2,0)$ va a $(-3/2,0)$. L'integrale sulla curva chiusa vale zero in quanto per Gauss–Green uguaglia l'integrale sulla curva, ad esempio, $x=\varepsilon\cos t$, $y=\varepsilon\sin t$, $0\le t\le 2\pi$ che vale $(\cos t=C,\ \sin t=S)$

$$\int_0^{2\pi}\left[\left(\varepsilon^3C^2S+C+\frac{\varepsilon C}{\varepsilon^2}\right)(-\varepsilon S)+\left(\varepsilon^3SC^2+S+\frac{\varepsilon S}{\varepsilon^2}\right)(\varepsilon C)\right]dt=0$$

Quindi il risultato è

$$-\int_{-5/2}^{-3/2}(t+\frac{t}{t^2})dt=-\int_{-5/2}^{-3/2}(t+\frac1t)dt=2+\ln|t|\Big|_{-5/2}^{-3/2}=2-\ln\frac53$$