Analisi II per Ingegneria Elettronica&Internet, Informatica (frontale e online)
21–01–2019 A.A. 2018/2019, Sessione Invernale, primo appello (A)

Nome(Stampatello) **Cognome**(Stampatello) **Matricola**

Inserire il presente foglio nel foglio protocollo

Le risposte vanno motivate sul foglio protocollo. Se immotivate, ancorché esatte, non verranno prese in considerazione.

Gli studenti di **Elettronica&Internet** risolvano gli esercizi 1,2,3,4,4.1. Gli studenti di **Informatica** risolvano gli esercizi 2,3,5,6,6.1.

1) (7.5 punti) Si risolva l'equazione differenziale
$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 1, \quad x > 0, t > 0 \\ u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = A\omega,\ u(0,t) = B\sin(\omega t), \quad x \geq 0, t \geq 0 \end{cases}$$

2) (7.5 punti) Si calcoli il volume compreso fra i due paraboloidi $z = x^2 + y^2 + 2x + 2$ e $z = -x^2 - y^2 - 2x + 1$

3) (7.5 punti) Si calcoli l'integrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{-3x + x^2}{x^4 + 81}$

4) (7.5 punti) Si calcoli l'integrale curvilineo $\displaystyle\int_\gamma \omega$ dove γ è la curva il cui sostegno è dato dall'insieme $z = x^2 + y^2 + 2x + 2$ e $z = -x^2 - y^2 - 2x + 1$. La curva è percorsa in modo che la sua proiezione sul piano (x, y) è percorsa in senso antiorario. Inoltre $\omega = (\frac{1}{3}x^3 + x^2 + x + \frac{1}{3} - 2xy^2 - 2y^2)dy - (xy + y)dz$

4.1) (3 punti) Dimostrare che la curva data è regolare

5) (7.5 punti) Si risolva l'equazione differenziale

$$x'' - 4x' + 4x = H(t-1)e^{2t}, \quad x(0) = 0 \quad x'(0) = 0$$

6) (7.5 punti) Sia data la curva (regolare) $\gamma_1(t) = \left(1 + \dfrac{t}{2\pi}\right)\cos t$, $\gamma_2(t) = \left(1 + \dfrac{t}{2\pi}\right)\sin t$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Si calcoli $\displaystyle\int_{\underline{\gamma}} \omega$ dove $\underline{\gamma}$ e $\omega = \dfrac{-(y-1)dx + xdy}{x^2 + (y-1)^2}$

6.1) (3 punti) Si dimostri che la precedente curva è regolare

Soluzioni compito A

1) . In trasformata di Laplace Sia $\mathcal{L}(u(x,t)) \doteq Y(p,x)$.

$$\mathcal{L}(u_t(x,t)) = pY(p,x) - u(x,0) = pY(p,x), \qquad \mathcal{L}(u_{tt}(x,t)) \doteq p^2 Y(p,x) - A\omega$$

$$\mathcal{L}(u_{xx}(x,t)) = Y_{xx}(p,x), \quad \mathcal{L}(u(0,t)) = \frac{B\omega}{p^2 + \omega^2} = Y(p,0)$$

ed otteniamo
$$p^2Y(p,x) - a^2Y_{xx}(p,x) = \frac{1}{p} + A\omega,\ Y(p,0) = \frac{B\omega}{p^2+\omega^2}$$
La variabile rispetto a cui risolvere la precedente equazione differenziale ordinaria è la x e quindi
$$Y(p,x) = \alpha e^{\frac{p}{a}x} + \beta e^{\frac{-p}{a}x} + \frac{1}{p^3} + \frac{A\omega}{p^2}$$
Sul giornale delle lezioni è spiegato perché bisogna prendere $\alpha = 0$. La costante β è fissata dalla condizione
$$Y(p,0) = \beta + \frac{1}{p^3} + \frac{A\omega}{p^2} = \frac{B\omega}{p^2+\omega^2} \implies \beta = \frac{-1}{p^3} + \frac{-A\omega}{p^2} + \frac{B\omega}{p^2+\omega^2}$$
e quindi
$$Y(p,x) = \left(\frac{-1}{p^3} + \frac{-A\omega}{p^2} + \frac{B\omega}{p^2+\omega^2}\right)e^{\frac{-p}{a}x} + \frac{1}{p^3} + \frac{A\omega}{p^2}$$
$$(\mathcal{L}^{-1}Y(p,x)) = u(x,t) = H(t-\frac{x}{a})\left(\frac{-1}{2}(t-\frac{x}{a})^2 - A\omega(t-\frac{x}{a}) + B\sin\omega(t-\frac{x}{a})\right) + \frac{t^2}{2} + A\omega t$$
Giusto per completezza, verifichiamo le condizioni iniziali
$$u(x,0) = H(-\frac{x}{a})\left(\frac{-1}{2}(-\frac{x}{a})^2 - A\omega(-\frac{x}{a}) + B\omega\sin\omega(-\frac{x}{a})\right) = 0$$
$$u_t(x,0) = \left[\left(H(t-\frac{x}{a})\right)'\left(\frac{-1}{2}(t-\frac{x}{a})^2 - A\omega(t-\frac{x}{a}) + B\omega\sin\omega(t-\frac{x}{a})\right)\right]_{t=0} +$$
$$+ H(0-\frac{x}{a})\left(\frac{-1}{2}(t-\frac{x}{a})^2 - A\omega(t-\frac{x}{a}) + B\omega\sin\omega(t-\frac{x}{a})\right)' + A\omega =$$
$$= \left[\underbrace{\delta(t-\frac{x}{a})\left(\frac{-1}{2}(t-\frac{x}{a})^2 - A\omega(t-\frac{x}{a}) + B\omega\sin\omega(t-\frac{x}{a})\right)}_{=0}\right]_{t=0} + A\omega = A\omega$$
L'argomento della parentesi quadra va calcolato per $t = x/a$ e quindi vale zero.
$$u(0,t) = H(t)\left(\frac{-t^2}{2} - A\omega t + B\omega\sin\omega t\right) + \frac{t^2}{2} + A\omega t = B\omega\sin\omega t$$
Verifichiamo pure che la soluzione trovata soddisfa effettivemente l'equazione. Non c'è praticamente bisogno di fare conti dopo avere osservato che a parte i due tremini alla fine, la soluzione ha come argomento $t - x/a$. In generale
$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(t-\frac{x}{a}) = a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(t-\frac{x}{a})$$

2) Prima soluzione L'intersezione delle due superfici dà $(x+1)^2 + y^2 = 1/2$, e $z = 3/2$

Il volume è dato da $\displaystyle\iint_{(x+1)^2+y^2\le 1/2} dxdy \int_{x^2+y^2+2x+2}^{-x^2-y^2-2x+1} dz = \iint_{(x+1)^2+y^2\le 1/2} dxdy(-2x^2 - 2y^2 - 4x - 1)$ e passando a coordinate polari nel piano $x = -1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\rho\cos t$, $y = \frac{1}{\sqrt{2}}\rho\sin t$, si ottiene $\displaystyle\int_0^1 d\rho\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\rho(1-\rho^2)dt = \pi(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}) = \frac{\pi}{4}$

Alcuni studenti hanno osservato che il primo è un paraboloide rivolto verso l'alto ed il secondo verso il basso. Poi hanno osservato che sostituendo $(0,0)$ nel primo si ottiene 2 e 1 nel secondo. Ciò li ha portati a concludere che non esisteva intersezione fra i due paraboloidi e quindi non c'era volume da calcolare. In realtà l'ordinata del primo paraboloide in $(-1,0)$ è 1 mentre l'ordinata del secondo è 2. L'origine degli assi non è il punto giusto rispetto a cui confrontare i due paraboloidi ma lo è il centro della circonferenza che costituisce l'intersezione dei due paraboloidi

Seconda soluzione. Il paraboloide decrescente si può scrivere come $z=-(x+1)^2-y^2+2$, $z=(x+1)^2+y^2+1$. Ora definiamo $x+1=u$ ed otteniamo $z=-u^2-y^2+2$, $z=u^2+y^2+1$. Nel piano (u,y) ora poniamo $u=0$ ed intersecando otteniamo $y=\pm 1/\sqrt{2}$. Il volume è di rotazione intorno all'asse di equazione parametriche $(u,y,z)=(0,0,,t)$ $t\in\mathbf{R}$ (si veda il “Giornale delle lezioni”). Si ottiene

$$2\pi\int_0^{1/\sqrt{2}}dyy\int_{1+y^2}^{2-y^2}dz=2\pi\int_0^{1/\sqrt{2}}dy(1-2y^2)y=2\pi\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{8}\right)=\frac{\pi}{4}$$

