Paolo Perfetti, Dipartimento di matematica, Università degli Studi di Roma “Tor Vergata”, facoltà di Ingegneria

Analisi II per Ingegneria Elettronica&Internet, Informatica (frontale e online)
31–07–2019 A.A. 2018/2019, Sessione Estiva, terzo appello

Nome(Stampatello) **Cognome**(Stampatello) **Matricola**

Consegnare il presente foglio sempre, anche in caso di ritiro

Le risposte vanno motivate. Se immotivate, ancorché esatte, non verranno prese in considerazione. In caso di ritiro scrivere “Ritirata/o” sotto al cognome

Gli studenti di **Elettronica&Internet** risolvano gli esercizi 1,2,3,4 Gli studenti di **Informatica** risolvano gli esercizi 1,2,5,6

1) (7.5 punti) Calcolare il volume della regione definita da

$$V = \{\underline{x} \in \mathbf{R}^3 : x, y \geq 0,\ x^2 + (y-1)^2 \leq 1,\ x^2 + y^2 \leq 1, \quad 0 \leq z \leq f(x,y)\}$$

con $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{x+\sqrt{x^2+y^2}}$ se $y \leq x/2$ e $f(x,y) = \dfrac{y^3}{x+\sqrt{x^2+y^2}}$ se $y > x/2$

[non farsi impressionare dalle formule della $f(x,y)$ e dal dominio. Impostare il calcolo usando coordinate polari piane centrate nell'origine]

Svolgimento Detto $t_0 = \arctan 1/2$, si deve calcolare (usare $\cos(\arctan t) = 1/\sqrt{1+t^2}$, $\sin(\arctan t) = t/\sqrt{1+t^2}$)

$$\int_0^{t_0} dt \int_0^{2\sin t} dr\, r \frac{r}{r\cos t + r} + \int_{\pi/6}^{\pi/2} dt \int_0^1 dr\, r \frac{r^3 \sin^3 t}{r\cos t + r} + \int_{t_0}^{\pi/6} dt \int_0^{2\sin t} dr\, r \frac{r^3 \sin^3 t}{r + r\cos t} =$$

$$= \int_0^{t_0} dt \frac{1}{2} \frac{4\sin^2 t}{1+\cos t} + \frac{1}{4}\int_{\pi/6}^{\pi/2} dr\, \frac{\sin^3 t}{\cos t + 1} + \int_{t_0}^{\pi/6} \frac{\sin^3 t}{1+\cos t} \int_0^{2\sin t} r^3 dr$$

$$= = 2\int_0^{t_0} dt(1-\cos t) + \frac{1}{4}\int_{\pi/6}^{\pi/2} dr\, \sin t(1-\cos t) + 4\int_{t_0}^{\pi/6} \sin^5 t(1-\cos t) dt =$$

$$= 2(t_0 - \frac{1}{\sqrt{5}}) + \frac{1}{4}\left(\frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{1}{16}\cos(2t)\Big|_{\pi/6}^{\pi/2}\right) + 4\int_{t_0}^{\pi/6} \sin t(1+\cos^4 t - 2\cos^2 t)dt - \frac{4}{6}\sin^6 t\Big|_{t_0}^{\pi/6} =$$

$$= 2t_0 - \frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{1}{64}\frac{-3}{2} + 4\left(\frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{4}{5}\left(\frac{2^5}{25\sqrt{5}} - \frac{9\sqrt{3}}{32}\right) - \frac{8}{3}\left(\frac{8}{5\sqrt{5}} - \frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\right)$$

$$= 2t_0 - \frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{3}{128} + \left[4\left(\frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{4}{5}\left(\frac{2^5}{25\sqrt{5}} - \frac{9\sqrt{3}}{32}\right) - \frac{8}{3}\left(\frac{8}{5\sqrt{5}} - \frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\right)\right]$$

La parte in parentesi quadra nasce dal terzo contributo all'integrale e non avrebbe dovuto esserci. L'errore sta nell'aver scritto $y \leq x/2$ anziché $y \leq x/\sqrt{3}$. Nella correzione ho tenuto conto di tale “svista”

2) (7.5 punti) Calcolare (Nel risultato finale non voglio vedere neppure una i)

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{\frac{8}{3}}}{x^4+1} dx$$

[1) Si disegni il cammino di integrazione, 2) si parametrizzino tutte le curve coivolte]

