Paolo Perfetti, Dipartimento di matematica, Università degli Studi di Roma "Tor Vergata", facoltà di Ingegneria

Analisi II per Ingegneria Elettronica&Internet, Informatica (frontale e online)
23–11–2019 A.A. 2018/2019, Sessione autunnale, appello straordinario

Nome(Stampatello) **Cognome**(Stampatello) **Matricola**

Consegnare il presente foglio sempre, anche in caso di ritiro

Le risposte vanno motivate. Se immotivate, ancorché esatte, non verranno prese in considerazione. In caso di ritiro scrivere "Ritirata/o" sotto al cognome

Gli studenti di **Elettronica&Internet** risolvano gli esercizi 1,2,3,4 Gli studenti di **Informatica** risolvano gli esercizi 1,2,5,6

1) (7.5 punti)
Calcolare $\displaystyle\iiint_D z^2 dx\, dy\, dz$ e $D = \{\underline{x} \in \mathbf{R}^3\colon\ x^2+y^2+z^2 \leq 2z,\ 0 \leq z \leq 2(x^2+y^2)$

Le coordinate giuste sono quelle cilindriche. $x = r\cos t$, $y = r\sin t$, $z = u$ con $r^2 \leq 2u - u^2$ e $0 \leq u \leq 2r^2$. Il volume D è di rotazione intormo all'asse z: se $(x,y,z) \in D$ allora pure $(x', y', z) \in D$ a patto che $(x')^2 + (y')^2 = x^2 + y^2$. Per quanto riguarda la z possiamo osservare che

$$2z - z^2 \geq x^2 + y^2 \geq z/2 \geq 0 \implies 2z - z^2 \geq z/2 \implies 0 \leq z \leq 3/2$$

quindi l'integrale è

$$\int_0^{3/2} duu^2 \int_{\sqrt{z/2}}^{\sqrt{2u-u^2}} rdr \int_0^{2\pi} dt = 2\pi \int_0^{3/2} duu^2 \int_{\sqrt{z/2}}^{\sqrt{2u-u^2}} rdr = \pi \frac{243}{640}$$

A pag.3 del Giornale delle lezioni trovate i riferimenti.

2) (7.5 punti) Calcolare $VP \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos bx - \cos ax}{x^2(x^2+1)} dx$ $a, b \in \mathbf{R}$ [Come la solito non devono essere presenti unità immaginarie i nel risultato finale]

Chiaramente

$$I = VP \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos bx - \cos ax}{x^2(x^2+1)} dx = \mathrm{Re}\left(VP \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ibx} - e^{iax}}{x^2(x^2+1)} dx \right] \right)$$

da cui

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ibx} - e^{iax}}{x^2(x^2+1)} dx + \pi(b-a) = 2\pi i \mathrm{Res} f(i) = \pi(e^{-a} - e^{-b}) \implies I = \pi(e^{-a} - e^{-b}) + \pi(a-b)$$

3) (7.5 punti) Si risolva l'equazione differenziale [Come la solito, sbagliare la trasformata di Laplace di $u(x,t)$ comporta l'annullamento dell'esercizio]

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = x \sin(\omega t) \\ u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = 0,\ u(0,t) = 0 \end{cases}$$

Si veda il Giornale delle Lezioni, esercizio k3) con $A = 0$. La soluzione è $u(x,t) = \dfrac{tx}{\omega} - \dfrac{x}{\omega^2} \sin(\omega t)$

4) (7.5 punti) Si trovino i punti critici e loro caratterizzazione della funzione $f\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ $f(x,y,z)=z$ soggetta al vincolo $(x+3y^2)e^{xz}-1=0$. [È un problema di estremi vincolati]

$F(x,y,z,\lambda)=z-\lambda((x+3y^2)e^{xz}-1)$

$$F_y=-\lambda 6ye^{xz}=0 \iff \lambda y=0, \qquad F_z=1-\lambda(x+3y^2)xe^{xz}=0 \implies \lambda\neq 0$$

quindi $y=0$. Quindi $F_z=0 \iff 1-\lambda x^2e^{xz}=0$. Inoltre

$$F_x=0 \iff -\lambda e^{xz}-\lambda z(x+3y^2)e^{xz}=0 \iff -\lambda e^{xz}(1+xz)=0 \iff xz=-1$$

$$F_\lambda=0 \iff -\lambda(xe^{xz}-1)=0 \iff x=e \implies z=-1/e \implies \lambda=1/e$$