Terza soluzione Si integra per strati. Fissato il valore di $z=z_0$, consideriamo il piano $z=z_0$. L'intersezione con il paraboloide decrescente definisce la circonferenza $(x+1)^2+y^2=2-z_0$, mentre l'intersezione col parabolide crescente la circonferenza $(x+1)^2+y^2=z_0-1$, $1\le z_0\le 2$. L'area racchiusa dalla circonferenza superiore è $\pi(2-z_0)$ e $\pi(z_0-1)$ l'area racchiusa dalla circonferenza inferiore. Il volume è

$$\int_1^{3/2}\pi(z_0-1)dx_0+\int_{3/2}^{2}\pi(2-z_0)dz_0=\pi\left(\frac{9}{8}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)+\pi\left(1+\frac{1}{2}\frac{9}{4}-\frac{1}{2}4\right)=\frac{\pi}{4}$$

3) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}dx\frac{-3x}{x^4+81}=0$ per disparità della funzione. È un buon esercizio verificare con il teorema dei residui. Nella formula che segue Il cammino è quello a pagina 41 delle dispense di Tauraso.

$$\int_{-\infty}^{+\infty}dx\frac{x^2}{x^4+81}=2\pi i\text{Res}\left(\frac{z^2}{z^4+81}\right)\Big|_{z_0=3e^{\frac{i\pi}{4}}}+2\pi i\text{Res}\left(\frac{z^2}{z^4+81}\right)\Big|_{z_1=3e^{\frac{i3\pi}{4}}}$$

$$\text{Res}\left(\frac{z^2}{z^4+81}\right)\Big|_{z_0=3e^{\frac{i\pi}{4}}}=\lim_{z\to z_0}\frac{(z-z_0)z^2}{z^4+81}=\lim_{z\to z_0}\frac{z^2}{4z^3}=\lim_{z\to z_0}\frac{1}{4z}=\frac{1}{12}e^{\frac{-i\pi}{4}}$$

$$\text{Res}\left(\frac{z^2}{z^4+81}\right)\Big|_{z_0=3e^{\frac{3i\pi}{4}}}=\lim_{z\to z_0}\frac{(z-z_0)z^2}{z^4+81}=\lim_{z\to z_0}\frac{z^2}{4z^3}=\lim_{z\to z_0}\frac{1}{4z}=\frac{1}{12}e^{\frac{-i3\pi}{4}}$$

quindi l'integrale è

$$2\pi i\frac{1}{12}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)+\frac{\sqrt{2}}{2}(-1-i)\right)=\frac{\sqrt{2}\pi}{6}$$

4) Usando Stokes si può scrivere $\displaystyle\int_\gamma\omega=\iint_{(x+1)^2+y^2\le 1/2}d\sigma(\underline{\text{rot}F},\underline{n}_e)$ dove $\underline{F}$ è il rotore del campo vettoriale. Le due superfici si intersecano lungo una circonferenza che giace sul piano $z=3/2$. La normale al piano è $(0,0,1)$.

Il rotore è dato dal vettore $(-1-x,y,(x+1)^2-2y^2)$. La superficie è il piano $z=3/2$ e quindi l'integrale è $\displaystyle\iint_{(x+1)^2+y^2\le 1/2}dx\,dy\,((x+1)^2-2y^2)=-\frac{\pi}{16}$

Scegliere il piano come superficie contornata dalla circonferenza $(x+1)^2+y^2=1/2$ non è obbligatorio. Potevamo scegliere anche $z=x^2+y^2+2x+2$. In tal caso $\underline{\varphi}_u \wedge \underline{\varphi}_v = \underline{i}(-2u-2)-2\underline{j}v+\underline{k}$ e quindi

$$\iint_{(u+1)^2+v^2\leq 1/2} (2(1+u)^2-2v^2+(u+1)^2-2v^2)dudv = \iint_{(u+1)^2+v^2\leq 1/2}((u+1)^2-2v^2)dudv =$$

esattamente come prima.

4.1) La curva evidentemente è

$$x=-1+\frac{\cos t}{\sqrt{2}} \quad y=\frac{\sin t}{\sqrt{2}} \quad z=(x+1)^2+y^2=\frac{3}{2}$$

$$x'=-\frac{\sin t}{\sqrt{2}} \quad y'=\frac{\cos t}{\sqrt{2}} \quad z'=0 \implies (x')^2+(y')^2=\frac{1}{2}$$

per cui nessun valore di t può soddisfare $(x',y')=(0,0)$.

5) Detta $X(p)=\mathcal{L}(x)$ abbiamo

$$X(p)(p-2)^2=\frac{e^{-(p-2)}}{p-2} \quad X(p)=\frac{e^{-(p-2)}}{(p-2)^3}$$

$$x(t)=\frac{1}{2}\lim_{p\to 2}\frac{d^2}{dp^2}\frac{e^{-(p-2)}(p-2)^3e^{pt}}{(p-2)^3}H(t-1)=H(t-1)e^{2t}\frac{(t-1)^2}{2}$$

Anche se non era richiesto nel compito, per completezza verifichiamo le condizioni iniziali

$$x'(t)=\underbrace{(H(t-1))'}_{=\delta(t-1)}e^{2t}\frac{(t-1)^2}{2}+H(t-1)\left(e^{2t}(t-1)^2+e^{2t}(t-1)\right)=H(t-1)\left(e^{2t}(t-1)^2+e^{2t}(t-1)\right)$$

e chiaramente $x(0)=x'(0)=0$

Sempre per completezza verifichiamo che la soluzione trovata soddisfa effettivamente l'equazione differenziale.

$$x''(t)=\delta(t-1)\left(e^{2t}(t-1)^2+e^{2t}(t-1)\right)+H(t-1)\left(2e^{2t}(t-1)^2+2e^{2t}(t-1)+2e^{2t}(t-1)+e^{2t}\right)$$

ossia

$$x''(t)=H(t-1)\left(2e^{2t}(t-1)^2+2e^{2t}(t-1)+2e^{2t}(t-1)+e^{2t}\right)$$

ed è facile verificare quanto detto

6) Figura a sinistra. Il sostegno della curva è una sorta di spirale il cui raggio istantaneo è $1+t/(2\pi)$ che comincia nel punto $(1,0)$ e finisce nel punto $(2,0)$ e gira intorno al punto $(0,1)$. Se alla curva aggiungiamo il pezzetto che da $(2,0)$ arriva a $(1,0)$ otteniamo una curva chiusa il cui integrale curvilineo vale 2π (la forma è chiusa e la curva gira intorno a $(0,1)$ per cui possiamo calcolare l'integrale curvilineo scegliendo la curva $x=\varepsilon\cos t$, $y=1+\varepsilon\sin t$ con ε piccolo quanto vogliamo. Si è usato Gauss–Green).

Il risultato finale sarà quindi ($\underline{\sigma}=(-t,0)$ $-2\leq t\leq -1$.)

$$2\pi-\int_{\underline{\sigma}}\omega=2\pi-\int_{-2}^{-1}\frac{-dt}{t^2+1}=2\pi-(\arctan(1)-\arctan 2)=\frac{7\pi}{4}+\arctan 2$$

6.1) Stessa dimostrazione del punto 4.1).

Seconda soluzione. Se disegnamo un intorno tubolare che non si autointerseca della curva e che *non contenga* il punto $(0,1)$, tale insieme sarebbe semplicemente connesso e quindi la forma lì dentro è esatta. Per calcolare l'integrale scegliamo allora il seguente cammino (sono i segmenti di retta congiungenti i cinque punti in cui la curva interseca gli assi) che immaginiamo stia dentro l'intorno tubolare

$$\underline{\gamma}_1(t) = (-t, \frac{5t+5}{4}), \quad -1 \le t \le 0, \qquad \underline{\gamma}_2(t) = (-t, \frac{5}{4} + \frac{-5t}{6}), \quad 0 \le t \le \frac{3}{2}$$
$$\underline{\gamma}_3(t) = (t, -\frac{7}{4} - \frac{7t}{6}), \quad \frac{-3}{2} \le t \le 0, \qquad \underline{\gamma}_4 = (t, \frac{-7}{4} + \frac{7t}{8}), \quad 0 \le t \le 2$$

La somma dei quattro integrali curvilinei dà

$$\arctan\frac{5}{4} + \arctan 9, \quad \arctan\frac{28}{3} + \arctan\frac{5}{6}, \quad \arctan\frac{7}{6} + \arctan\frac{4}{33}, \quad \arctan\frac{9}{22} + \arctan\frac{7}{8}$$

Dalla pagina https://it.wikipedia.org/wiki/Arcotangente traiamo le regole per la somma degli architangenti ed otteniamo

$$-\frac{\pi}{4} + \pi - \arctan\frac{3}{2} + \pi + \arctan\frac{3}{2} + \arctan 2 = \frac{7\pi}{4} + \arctan 2$$