Svolgimento Se con I indichiamo l'integrale, il risultato è (il cammino è quello a pag.12 del giornale delle elzioni)

$$I(1-e^{\frac{16\pi i}{3}}) = 2\pi i\Bigg[\lim_{z\to e^{i\pi/4}}\frac{(z-e^{i\pi/4})z^{8/3}}{z^4+1}+\lim_{z\to e^{i3\pi/4}}\frac{(z-e^{i3\pi/4})z^{8/3}}{z^4+1}+$$
$$+\lim_{z\to e^{i5\pi/4}}\frac{(z-e^{i5\pi/4})z^{8/3}}{z^4+1}+\lim_{z\to e^{i7\pi/4}}\frac{(z-e^{i7\pi/4})z^{8/3}}{z^4+1}\Bigg]=$$

Ossia (usando $z^3=-1/z$ per le radici di $z^4=-1$). Inoltre

$$e^{\frac{16\pi i}{3}}=e^{4\pi i+\frac{4\pi i}{3}}=e^{\frac{4\pi i}{3}},\qquad 1-e^{\frac{4\pi i}{3}}=e^{\frac{2\pi i}{3}}(e^{\frac{-2\pi i}{3}}-e^{\frac{2\pi i}{3}})=-2i\sin\frac{2\pi}{3}e^{\frac{2i\pi}{3}}$$

$$-2i\sin\frac{2\pi}{3}Ie^{\frac{2i\pi}{3}}=2\pi i\left[\lim_{z\to e^{i\pi/4}}\frac{z^{8/3}}{4z^3}+\lim_{z\to e^{i3\pi/4}}\frac{z^{8/3}}{4z^3}+\lim_{z\to e^{i5\pi/4}}\frac{z^{8/3}}{4z^3}+\lim_{z\to e^{i7\pi/4}}\frac{z^{8/3}}{4z^3}\right]$$

e quindi

$$2i\sin\frac{2\pi}{3}Ie^{\frac{2i\pi}{3}}=\frac{2\pi i}{4}\sum_{k=0}^{3}z_k^{\frac{11}{3}}=\frac{2\pi i}{4}\sum_{k=0}^{3}e^{\frac{11}{3}(i\frac{\pi}{4}+\frac{ik\pi}{2})}=\frac{2\pi i}{4}e^{i\frac{11\pi}{12}}\frac{1-e^{\frac{i4\pi}{3}}}{1-e^{\frac{i11\pi}{6}}}=\frac{2\pi i}{4}e^{i\frac{11\pi}{12}}\frac{1-e^{\frac{i4\pi}{3}}}{1-e^{\frac{-i\pi}{6}}}$$

Arriviamo a

$$2iI\frac{\sqrt3}{2}=\frac{\pi i}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\frac{\frac32+i\frac{\sqrt3}{2}}{1-\frac{\sqrt3}{2}+\frac{i}{2}}\iff I\sqrt3=\frac{\pi}{4\sqrt2}\frac{\sqrt3(1+i)(\sqrt3+i)(1-\frac{\sqrt3}{2}-\frac{i}{2})}{1+\frac34-\sqrt3+\frac14}$$

ossia

$$I=\frac{\pi(2+\sqrt3)}{8\sqrt2}(1+i)(\sqrt3+i)(2-\sqrt3-i)=\frac{\pi(2+\sqrt3)}{8\sqrt2}4(\sqrt3-1)\implies I=\frac{\pi}{2\sqrt2}(\sqrt3+1)$$

3) (7.5 punti) Si risolva l'equazione differenziale

$$\begin{cases}u_{tt}-a^2u_{xx}=0, & x>0,t>0\\ u(x,0)=x,\ u_t(x,0)=0,\ u_x(0,t)=0, & x\ge0,t\ge0,\end{cases}$$

Svolgimento Detta $v(x,p)=\mathcal{L}u(x,t)$ si ha

$$a^2v_{xx}-p^2v=-px,\quad v_x(0,p)=0\implies v(x,p)=\frac{a}{p^2}e^{\frac{-p}{a}x}+\frac{x}{p}$$

da cui

$$u(x,t)=x+a(t-\frac{x}{a})H(t-\frac{x}{a})$$

Verifichiamo le condizioni iniziali e al bordo.

$$u(x,0)=x+0,\qquad u_t(x,0)=aH(t-\frac{x}{a})+a(t-\frac{x}{a})\delta(t-\frac{x}{a})\Big|_{t=0}=aH(-\frac{x}{a})=0$$

Inoltre l'equazione $u_{tt}-a^2u_{xx}=0$ è verificata da qualsiasi funzione $f(t-x/a)$ due volte differenziabile.

