Analisi II per Ingegneria Elettronica&Internet, Informatica (frontale e online)
21–09–2019 A.A. 2018/2019, Sessione autunnale, secondo appello

Nome(Stampatello) **Cognome**(Stampatello) **Matricola**

Consegnare il presente foglio sempre, anche in caso di ritiro

Le risposte vanno motivate. Se immotivate, ancorché esatte, non verranno prese in considerazione. In caso di ritiro scrivere “Ritirata/o” sotto al cognome

Gli studenti di **Elettronica&Internet** risolvano gli esercizi 1,2,3,4 Gli studenti di **Informatica** risolvano gli esercizi 1,2,5,6

1) (7.5 punti) Trovare l'area della figura in $\mathbf{R}^2$ definita da $(x^2+y^2)^{3/2}+2y^2 \le x^2+y^2$.

Si usano coordinate polari ottenendo $\rho^3+2\rho^2\sin^2 t \le \rho^2$ ossia $\rho \le 1-2\sin^2 t = \cos(2t)$ e quindi $-\pi/2+2k\pi \le 2t \le \pi/2+2k\pi$. Si ottiene $-\pi/4 \le t \le \pi/4$, $3\pi/4 \le t \le 5\pi/4$ e gli integrali da risolvere sono

$$\int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} dt \int_0^{\cos(2t)} \rho\, d\rho + \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} dt \int_0^{\cos(2t)} \rho\, d\rho = \frac{\pi}{4}$$

2) (7.5 punti) Calcolare

$$\oint_{|z|=5} \frac{zdz}{(\sin z)^2(1-\cos z)} = 2\pi i\left(\frac{5}{6}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right) = \frac{11}{3}\pi i$$

(Residui in $z=0,\pm\pi$). Essendo $\sin z \sim z$ e $1-\cos z \sim z^2$ per $z\to 0$, $z=0$ è un polo di ordine 3 e il residuo è

$$\frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\frac{d^2}{dz^2}\frac{z^4}{\sin^2 z(1-\cos z)} = \frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\left[\frac{4z^3}{\sin^2 z(1-\cos z)} - \frac{z^4(\cos(2z)(1-\cos z)+\sin^3 z)}{\sin^4 z(1-\cos z)^2}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\Big[\frac{12z^2}{\sin^2 z(1-\cos z)} - \frac{4z^3(\cos(2z)(1-\cos z)+\sin^3 z)}{\sin^4 z(1-\cos z)^2} +$$

$$- \frac{4z^3(\cos(2z)(1-\cos z)+\sin^3 z)}{\sin^4 z(1-\cos z)^2} - \frac{z^4(-2\sin(2z)+\sin z\cos(2z)+2\cos z\sin(2z)+6\sin(2z)\sin z)}{\sin^4 z(1-\cos z)^2} +$$

$$+ \frac{z^4(\cos(2z)(1-\cos z)+\sin^3 z)(4\sin^3 x\cos z(1-\cos z)^2+2\sin^4 z(1-\cos z)\sin z)}{\sin^8 z(1-\cos z)^4}\Big]$$

e non è un limite rassicurante. Conviene procedere scrivendo

$$\frac{z}{\sin^2 z(1-\cos z)} = \frac{z}{\left(z-\frac{z^3}{6}+o(z^4)\right)^2\left(1-1+\frac{z^2}{2}+\frac{-z^4}{24}+o(z^5)\right)} =$$

$$= \frac{2/z^3}{\left(1-\frac{z^2}{6}+o(z^3)\right)^2\left(1+\frac{-z^2}{12}+o(z^5)\right)} = \frac{2/z^3}{\left(1-\frac{z^2}{3}+o(z^3)\right)\left(1+\frac{-z^2}{12}+o(z^5)\right)} = \frac{2}{z^3}\frac{1}{1-\frac{5z^2}{12}+o(z^3)} =$$

$$= \frac{2}{z^3}(1+\frac{5z^2}{12}+o(z^3)) = \frac{2}{z^3}+\frac{5}{6z}+o(1)$$

da cui il residuo.