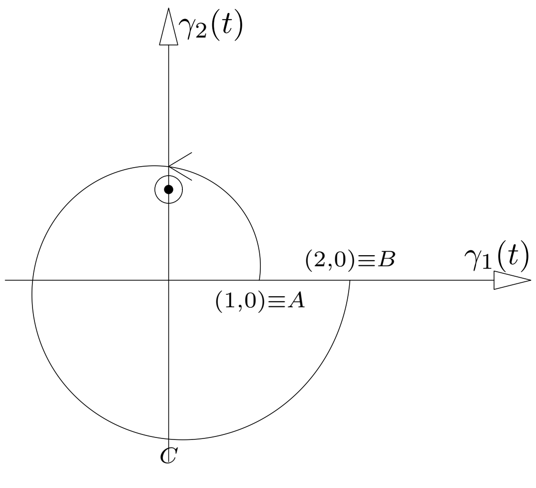
Osservazione L'insieme in cui giace la curva non è semplicemente connesso. Infatti la curva $x = \varepsilon\cos t$, $y = 1 + \varepsilon\sin t$ non può essere ridotta ad un punto qualsiasi senza passare da $(0,1)$ che non fa parte del dominio della forma. Gli studenti verifichino la differenza con l'esercizio del 22/6/2016. Lì la curva giaceva nel semipiano superiore

Terza soluzione

$$U(x,y) = \begin{cases} \arctan\dfrac{y-1}{x}, & x > 0, \\ \pi + \arctan\dfrac{y-1}{x}, & x < 0, \\ \pi/2, & x = 0, y > 1 \end{cases}$$

è una funzione differenziabile nel piano ad eccezione del semiasse $(-\infty, 1]$ delle ordinate. Sia $\lim\limits_{(x,y)\to(0^-,-7/4)} U(x,y) = \frac{3\pi}{2}$ $\lim\limits_{(x,y)\to(0^+,-7/4)} U(x,y) = \frac{-\pi}{2}$. Ne segue che il valore dell'integrale è

$$\frac{3\pi}{2} - U(1,0) + U(2,0) - (\frac{-\pi}{2}) = 2\pi - \arctan(-1) + \arctan\frac{-1}{2} = 2\pi + \frac{\pi}{4} + \arctan 2 - \frac{\pi}{2} = \frac{7\pi}{4} + \arctan 2$$



La giustificazione dell'uso dei limiti nella risoluzione dell'esercizio è la seguente.

$$\int_{\underline{\gamma}} \omega = \int_{\underline{\gamma}_{AC}} \omega + \int_{\underline{\gamma}_{CB}} \omega = \int_0^{\frac{3\pi}{2}} (\alpha(\underline{\gamma}(t))\gamma_1' + \beta(\underline{\gamma}(t))\gamma_2')dt + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} (\alpha(\underline{\gamma}(t))\gamma_1' + \beta(\underline{\gamma}(t))\gamma_2')dt =$$

$$= \lim_{t\to \frac{3\pi}{2}^-} \int_0^t (\alpha(\underline{\gamma}(t))\gamma_1' + \beta(\underline{\gamma}(t))\gamma_2')dt + \lim_{t\to \frac{3\pi}{2}^+} \int_t^{2\pi} (\alpha(\underline{\gamma}(t))\gamma_1' + \beta(\underline{\gamma}(t))\gamma_2')dt$$

L'ultima uguaglianza deriva dalla continuità dell'integrale di Riemann rispetto agli estremi superiori. Infatti

$$\left| \int_a^b f(x)dx - \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx \right| = \left| \int_{b-\varepsilon}^b f(x)dx \right| \leq \sup_{b-\varepsilon\leq x\leq b} |f(x)|\varepsilon$$

e mandando $\varepsilon \to 0$ si ha zero. La quantità $\sup\limits_{b-\varepsilon\leq x\leq b} |f(x)|$ è finita un quanto esiste un teorema che afferma: Se una funzione è integrabile secondo Riemann è limitata. Nel nostro caso comunque le funzioni da integrare sono date $(\alpha(\underline{\gamma}(t))\gamma_1' + \beta(\underline{\gamma}(t))\gamma_2')$ e sono limitate.

Ora $\int_0^t (\alpha(\underline{\gamma}(t))\gamma_1' + \beta(\underline{\gamma}(t))\gamma_2')dt = U(\underline{\gamma}(t)) - U(A)$ e quindi $\lim\limits_{t\to \frac{3\pi}{2}^-} \int_0^t (\alpha(\underline{\gamma}(t))\gamma_1' + \beta(\underline{\gamma}(t))\gamma_2')dt = \lim\limits_{t\to \frac{3\pi}{2}^-} U(\underline{\gamma}(t)) - U(A)$. Poiché esiste $\lim\limits_{(x,y)\to(0^-,-7/4)} U(x,y)$ esso è uguale a $\lim\limits_{t\to \frac{3\pi}{2}^-} U(\underline{\gamma}(t))$ da cui il risultato

Analisi II per Ingegneria Elettronica&Internet, Informatica (frontale e online)
21–01–2019 A.A. 2018/2019, Sessione Invernale, primo appello (B)

Nome(Stampatello) **Cognome**(Stampatello) **Matricola**

Inserire il presente foglio nel foglio protocollo

Le risposte vanno motivate sul foglio protocollo. Se immotivate, ancorché esatte, non verranno prese in considerazione.

Gli studenti di **Elettronica&Internet** risolvano gli esercizi 1,2,3,4,4.1. Gli studenti di **Informatica** risolvano gli esercizi 2,3,5,6,6.1.

1) (7.5 punti) Si risolva l'equazione differenziale
$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 1, \quad x > 0, t > 0 \\ u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = A\omega,\ u(0,t) = B\sin(\lambda t), \quad x \geq 0, t \geq 0 \end{cases}$

2) (7.5 punti) Si calcoli il volume compreso fra i due parabolidi $z = x^2 + y^2 - 2x$ e $z = -x^2 - y^2 + 2x - 1$

3) (7.5 punti) Si calcoli l'integrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{-3x + x^2}{x^4 + 4} = 0$ per disparità della funzione. È un buon esercizio verificare con il teorema dei residui. Nella formula che segue Il cammino è quello a pagina 41 delle dispense di Tauraso.

4) (7.5 punti) Si calcoli l'integrale curvilineo $\displaystyle\int_\gamma \omega$ dove γ è la curva il cui sostegno è dato dall'insieme $z = x^2 + y^2 - 2x$ e $z = -x^2 - y^2 + 2x - 1$. La curva è percorsa in modo che la sua proiezione sul piano (x, y) è percorsa in senso antiorario. Inoltre $\omega = (\frac{1}{3}x^3 - x^2 + x - \frac{1}{3} - 2y^2 x + 2y^2)dy + (y - xy)dz$

4.1) (3 punti) Dimostrare che la curva data è regolare

5) (7.5 punti) Si risolva l'equazione differenziale

$$x'' + 4x' + 4x = H(t-1)e^{-2t}, \quad x(0) = 0 \quad x'(0) = 0$$

6) (7.5 punti) Sia data la curva (regolare) $\gamma_1(t) = \left(1 + \frac{t}{2\pi}\right)\cos t$, $\gamma_2(t) = \left(1 + \frac{t}{2\pi}\right)\sin t$, $\pi/2 \leq t \leq 5\pi/2$. Si calcoli $\displaystyle\int_{\underline{\gamma}} \omega$ dove $\underline{\gamma}$ e $\omega = \dfrac{-(y-1)dx + xdy}{x^2 + (y-1)^2}$

6.1) (3 punti) Si dimostri che la precedente curva è regolare

Soluzioni compito B

1) . In trasformata di Laplace Sia $\mathcal{L}(u(x,t)) \doteq Y(p,x)$.

$$\mathcal{L}(u_t(x,t)) = pY(p,x) - u(x,0) = pY(p,x), \qquad \mathcal{L}(u_{tt}(x,t)) \doteq p^2 Y(p,x) - A\omega$$

$$\mathcal{L}(u_{xx}(x,t)) = Y_{xx}(p,x), \quad \mathcal{L}(u(0,t)) = \frac{B\lambda}{p^2 + \lambda^2} = Y(p,0)$$

ed otteniamo

$$p^2Y(p,x) - a^2Y_{xx}(p,x) = \frac{1}{p} + A\omega,\ Y(p,0) = \frac{B\lambda}{p^2+\lambda^2}$$

La variabile rispetto a cui risolvere la precedente equazione differenziale ordinaria è la x e quindi

$$Y(p,x) = \alpha e^{\frac{p}{a}x} + \beta e^{\frac{-p}{a}x} + \frac{1}{p^3} + \frac{A\omega}{p^2}$$