4) (7.5 punti) Sia data la seguente funzione $f(x,y)=x^3+y^3-x^2-y^2-\frac{4}{3}xy$. Si trovino i punti critici e se ne stabilisca la natura

Svolgimento vedi il compito del 2/2/2015

5) (7.5 punti) Si risolva l'equazione differenziale

$$x'+x=f(t), \quad x(0)=1$$

dove $f(t)\equiv 1$ per $0\le t<1$, $f(t)=-2t$ per $1\le t<2$, $f(t)\equiv 0$ per $t\ge 2$ [Si scriva $f(t)$ come combinazione lineare $f(t){=}f_1(t{-}\alpha_1)H(t{-}\alpha_1){+}\ldots{+}f_n(t{-}\alpha_n)H(t{-}\alpha_n)$]

Svolgimento **5)** $f(t)=H(t)-2(t-1)H(t-1)-3H(t-1)+2(t-2)H(t-2)+4H(t-2)$. Sia $\mathcal{L}(x)=X(p)$ e quindi

$$X(p)(p+1)-1=\frac{1}{p}-2\frac{e^{-p}}{p^2}-3\frac{e^{-p}}{p}+2\frac{e^{-2p}}{p^2}+4\frac{e^{-2p}}{p}$$

da cui

$$X(p)=\frac{1}{p+1}+\frac{1}{p(p+1)}-2\frac{e^{-p}}{p^2(p+1)}-3\frac{e^{-p}}{p(p+1)}+2\frac{e^{-2p}}{p^2(p+1)}+4\frac{e^{-2p}}{p(p+1)}$$

Poi usiamo

$$\frac{1}{p(p+1)}=\frac{1}{p}-\frac{1}{p+1} \qquad \frac{1}{p^2(p+1)}=\frac{1}{p+1}-\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}$$

da cui

$$X(p)=\frac{1}{p}\left[1-e^{-p}+2e^{-2p}\right]+\frac{1}{p+1}\left[e^{-p}-2e^{-2p}\right]+\frac{1}{p^2}(-2e^{-p}+2e^{-2p})=$$

da cui

$$\begin{aligned}x(t)&=H(t)-H(t-1)+2H(t-2)+e^{-(t-1)}H(t-1)-2e^{-(t-2)}H(t-2)+\\&-2(t-1)H(t-1)+2(t-2)H(t-2)=\\&=H(t)+H(t-1)(1-2t+e^{-(t-1)})+H(t-2)(2t-2-2e^{-(t-2)})=x(t)\end{aligned}$$

Giusto per completezza

$$\begin{aligned}x'(t)=0+\underbrace{\delta(t-1)(1-2t+e^{-(t-1)})}_{=0}+H(t-1)(-2-e^{-(t-1)})+\underbrace{\delta(t-2)(2t-2-2e^{-(t-2)})}_{=0}+\\+H(t-2)(2+2e^{-(t-1)})\end{aligned}$$

e quindi

$$x'+x=H(t)+H(t-1)(-1-2t)+H(t-2)(2t)=f(t)$$

6) (7.5 punti) Sia data la forma differenziale $\omega=\frac{(x^4y^2+y-x^2y^2+1+2x^2y)}{(1+x^2y)^2}dx+\frac{x}{(1+x^2y)^2}dy$.

Si calcoli $\int_{\underline{\gamma}}\omega$ dove $\underline{\gamma}=(t,e^t)$, $0\le t\le 1$

Svolgimento La forma è chiusa e nel primo quadrante è quindi esatta. Inoltre possiamo scriverla come

$$dx+\frac{y-x^2y^2}{(1+x^2y)^2}dx+\frac{x}{(1+x^2y)^2}dy\doteq dx+\omega_1$$

e chiaramente è esatta pure ω_1.
Prima maniera Calcoliamo il potenziale.

$$U_y = \frac{x}{(1+x^2y)^2} \implies U(x,y) = \frac{-1}{x(1+x^2y)} + q(x) = q(x) - \frac{1}{x} + \frac{xy}{1+x^2y}$$

$$U_x = q' + \frac{1}{x^2} + \frac{y}{1+x^2y} - \frac{2x^2y^2}{(1+x^2y)^2} = \frac{y-x^2y^2}{(1+x^2y)^2} \implies q' = \frac{-1}{x^2} \implies q(x) = \frac{1}{x}$$

e quindi la primitiva di ω_1 è $U(x,y) = \dfrac{xy}{1+x^2y}$. La primitiva di ω è $x + U(x,y)$. Il risultato $1 + \dfrac{e}{1+e}$.
Seconda maniera Dopo avere osservato che la forma è esatta si sceglie un cammino più semplice dal punto di vista dell’integrazione. Ad esempio due segmenti in cui una delle variabili rimane costante. Lascio agli studenti l’opportunità di verificare che si giunge, ovviamente, allo stesso risultato