Per quanto riguarda $z=\pi$, è uno polo di ordine 2. Basta scrivere $\sin z=\sin(z-\pi+\pi)=-\sin(z-\pi)$ ottenendo

$$\frac{z}{1-\cos z}\frac{1}{(-\sin(z-\pi))^2},\qquad \frac{z}{1-\cos z}\quad \text{olomorfa in } z=\pi \text{ e } \frac{z}{1-\cos z}\Big|_{z=\pi}\neq 0$$

Abbiamo ($u\doteq z-\pi$)

$$\frac{(z-\pi)+\pi}{\sin^2 z(1-\cos z)}=\frac{(z-\pi)+\pi}{(\sin(z-\pi))^2(1+\cos(z-\pi))}=\frac{(z-\pi)+\pi}{(\sin(z-\pi))^2(1+\cos(z-\pi))}=$$
$$=\frac{u+\pi}{(u-\frac{u^3}{6}+o(u^4))^2(1+1-\frac{u^2}{2}+o(u^3))}=\frac{u+\pi}{2(u^2-\frac{u^4}{3}+o(z^5))(1-\frac{u^2}{4}+o(u^3))}=$$
$$=\frac{u+\pi}{2u^2}\frac{1}{(1-\frac{u^2}{3}+o(z^5))(1-\frac{u^2}{4}+o(u^3))}=\frac{u+\pi}{2u^2}\frac{1}{1-\frac{7u^2}{12}+o(u^3)}=\frac{u+\pi}{2u^2}\Big(1+\frac{7u^2}{12}+o(u^3)\Big)=$$
$$=\frac{\pi}{2u}+\frac{1}{2u}+\frac{7\pi}{24}+\frac{7}{24}u+o(u)\qquad \text{residuo pari a } \frac12$$

Rifacendo lo stesso discorso per $z=-\pi$,v si arriva a

$$\frac{u-\pi}{2u^2}\Big(1+\frac{7u^2}{12}+o(u^3)\qquad \text{residuo pari a } \frac12$$

3) (7.5 punti) Si risolva l’equazione differenziale

$$\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=0 & t,x>0\\ u(x,0)=1,\ u_t(x,0)=x,\ u_x(0,t)=H(t-T)\end{cases}$$

Giornale delle lezioni esercizio u) sulle equazioni di D’Alembert

4) (7.5 punti) Si trovino i punti critici e loro caratterizzazione della funzione $f\colon \mathbf{R}^3\to\mathbf{R}$ $f(x,y,z)=z$ soggetta al vincolo $(x+3y^2)e^{xz}-1=0$. [È un problema di estremi vincolati]

$(e,0,-1/e)$ è una sella

5) (7.5 punti) Al variare di $\alpha\in\mathbf{R}$ si risolva l’equazione differenziale

$$x''+\alpha^2x=\sin t+\cos t,\quad x(0)=0,\quad x'(0)=0$$

[Il valore α=1 si differenzia dagli altri valori]

$\alpha\neq\pm1$.

$$X(p)=\frac{1}{1-\alpha^2}(\frac{1}{p^2+\alpha^2}-\frac{1}{1+p^2})+\frac{1}{1-\alpha^2}(\frac{p}{p^2+\alpha^2}-\frac{p}{1+p^2})$$

da cui

$$x(t)=\frac{1}{1-\alpha^2}\left(\frac{\sin\alpha t}{\alpha}-\sin t+\cos\alpha t-\cos t\right)$$

$\alpha=\pm1$.

$$X(p)=\frac{p}{(p^2+1)^2}+\frac{1}{(p^2+1)^2}\implies x(t)=\frac12\sin t-\frac{t}{2}\cos t+\frac{t}{2}\sin t$$

6) (7.5 punti) **Prima soluzione** Sia data la forma differenziale $\dfrac{-y+x^2-2x+1+y^2}{x^2-2x+1+y^2}dx+\dfrac{-3x+1+2x^2+2y^2}{x^2-2x+1+y^2}dy$, Si calcoli l’integrale della forma lungo i due segmenti che hanno per estremi i punti $A\equiv(0,0)$, $B\equiv(1,-1)$, $C\equiv(2,0)$ andando da A a C.

Forma esatta in un qualsiasi insieme che contorna il cammino ed esclude il punto $(1,0)$. Usiamo il cammino che connette i punti $(0,0)$, $(0,-1)$, $(2,-1)$, $(2,0)$. Il risultato è $\pi+2$.

Seconda soluzione La forma è $\dfrac{-ydx+(x-1)dy}{y^2+(x-1)^2}+dx+2dy$. La parte $dx+2dy$ è chiaramente esatta su tutto il piano con potenziale $V=x+2y$. La prima parte è chiusa ma non esatta. Siccome la curva giace in un sottoinsieme semplicemente connesso, usiamo il potenziale. Definiamo la seguente funzione

$$U(x,y)=\begin{cases} 2\pi+\arctan\dfrac{y}{x-1}, & x>1 \\ \pi+\arctan\dfrac{y}{x-1} & x<1 \\ 3\pi/2 & x=1, y<0 \end{cases}$$

Verificare che è differenziabile con derivate continue su tutto il piano tranne la semiretta $x=1, y=t>0$. Un conto analogo è stato esplicitato in almeno due compiti precedenti $U(2,0)-U(0,0)=\pi$ $V(2,0)-V(0,0)=2$ da cui il risultato