Sul giornale delle lezioni è spiegato perché bisogna prendere $\alpha = 0$. La costante β è fissata dalla condizione

$$Y(p,0) = \beta + \frac{1}{p^3} + \frac{A\omega}{p^2} = \frac{B\lambda}{p^2+\omega^2} \implies \beta = \frac{-1}{p^3} + \frac{-A\omega}{p^2} + \frac{B\lambda}{p^2+\lambda^2}$$

e quindi

$$Y(p,x) = \left(\frac{-1}{p^3} + \frac{-A\omega}{p^2} + \frac{B\lambda}{p^2+\lambda^2}\right) e^{\frac{-p}{a}x} + \frac{1}{p^3} + \frac{A\omega}{p^2}$$

$$(\mathcal{L}^{-1}Y(p,x)) = u(x,t) = H(t-\frac{x}{a})\left(\frac{-1}{2}(t-\frac{x}{a})^2 - A\omega(t-\frac{x}{a}) + B\sin\lambda(t-\frac{x}{a})\right) + \frac{t^2}{2} + A\omega t$$

Giusto per completezza, verifichiamo le condizioni iniziali

$$u(x,0) = H(-\frac{x}{a})\left(\frac{-1}{2}(-\frac{x}{a})^2 - A\omega(-\frac{x}{a}) + B\lambda\sin\lambda(-\frac{x}{a})\right) = 0$$

$$\begin{aligned} u_t(x,0) = &\left[\left(H(t-\frac{x}{a})\right)'\left(\frac{-1}{2}(t-\frac{x}{a})^2 - A\omega(t-\frac{x}{a}) + B\lambda\sin\lambda(t-\frac{x}{a})\right)\right]_{t=0} + \\ &+ H(0-\frac{x}{a})\left(\frac{-1}{2}(t-\frac{x}{a})^2 - A\omega(t-\frac{x}{a}) + B\lambda\sin\lambda(t-\frac{x}{a})\right)' + A\omega = \\ &= \left[\delta(t-\frac{x}{a})\left(\frac{-1}{2}(t-\frac{x}{a})^2 - A\omega(t-\frac{x}{a}) + B\lambda\omega\sin\lambda(t-\frac{x}{a})\right)\right]_{t=0} + A\omega = A\omega \end{aligned}$$

L'argomento della parentesi quadra va calcolato per $t = x/a$ e quindi vale zero.

$$u(0,t) = H(t)\left(\frac{-t^2}{2} - A\omega t + B\cos\lambda t\right) + \frac{t^2}{2} + A\omega t = B\lambda\sin\lambda t$$

Verifichiamo pure che la soluzione trovata soddisfa effettivemente l'equazione. Non c'è praticamente bisogno di fare conti dopo avere osservato che a parte i due tremini alla fine, la soluzione ha come argomento $t - x/a$. In generale

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(t-\frac{x}{a}) = a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(t-\frac{x}{a})$$

2) L'intersezione delle due superfici dà $(x-1)^2 + y^2 = 1/2$, e $z = -1/2$

Il volume è dato da $\displaystyle\iint_{(x-1)^2+y^2\le 1/2} dxdy \int_{x^2+y^2-2x}^{-x^2-y^2+2x-1} dz = \iint_{(x-1)^2+y^2\le 1/2} dxdy(-2x^2 -$ $2y^2 + 4x - 1)$ e passando a coordinate polari nel piano $x = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\rho\cos t$, $y = \frac{1}{\sqrt{2}}\rho\sin t$, si ottiene $\displaystyle\int_0^1 d\rho \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\rho(1-\rho^2)dt = \pi(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}) = \frac{\pi}{4}$

Alcuni studenti hanno osservato che il primo è un paraboloide rivolto verso l'alto ed il secondo verso il basso. Poi hanno osservato che sostituendo $(0,0)$ nel primo si ottiene 0 e -1 nel secondo. Ciò li ha portati a concludere che non esisteva intersezione fra i due paraboloidi e quindi non c'era volume da calcolare. In realtà l'ordinata del primo paraboloide in $(1,0)$ è -1 mentre l'ordinata del secondo è 0. L'origine degli assi non è il punto giusto rispetto a cui confrontare i due paraboloidi ma lo è il centro della circonferenza che costituisce l'intersezione dei due paraboloidi

Seconda e terza soluzione Si veda il compito A. Da un punto di vista geometrico le considerazioni solo le stesse.

3) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{-3x}{x^4+4} = 0$ per disparità della funzione. È un buon esercizio verificare con il teorema dei residui. Nella formula che segue Il cammino è quello a pagina 41 delle dispense di Tauraso.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{x^2}{x^4+4} = 2\pi i \text{Res}\left(\frac{z^2}{z^4+4}\right)\Big|_{z_0=\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}} + 2\pi i \text{Res}\left(\frac{z^2}{z^4+4}\right)\Big|_{z_1=\sqrt{2}e^{\frac{i3\pi}{4}}}$$

$$\text{Res}\left(\frac{z^2}{z^4+4}\right)\Big|_{z_0=\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}} = \lim_{z\to z_0}\frac{(z-z_0)z^2}{z^4+4} = \lim_{z\to z_0}\frac{z^2}{4z^3} = \lim_{z\to z_0}\frac{1}{4z} = \frac{1}{4\sqrt{2}}e^{\frac{-i\pi}{4}}$$

$$\text{Res}\left(\frac{z^2}{z^4+4}\right)\Big|_{z_0=\sqrt{2}e^{\frac{3i\pi}{4}}} = \lim_{z\to z_0}\frac{(z-z_0)z^2}{z^4+4} = \lim_{z\to z_0}\frac{z^2}{4z^3} = \lim_{z\to z_0}\frac{1}{4z} = \frac{1}{4\sqrt{2}}e^{\frac{-i3\pi}{4}}$$

quindi l'integrale è

$$2\pi i\frac{1}{4\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i) + \frac{\sqrt{2}}{2}(-1-i)\right) = \frac{\pi}{2}$$

4) Usando Stokes si può scrivere $\displaystyle\int_\gamma \omega = \iint_{(x-1)^2+y^2\le 1/2} d\sigma(\underline{\text{rot}F}, \underline{n}_e)$ dove $\underline{F}$ è il rotore del campo vettoriale. La normale al piano è $(0,0,1)$.
Il rotore è dato dal vettore $(1-x, y, (x-1)^2-2y^2)$. La superficie è il piano $z=z_0$ opportuno e quindi l'integrale è $\displaystyle\iint_{(x-1)^2+y^2\le 1/2} dx\,dy\,((x-1)^2-2y^2) = -\frac{\pi}{16}$

4.1) La curva evidentemente è

$$x = 1+\frac{\cos t}{\sqrt{2}} \quad y = \frac{\sin t}{\sqrt{2}} \quad z = (x-1)^2+y^2 = \frac{3}{2}$$

$$x' = -\frac{\sin t}{\sqrt{2}} \quad y' = \frac{\cos t}{\sqrt{2}} \quad z' = 0 \implies (x')^2+(y')^2 = \frac{1}{2}$$

per cui nessun valore di t può soddisfare $(x', y') = (0,0)$.

5) Detta $X(p) = \mathcal{L}(x)$ abbiamo

$$X(p)(p+2)^2 = \frac{e^{-(p+2)}}{p+2} \quad X(p) = \frac{e^{-(p+2)}}{(p+2)^3}$$

$$x(t) = \frac{1}{2}\lim_{p\to-2}\frac{d^2}{dp^2}\frac{e^{-(p+2)}(p+2)^3e^{pt}}{(p+2)^3}H(t-1) = H(t-1)e^{-2t}\frac{(t-1)^2}{2}$$

6) Prima dimostrazione Il sostegno della curva è una sorta di spirale il cui raggio istantaneo è $1+t/(2\pi)$ che comincia nel punto $(0,5/4)$ e finisce nel punto $(0,9/4)$ e gira intorno al punto $(0,1)$. Se alla curva aggiungiamo il pezzetto che da $(0,9/4)$ arriva a $(0,5/4)$ otteniamo una curva chiusa il cui integrale curvilineo vale 2π (la forma è chiusa e la curva gira intorno a $(0,1)$ per cui possiamo calcolare l'integrale curvilineo scegliendo la curva $x=\varepsilon\cos t$, $y=1+\varepsilon\sin t$ con ε piccolo quanto vogliamo. Abbiamo usato Gauss–Green).
Il risultato finale sarà quindi ($\underline{\sigma}=(0,t)$ $-9/4\le t\le -5/4$.)

$$2\pi-\int_{\underline{\sigma}}\omega=2\pi-\int_{-9/4}^{-5/4}\frac{-dt\cdot 0}{t^2+1}=2\pi$$

Seconda dimostrazione Se disegnassimo un intorno tubolare che non si autointerseca della curva e che *non contenga* il punto $(0,1)$, tale insieme sarebbe semplicemente connesso e quindi la forma lì dentro è esatta. Per calcolare l'integrale scegliamo allora il seguente cammino (sono i segmenti di retta congiungenti i cinque punti in cui la curva interseca gli assi) che immaginiamo stia dentro l'intorno tubolare

$$\underline{\gamma}_1(t)=(\frac{-3t}{2},\frac{5}{4}(1-t)),\quad 0\le t\le 1,\qquad \underline{\gamma}_2(t)=(\frac{-3}{2}(1-t),\frac{-7t}{4}),\quad 0\le t\le 1,$$
$$\underline{\gamma}_3(t)=(2t,-\frac{7}{4}(t-1)),\quad 0\le t\le 1,\qquad \underline{\gamma}_4=(2(1-t),\frac{9t}{4}),\quad 0\le t\le 1$$

I quattro integrali curvilinei danno rispettivamente

$$\arctan\frac{28}{3}+\arctan\frac{5}{6},\quad \arctan\frac{7}{6}+\arctan\frac{4}{33},\quad \arctan\frac{9}{22}+\arctan\frac{7}{8},\quad \arctan\frac{9}{8}+\arctan\frac{5}{2}$$

Dalla pagina https://it.wikipedia.org/wiki/Arcotangente traiamo le regole per la somma degli architangenti ed otteniamo come risultato 2π.