Quindi l'unico punto critico è $(x,y,z,\lambda)=(e,0,-1/e,1/e)$

$$\underline{\partial}(x+3y^2)e^{xz}-1=(e^{xz}z(x+3y^2)+e^{xz},6ye^{xz},x(x+3y^2)e^{xz})\Big|_{(e,0,-1/e,1/e)}=(0,0,e)$$

$(0,0,e)\cdot(a,b,c)=ce=0$ ossia $c=0$. La matrice hessiana di $F(x,y,z,\lambda)$ è

$$\frac{-1}{e}\begin{pmatrix} e^{xz}(z^2x+3y^2z^2)+2e^{xz}z & 6yze^{xz} & e^{xz}(zx^2+3y^2zx)+e^{xz}(x+3y^2) \\ 0 & 6e^{xz} & 6yxe^{xz} \\ (2x+3y^2)e^{xz}+(x^2z+3xzy^2)e^{xz} & 6xye^{xz} & (x^3+3x^2y^2)e^{xz} \end{pmatrix}$$

da cui

$$(a,b,0)\begin{pmatrix} \frac{1}{e^3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-6}{e^2} & 0 \\ \frac{-1}{e} & 0 & -e \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ 0\end{pmatrix}=\frac{a^2}{e^3}-6\frac{b^2}{e^2}$$

non ha segno definito e quindi è una sella.

5) (7.5 punti) Al variare di $\alpha\in\mathbf{R}$ si risolva l'equazione differenziale [Come la solito, sbagliare la trasformata di Laplace di $u(t)$ comporta l'annullamento dell'esercizio]

$$x'+\alpha x=te^{-t}, \quad x(0)=0, \quad x'(0)=0$$

$X(p)=\dfrac{1}{(p+1)^2(p+\alpha)}$. Se $\alpha\neq 1$ si ha $x(t)=\dfrac{e^{-\alpha t}}{(-\alpha+1)^2}+\dfrac{te^{-t}}{\alpha-1}-\dfrac{e^{-t}}{(\alpha-1)^2}$. Se $\alpha=1$ si ha $\dfrac{1}{2}\dfrac{d^2}{dp^2}e^{pt}\Big|_{p=-1}=\dfrac{1}{2}t^2e^{-t}$

6) (7.5 punti) Sia data la curva $\underline{\gamma}$ percorsa in senso antiorario una sola volta, il cui sostegno è dato dall'equazione $x^2+y^2\leq\sqrt{x^2+y^2}-x$ e sia data la forma differenziale $\omega=(3x^2y^2+y^2)dx+2x^3ydy$. Calcolare $\displaystyle\oint_{\underline{\gamma}}\omega$

La curva è chiusa: $x=(1-C)C$, $(1-C)S$, $0\leq t\leq 2\pi$. $3x^2y^2dx+2x^3ydy$ è esatta quindi dà contributo nullo.

$$\oint y^2dx=\int_0^{2\pi}S^2(1+C^2-2C)((-S+2CS)dt=$$

$$=\int_0^{2\pi}\left[-S^3+2CS^3-S^3C^2+2S^3C^3+2CS^3-4C^2S^3\right]dt=0$$

Alternativamente usare Gauss-Green

$$\int_0^{2\pi}dt\int_0^{1-C}r(-2rS)dr=-2\int_0^{2\pi}S\frac{(1-C)^3}{3}dt=\frac{-2}{3}\int_0^{2\pi}S(1-C^3-3C+3C^2)dt=0$$

osservazione peraltro immediata osservando che l'integrale doppio è

$$\iint_{x^2+y^2\leq\sqrt{x^2+y^2}-x}(-2y)dxdy$$

ma l'insieme è simmetrico rispetto allo scambio $(x,y)\to(x,-y)$ mentre l'integrando cambia segno