Terza soluzione Si può verificare che la funzione

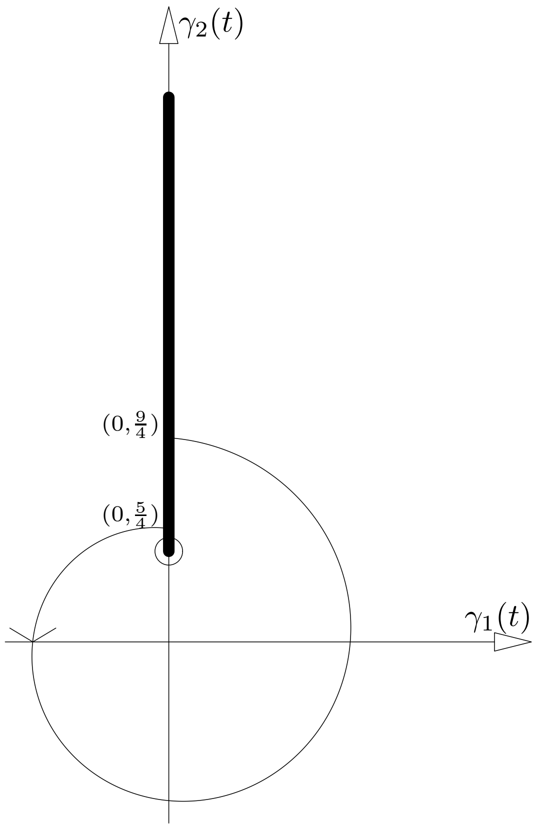
$$U(x,y)=\begin{cases}\arctan\dfrac{y-1}{x}, & x>0,\\ -\pi+\arctan\dfrac{y-1}{x}, & x<0,\\ -\pi/2, & x=0, y<0\end{cases}$$

è una funzione differenziabile nel piano ad eccezione del semiasse positivo delle ordinate. Il risultato è quindi

$$\lim_{\substack{\underline{x}\to(0,\frac{9}{4})\\ x>0}}U(x,y)-\lim_{\substack{\underline{x}\to(0,\frac{9}{4})\\ x<0}}U(x,y)=\frac{\pi}{2}-\left(-\pi-\frac{\pi}{2}\right)=2\pi$$

La differenza con le versioni A), C), D) è che il “segmentino” che chiude il cammino giace sull'asse del y.

Osservazione L'insieme in cui giace la curva non è semplicemente connesso. Infatti la curva $x=\varepsilon\cos t$, $y=1+\varepsilon\sin t$ con ε non può essere ridotta ad un punto qualsiasi senza passare da $(0,1)$ che non fa parte del dominio della forma. Gli studenti verifichino la differenza con l'esercizio del 22/6/2016. Lì la curva giaceva nel semipiano superiore. Se invece considero il piano tranne il segmento infinito in grassetto, allora tale insieme è semplicemente connesso ed è facile trovare il potenziale a differenza degli altri compiti.



6.1) Stessa dimostrazione del punto 4.1).

Analisi II per Ingegneria Elettronica&Internet, Informatica (frontale e online)
21–01–2019 A.A. 2018/2019, Sessione Invernale, primo appello (C)

Nome(Stampatello) **Cognome**(Stampatello) **Matricola**

Inserire il presente foglio nel foglio protocollo

Le risposte vanno motivate sul foglio protocollo. Se immotivate, ancorché esatte, non verranno prese in considerazione.

Gli studenti di **Elettronica&Internet** risolvano gli esercizi 1,2,3,4,4.1. Gli studenti di **Informatica** risolvano gli esercizi 2,3,5,6,6.1.

1) (7.5 punti) Si risolva l'equazione differenziale
$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 1, \quad x > 0, t > 0 \\ u(x,0) = A,\ u_t(x,0) = 0,\ u(0,t) = A\cos(\omega t), \quad x \geq 0, t \geq 0 \end{cases}$

2) (7.5 punti) Si calcoli il volume compreso fra i due paraboloidi $z = x^2 + y^2 + 2y + 2$ e $z = -x^2 - y^2 - 2y + 1$

3) (7.5 punti) Si calcoli l'integrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{-3x + x^2}{x^4 + 16} = 0$ per disparità della funzione. È un buon esercizio verificare con il teorema dei residui. Nella formula che segue Il cammino è quello a pagina 41 delle dispense di Tauraso.

4) (7.5 punti) Si calcoli l'integrale curvilineo $\displaystyle\int_\gamma \omega$ dove γ è la curva il cui sostegno è dato dall'insieme $z = x^2 + y^2 + 2y + 2$ e $z \leq -x^2 - y^2 - 2y + 1$. La curva è percorsa in modo che la sua proiezione sul piano (x,y) è percorsa in senso antiorario. Inoltre $\omega = (\frac{1}{3}x^3 - 2xy^2 - 4xy - 2x)dy - (x + xy)dz$

4.1) (3 punti) Dimostrare che la curva data è regolare

5) (7.5 punti) Si risolva l'equazione differenziale

$$x'' - 6x' + 9x = H(t-1)e^{3t}, \quad x(0) = 0 \quad x'(0) = 0$$

6) (7.5 punti) Sia data la curva (regolare) $\gamma_1(t) = \left(1 + \dfrac{t}{2\pi}\right)\cos t,\ \gamma_2(t) = \left(1 + \dfrac{t}{2\pi}\right)\sin t$, $\pi \leq t \leq 3\pi$. Si calcoli $\displaystyle\int_{\underline{\gamma}} \omega$ dove $\underline{\gamma}$ e $\omega = \dfrac{-(y-1)dx + xdy}{x^2 + (y-1)^2}$

6.1) (3 punti) Si dimostri che la precedente curva è regolare

1) . In trasformata di Laplace Sia $\mathcal{L}(u(x,t)) \doteq Y(p,x)$.

$$\mathcal{L}(u_t(x,t)) = pY(p,x) - u(x,0) = pY(p,x) - A, \qquad \mathcal{L}(u_{tt}(x,t)) \doteq p^2 Y(p,x) - pA$$

$$\mathcal{L}(u_{xx}(x,t)) = Y_{xx}(p,x), \quad \mathcal{L}(u(0,t)) = \frac{Ap}{p^2 + \omega^2} = Y(p,0)$$

ed otteniamo
$$p^2Y(p,x) - a^2Y_{xx}(p,x) = \frac{1}{p} + pA,\ Y(p,0) = \frac{Ap}{p^2+\omega^2}$$
La variabile rispetto a cui risolvere la precedente equazione differenziale ordinaria è la x e quindi
$$Y(p,x) = \alpha e^{\frac{p}{a}x} + \beta e^{\frac{-p}{a}x} + \frac{1}{p^3} + \frac{A}{p}$$
Sul giornale delle lezioni è spiegato perché bisogna prendere $\alpha = 0$. La costante β è fissata dalla condizione
$$Y(p,0) = \beta + \frac{1}{p^3} + \frac{A}{p} = \frac{Ap}{p^2+\omega^2} \implies \beta = \frac{-1}{p^3} + \frac{-A}{p} + \frac{Ap}{p^2+\omega^2}$$
e quindi
$$Y(p,x) = \left(\frac{-1}{p^3} + \frac{-A}{p} + \frac{Ap}{p^2+\omega^2}\right)e^{\frac{-p}{a}x} + \frac{1}{p^3} + \frac{A}{p}$$
$$(\mathcal{L}^{-1}Y(p,x)) = u(x,t) = H(t-\frac{x}{a})\left(\frac{-1}{2}(t-\frac{x}{a})^2 - A + A\cos\omega(t-\frac{x}{a})\right) + \frac{t^2}{2} + A$$
Giusto per completezza, verifichiamo le condizioni iniziali
$$u(x,0) = H(-\frac{x}{a})\left(\frac{-1}{2}(-\frac{x}{a})^2 - A + A\cos\omega(-\frac{x}{a})\right) + A = A$$
$$u_t(x,0) = \left[\left(H(t-\frac{x}{a})\right)'\left(\frac{-1}{2}(t-\frac{x}{a})^2 - A + A\cos\omega(t-\frac{x}{a})\right)\right]_{t=0} +$$
$$+ H(0-\frac{x}{a})\left(\frac{-1}{2}(t-\frac{x}{a})^2 - A + A\cos\omega(t-\frac{x}{a})\right)' =$$
$$= \left[\delta(t-\frac{x}{a})\left(\frac{-1}{2}(t-\frac{x}{a})^2 - A + A\cos\omega(t-\frac{x}{a})\right)\right]_{t=0} = 0$$
L'argomento della parentesi quadra va calcolato per $t = x/a$ e quindi vale zero.
$$u(0,t) = H(t)\left(\frac{-t^2}{2} - A + A\cos\omega t\right) + \frac{t^2}{2} + A = A\cos\omega t$$
Verifichiamo pure che la soluzione trovata soddisfa effettivamente l'equazione. Non c'è praticamente bisogno di fare conti dopo avere osservato che a parte i due tremini alla fine, la soluzione ha come argomento $t - x/a$. In generale
$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(t-\frac{x}{a}) = a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(t-\frac{x}{a})$$

2) L'intersezione delle due superfici dà $x^2 + (y+1)^2 = 1/2$, e $z = 3/2$

Il volume è dato da $\displaystyle\iint_{x^2+(y+1)^2\le 1/2} dxdy \int_{x^2+y^2+2y+2}^{-x^2-y^2-2y+1} dz = \iint_{x^2+(y+1)^2\le 1/2} dxdy(-2x^2 - 2y^2 - 4y - 1)$ e passando a coordinate polari nel piano $x = \frac{1}{\sqrt{2}}\rho\cos t$, $y = -1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\rho\sin t$, si ottiene $\displaystyle\int_0^1 d\rho \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\rho(1-\rho^2)dt = \pi(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}) = \frac{\pi}{4}$

Alcuni studenti hanno osservato che il primo è un paraboloide rivolto verso l'alto ed il secondo verso il basso. Poi hanno osservato che sostituendo $(0,0)$ nel primo si ottiene 2 e 1 nel secondo. Ciò li ha portati a concludere che non esisteva intersezione fra i due paraboloidi e quindi non c'era volume da calcolare. In realtà l'ordinata del primo paraboloide in $(0,-1)$ è 1 mentre l'ordinata del secondo è 2. L'origine degli assi non è il punto giusto rispetto a cui confrontare i due paraboloidi ma lo è il centro della circonferenza che costituisce l'intersezione dei due paraboloidi

Seconda e terza soluzione Si veda il compito A. Da un punto di vista geometrico le considerazioni solo le stesse.

3) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{-3x}{x^4+16}$ per disparità della funzione.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{x^2}{x^4+16} = 2\pi i \text{Res}\left(\frac{z^2}{z^4+16}\right)\Big|_{z_0=2e^{\frac{i\pi}{4}}} + 2\pi i \text{Res}\left(\frac{z^2}{z^4+16}\right)\Big|_{z_1=2e^{\frac{i3\pi}{4}}}$$

$$\text{Res}\left(\frac{z^2}{z^4+16}\right)\Big|_{z_0=2e^{\frac{i\pi}{4}}} = \lim_{z\to z_0} \frac{(z-z_0)z^2}{z^4+4} = \lim_{z\to z_0} \frac{z^2}{4z^3} = \lim_{z\to z_0} \frac{1}{4z} = \frac{1}{8}e^{\frac{-i\pi}{4}}$$

$$\text{Res}\left(\frac{z^2}{z^4+16}\right)\Big|_{z_0=2e^{\frac{3i\pi}{4}}} = \lim_{z\to z_0} \frac{(z-z_0)z^2}{z^4+16} = \lim_{z\to z_0} \frac{z^2}{4z^3} = \lim_{z\to z_0} \frac{1}{4z} = \frac{1}{8}e^{\frac{-i3\pi}{4}}$$

quindi l'integrale è

$$2\pi i \frac{1}{8}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i) + \frac{\sqrt{2}}{2}(-1-i)\right) = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}$$

4) Usando Stokes si può scrivere $\displaystyle\int_\gamma \omega = \iint_{(x-1)^2+y^2\le 1/2} d\sigma(\underline{\text{rot}F}, \underline{n}_e)$ dove $\underline{F}$ è il rotore del campo vettoriale. La normale al piano è $(0,0,1)$.
Il rotore è dato dal vettore $(-x, 1+y, x^2-2y^2-4y-2)$. La superficie è il piano $z=z_0$ opportuno e quindi l'integrale è $\displaystyle\iint_{x^2+(y+1)^2\le 1/2} dx\,dy\,(x^2-2(y+1)^2) = -\frac{\pi}{16}$

4.1) La curva evidentemente è

$$x = \frac{\cos t}{\sqrt{2}} \quad y = -1 + \frac{\sin t}{\sqrt{2}} \quad z = (x-1)^2 + y^2 = \frac{3}{2}$$

$$x' = -\frac{\sin t}{\sqrt{2}} \quad y' = \frac{\cos t}{\sqrt{2}} \quad z' = 0 \implies (x')^2 + (y')^2 = \frac{1}{2}$$

per cui nessun valore di t può soddisfare $(x', y') = (0,0)$.

5) Detta $X(p) = \mathcal{L}(x)$ abbiamo

$$X(p)(p-3)^2 = \frac{e^{-(p-3)}}{p-3} \quad X(p) = \frac{e^{-(p-3)}}{(p-3)^3}$$

$$x(t) = \frac{1}{2}\lim_{p\to 3} \frac{d^2}{dp^2} \frac{e^{-(p-3)}(p-3)^3 e^{pt}}{(p-3)^3} H(t-1) = H(t-1)e^{-3t}\frac{(t-1)^2}{2}$$

6) Prima dimostrazione Il sostegno della curva è una sorta di spirale il cui raggio istantaneo è $1+t/(2\pi)$ che comincia nel punto $(-3/2, 0)$ e finisce nel punto $(-5/2, 0)$ e gira intorno al punto

$(0,1)$. Se alla curva aggiungiamo il pezzetto che da $(-5/2,0)$ arriva a $(-3/2,0)$ otteniamo una curva chiusa il cui integrale curvilineo vale 2π (la forma è chiusa e la curva gira intorno a $(0,1)$ per cui possiamo calcolare l'integrale curvilineo scegliendo la curva $x=\varepsilon\cos t$, $y=1+\varepsilon\sin t$ con ε piccolo quanto vogliamo. Abbiamo usato Gauss–Green).

Il risultato finale sarà quindi ($\underline{\sigma}=(-t,0)$ $-5/2\le t\le -3/2$.)

$$2\pi-\int_{\underline{\sigma}}\omega=2\pi-\int_{-5/2}^{-3/2}\frac{dt}{t^2+1}=2\pi+\arctan(3/2)-\arctan 5/2)=$$

Seconda dimostrazione Se disegnassimo un intorno tubolare che non si autointerseca della curva e che *non contenga* il punto $(0,1)$, tale insieme sarebbe semplicemente connesso e quindi la forma lì dentro è esatta. Per calcolare l'integrale scegliamo allora il seguente cammino (sono i segmenti di retta congiungenti i cinque punti in cui la curva interseca gli assi) che immaginiamo stia dentro l'intorno tubolare

$$\underline{\gamma}_1(t)=(\frac{-3}{2}(1-t)),\frac{-7}{4}t,\quad 0\le t\le 1,\qquad \underline{\gamma}_2(t)=(3t\frac{-7}{4}(1-t)),\quad 0\le t\le 1,$$
$$\underline{\gamma}_3(t)=(3(1-t),\frac{9a}{4}),\quad 0\le t\le 1,\qquad \underline{\gamma}_4=(\frac{-5t}{2},\frac{9}{4}(1-t)),\quad 0\le t\le 1$$

La somma degli integrali curvilinei dà

$$\arctan\frac{7}{6}+\arctan\frac{4}{33}+\arctan\frac{29}{33}+\arctan\frac{7}{12}+\arctan\frac{3}{4}+\arctan 3+\arctan\frac{68}{25}+\arctan\frac{9}{10}$$

Dalla pagina https://it.wikipedia.org/wiki/Arcotangente traiamo le regole per la somma degli architangenti ed otteniamo il risultato già trovato

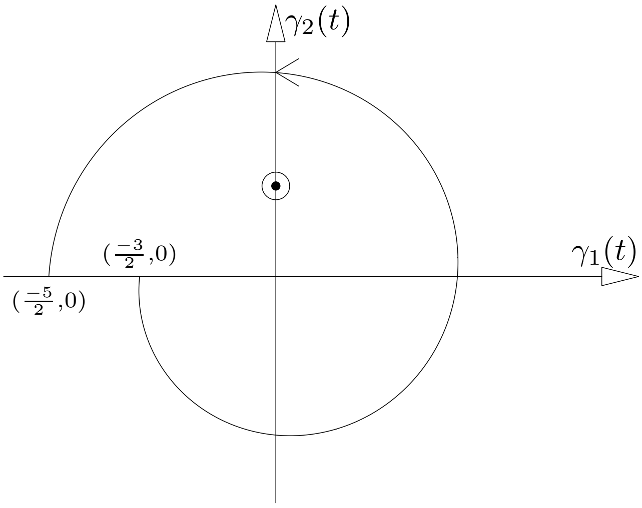
Osservazione L'insieme in cui giace la curva non è semplicemente connesso. Infatti la curva $x=\varepsilon\cos t$, $y=1+\varepsilon\sin t$ con ε non può essere ridotta ad un punto qualsiasi senza passare da $(0,1)$ che non fa parte del dominio della forma. Gli studenti verifichino la differenza con l'esercizio del 22/6/2016. Lì la curva giaceva nel semipiano superiore

Terza soluzione

$$U(x,y)=\begin{cases}\arctan\dfrac{y-1}{x}, & x>0,\\ \pi+\arctan\dfrac{y-1}{x}, & x<0,\\ \pi/2, & x=0,y>1\end{cases}$$

è una funzione differenziabile nel piano ad eccezione del semiasse $[1,-\infty)$ delle ordinate. Sia $\lim\limits_{(x,y)\to(0^-,-3/2)}U(x,y)=\dfrac{3\pi}{2}$ $\lim\limits_{(x,y)\to(0^+,-3/2)}U(x,y)=\dfrac{-\pi}{2}$. Ne segue che il valore dell'integrale è

$$\frac{3\pi}{2}-U(\frac{-3}{2},0)+U(\frac{-5}{2},0)-(\frac{-\pi}{2})=2\pi-\arctan\frac{2}{3}+\arctan\frac{2}{5}=2\pi+\arctan\frac{3}{2}-\arctan\frac{5}{2}$$



6.1) Stessa dimostrazione del punto 4.1).

Analisi II per Ingegneria Elettronica&Internet, Informatica (frontale e online)
21–01–2019 A.A. 2018/2019, Sessione Invernale, primo appello (D)

Nome(Stampatello) **Cognome**(Stampatello) **Matricola**

Inserire il presente foglio nel foglio protocollo

Le risposte vanno motivate sul foglio protocollo. Se immotivate, ancorché esatte, non verranno prese in considerazione.

Gli studenti di **Elettronica&Internet** risolvano gli esercizi 1,2,3,4,4.1. Gli studenti di **Informatica** risolvano gli esercizi 2,3,5,6,6.1.

1) (7.5 punti) Si risolva l'equazione differenziale
$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 1 \\ u(x,0) = A,\ u_t(x,0) = 0,\ u(0,t) = A\cos(\lambda t) \end{cases}$$

2) (7.5 punti) Si calcoli il volume compreso fra i due parabolidi $z = x^2 + y^2 + 2y + 2$ e $z = -x^2 - y^2 - 2y + 1$

3) (7.5 punti) Si calcoli l'integrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{-3x + x^2}{x^4 + 9}$

4) (7.5 punti) Si calcoli l'integrale curvilineo $\displaystyle\int_\gamma \omega$ dove γ è la curva il cui sostegno è dato dall'insieme $z = x^2 + y^2 - 2y + 2$ e $z = -x^2 - y^2 + 2y + 1$. La curva è percorsa in modo che la sua proiezione sul piano (x,y) è percorsa in senso antiorario. Inoltre $\omega = (\frac{1}{3}x^3 - 2xy^2 + 4xy - 2x)dy + (x - xy)dz$

4.1) (3 punti) Dimostrare che la curva data è regolare

5) (7.5 punti) Si risolva l'equazione differenziale

$$x'' + 6x' + 9x = H(t-1)e^{-3t}, \quad x(0) = 0 \quad x'(0) = 0$$

6) (7.5 punti) Sia data la curva (regolare) $\gamma_1(t) = \left(1 + \dfrac{t}{2\pi}\right)\cos t$, $\gamma_2(t) = \left(1 + \dfrac{t}{2\pi}\right)\sin t$, $2\pi \le t \le 4\pi$. Si calcoli $\displaystyle\int_{\underline{\gamma}} \omega$ dove $\underline{\gamma}$ e $\omega = \dfrac{-(y-1)dx + xdy}{x^2 + (y-1)^2}$

6.1) (3 punti) Si dimostri che la precedente curva è regolare

1) . In trasformata di Laplace Sia $\mathcal{L}(u(x,t)) \doteq Y(p,x)$.

$$\mathcal{L}(u_t(x,t)) = pY(p,x) - u(x,0) = pY(p,x) - A, \qquad \mathcal{L}(u_{tt}(x,t)) \doteq p^2 Y(p,x) - pA$$

$$\mathcal{L}(u_{xx}(x,t)) = Y_{xx}(p,x), \quad \mathcal{L}(u(0,t)) = \frac{Ap}{p^2+\lambda^2} = Y(p,0)$$

ed otteniamo
$$p^2 Y(p,x) - a^2 Y_{xx}(p,x) = \frac{1}{p} + pA,\ Y(p,0) = \frac{Ap}{p^2+\lambda^2}$$

La variabile rispetto a cui risolvere la precedente equazione differenziale ordinaria è la x e quindi

$$Y(p,x)=\alpha e^{\frac{p}{a}x}+\beta e^{\frac{-p}{a}x}+\frac{1}{p^3}+\frac{A}{p}$$

Sul giornale delle lezioni è spiegato perché bisogna prendere $\alpha=0$. La costante β è fissata dalla condizione

$$Y(p,0)=\beta+\frac{1}{p^3}+\frac{A}{p}=\frac{Ap}{p^2+\lambda^2}\implies \beta=\frac{-1}{p^3}+\frac{-A}{p}+\frac{Ap}{p^2+\lambda^2}$$

e quindi

$$Y(p,x)=\left(\frac{-1}{p^3}+\frac{-A}{p}+\frac{Ap}{p^2+\lambda^2}\right)e^{\frac{-p}{a}x}+\frac{1}{p^3}+\frac{A}{p}$$

$$(\mathcal{L}^{-1}Y(p,x))=u(x,t)=H(t-\frac{x}{a})\left(\frac{-1}{2}(t-\frac{x}{a})^2-A+A\cos\lambda(t-\frac{x}{a})\right)+\frac{t^2}{2}+A$$

Giusto per completezza, verifichiamo le condizioni iniziali

$$u(x,0)=H(-\frac{x}{a})\left(\frac{-1}{2}(-\frac{x}{a})^2-A+A\cos\lambda(-\frac{x}{a})\right)+A=A$$

$$\begin{aligned}u_t(x,0)=&\left[\left(H(t-\frac{x}{a})\right)'\left(\frac{-1}{2}(t-\frac{x}{a})^2-A+A\cos\lambda(t-\frac{x}{a})\right)\right]_{t=0}+\\&+H(0-\frac{x}{a})\left(\frac{-1}{2}(t-\frac{x}{a})^2-A+A\cos\lambda(t-\frac{x}{a})\right)'=\\&=\left[\delta(t-\frac{x}{a})\left(\frac{-1}{2}(t-\frac{x}{a})^2-A+A\cos\lambda(t-\frac{x}{a})\right)\right]_{t=0}=0\end{aligned}$$

L'argomento della parentesi quadra va calcolato per $t=x/a$ e quindi vale zero.

$$u(0,t)=H(t)\left(\frac{-t^2}{2}-A+A\cos\lambda t\right)+\frac{t^2}{2}+A=A\cos\lambda t$$

Verifichiamo pure che la soluzione trovata soddisfa effettivemente l'equazione. Non c'è praticamente bisogno di fare conti dopo avere osservato che a parte i due tremini alla fine, la soluzione ha come argomento $t-x/a$. In generale

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(t-\frac{x}{a})=a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(t-\frac{x}{a})$$

2) L'intersezione delle due superfici dà $x^2+(y+1)^2=1/2$, e $z=3/2$

Il volume è dato da $\displaystyle\iint_{x^2+(y+1)^2\le 1/2}dxdy\int_{x^2+y^2+2y+2}^{-x^2-y^2-2y+1}dz=\iint_{x^2+(y+1)^2\le 1/2}dxdy(-2x^2-2y^2-4y-1)$ e passando a coordinate polari nel piano $x=\frac{1}{\sqrt{2}}\rho\cos t$, $y=-1+\frac{1}{\sqrt{2}}\rho\sin t$, si ottiene $\displaystyle\int_0^1 d\rho\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\rho(1-\rho^2)dt=\pi(\frac{1}{2}-\frac{1}{4})=\frac{\pi}{4}$

Alcuni studenti hanno osservato che il primo è un paraboloide rivolto verso l'alto ed il secondo verso il basso. Poi hanno osservato che sostituendo $(0,0)$ nel primo si ottiene 2 e 1 nel secondo. Ciò li ha portati a concludere che non esisteva intersezione fra i

due paraboloidi e quindi non c'era volume da calcolare. In realtà l'ordinata del primo paraboloide in $(0,-1)$ è 1 mentre l'ordinata del secondo è 2. L'origine degli assi non è il punto giusto rispetto a cui confrontare i due paraboloidi ma lo è il centro della circonferenza che costituisce l'intersezione dei due paraboloidi

Seconda e terza soluzione Si veda il compito A. Da un punto di vista geometrico le considerazioni solo le stesse.

3) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} dx\frac{-3x}{x^4+9}$ per disparità della funzione.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\frac{x^2}{x^4+9} = 2\pi i \text{Res}\left(\frac{z^2}{z^4+9}\right)\Big|_{z_0=\sqrt{3}e^{\frac{i\pi}{4}}} + 2\pi i \text{Res}\left(\frac{z^2}{z^4+9}\right)\Big|_{z_1=\sqrt{3}e^{\frac{i3\pi}{4}}}$$

$$\text{Res}\left(\frac{z^2}{z^4+9}\right)\Big|_{z_0=\sqrt{3}e^{\frac{i\pi}{4}}} = \lim_{z\to z_0}\frac{(z-z_0)z^2}{z^4+4} = \lim_{z\to z_0}\frac{z^2}{4z^3} = \lim_{z\to z_0}\frac{1}{4z} = \frac{1}{4\sqrt{3}}e^{\frac{-i\pi}{4}}$$

$$\text{Res}\left(\frac{z^2}{z^4+9}\right)\Big|_{z_0=\sqrt{3}e^{\frac{3i\pi}{4}}} = \lim_{z\to z_0}\frac{(z-z_0)z^2}{z^4+9} = \lim_{z\to z_0}\frac{z^2}{4z^3} = \lim_{z\to z_0}\frac{1}{4z} = \frac{1}{4\sqrt{3}}e^{\frac{-i3\pi}{4}}$$

quindi l'integrale è

$$2\pi i\frac{1}{4\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)+\frac{\sqrt{2}}{2}(-1-i)\right) = \frac{\pi}{\sqrt{6}}$$

4) Usando Stokes si può scrivere $\displaystyle\int_\gamma \omega = \iint_{x^2+(y-1)^2\le 1/2} d\sigma(\underline{\text{rot}F}, \underline{n}_e)$ dove $\underline{F}$ è il rotore del campo vettoriale. La normale al piano è $(0,0,1)$.

Il rotore è dato dal vettore $(-x, 1-y, x^2-2y^2+4y-2)$. La superficie è il piano $z=z_0$ opportuno e quindi l'integrale è $\displaystyle\int\int_{x^2+(y-1)^2\le 1/2} dx\,dy\,(x^2-2(y-1)^2) = -\frac{\pi}{16}$

4.1) La curva evidentemente è

$$x=\frac{\cos t}{\sqrt{2}} \quad y = 1+\frac{\sin t}{\sqrt{2}} \quad z=(x-1)^2+y^2=\frac{3}{2}$$

$$x' = -\frac{\sin t}{\sqrt{2}} \quad y' = \frac{\cos t}{\sqrt{2}} \quad z'=0 \implies (x')^2+(y')^2 = \frac{1}{2}$$

per cui nessun valore di t può soddisfare $(x',y')=(0,0)$.

5) Detta $X(p)=\mathcal{L}(x)$ abbiamo

$$X(p)(p+3)^2 = \frac{e^{-(p+3)}}{p+3} \quad X(p) = \frac{e^{-(p+3)}}{(p+3)^3}$$

$$x(t) = \frac{1}{2}\lim_{p\to -3}\frac{d^2}{dp^2}\frac{e^{-(p+3)}(p+3)^3e^{pt}}{(p+3)^3}H(t-1) = H(t-1)e^{3t}\frac{(t-1)^2}{2}$$

6) Prima dimostrazione Il sostegno della curva è una sorta di spirale il cui raggio istantaneo è $1+t/(2\pi)$ che comincia nel punto $(2,0)$ e finisce nel punto $(3,0)$ e gira intorno al punto $(0,1)$. Se alla curva aggiungiamo il pezzetto che da $(2,0)$ arriva a $(3,0)$ otteniamo una curva chiusa il cui integrale curvilineo vale 2π (la forma è chiusa e la curva gira intorno a $(0,1)$ per cui possiamo

calcolare l'integrale curvilineo scegliendo la curva $x = \varepsilon \cos t$, $y = 1 + \varepsilon \sin t$ con ε piccolo quanto vogliamo. Abbiamo usato Gauss–Green).
Il risultato finale sarà quindi ($\underline{\sigma} = (-t, 0)$ $-3 \le t \le -2$.)

$$2\pi - \int_{\underline{\sigma}} \omega = 2\pi - \int_{-3}^{-2} \frac{-dt}{t^2+1} = 2\pi - (\arctan 2 - \arctan 3) =$$

Seconda dimostrazione Se disegnassimo un intorno tubolare che non si autointerseca della curva e che *non contenga* il punto $(0,1)$, tale insieme sarebbe semplicemente connesso e quindi la forma lì dentro è esatta. Per calcolare l'integrale scegliamo allora il seguente cammino (sono i segmenti di retta congiungenti i cinque punti in cui la curva interseca gli assi) che immaginiamo stia dentro l'intorno tubolare

$$\underline{\gamma}_1(t) = (2(1-t), \frac{9}{4}t), \quad 0 \le t \le 1, \qquad \underline{\gamma}_2(t) = (\frac{-5}{2}t, \frac{9}{4}(1-t)), \quad 0 \le t \le 1,$$
$$\underline{\gamma}_3(t) = (-\frac{5}{2}(1-a), \frac{-11}{4}a), \quad 0 \le t \le 1, \qquad \underline{\gamma}_4 = (3t, \frac{-11}{4}(1-t)), \quad 0 \le t \le 1$$

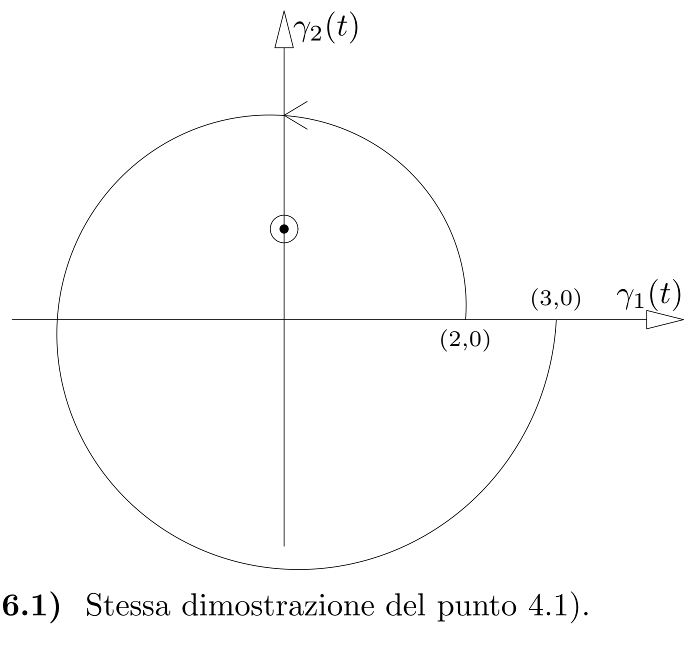
I quattro integrali curvilinei danno rispettivamente

$$\arctan\frac{9}{8} + \arctan\frac{5}{2}, \quad \arctan\frac{68}{25} + \arctan\frac{9}{10}, \quad \arctan\frac{11}{10} + \arctan\frac{28}{75}, \quad \arctan\frac{5}{9} + \arctan\frac{11}{12}$$

Dalla pagina https://it.wikipedia.org/wiki/Arcotangente traiamo le regole per la somma degli architangenti ed otteniamo come risultato $2\pi - \arctan 2 + \arctan 3$.

Osservazione L'insieme in cui giace la curva non è semplicemente connesso. Infatti la curva $x = \varepsilon \cos t$, $y = 1 + \varepsilon \sin t$ con ε non può essere ridotta ad un punto qualsiasi senza passare da $(0,1)$ che non fa parte del dominio della forma. Gli studenti verifichino la differenza con l'esercizio del 22/6/2016. Lì la curva giaceva nel semipiano superiore.

Terza soluzione Si veda il compito A con le ovvie sostituzioni



6.1) Stessa dimostrazione del punto 4.1).