Primo "minicompito" Ing. Informatica, Ing. Elettronica&Internet, analisi–II, A.A. 2018–2019.

Si leggano le informazioni in basso prima di cimentarsi

1) Calcolare $I \doteq \iiint_{[0,1]^3} \dfrac{dxdydz}{(1+x^2+y^2+z^2)^2} \quad [0,1]^3 = [0,1]\times[0,1]\times[0,1]$

2) Sia data la "lemniscata di Bernoulli" $L \doteq \{\underline{x} \in \mathbf{R}^3 \colon (x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2), z=0\}$ nel piano (x,y). Sia M un punto di essa e sia C la circonferenza avente per diametro OM ($O \equiv (0,0,0)$) e giacente sul piano passante per il diametro e l'asse z.

2.1) Calcolare l'area della superficie, detta S, che si ottiene come luogo delle circonferenze al variare di M sulla lemniscata.

2.2) Detto V il volume racchiuso da S, si calcoli il baricentro della parte di V la cui proiezione sul piano (x,y) è situata nel primo quadrante.

3) Calcolare l'integrale $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t\, dt\, d\varphi}{\cos(a\cos t\cos\varphi)}$ con $|a| < \pi/2$.

I quesiti valgono 1 punto ciascuno e la somma va ad aggiungersi al voto dello scritto. Non è necessario dover risolvere tutti e tre gli esercizi. Il presente minicompito non costituisce un esonero. Gli elaborati vanno consegnati alla fine della lezione del **6/11/2018**. Si possono consegnare uno o più fogli protocollo. Nome, cognome (**Leggibili**) e matricola vanno scritti su **ogni** foglio. Alternativamente si possono usare più fogli singoli sfusi su ciascuno dei quali va messo nome cognome e matricola (**Leggibili**). In questo secondo caso i fogli vanno racchiusi tutti in una cartellina oppure in una busta di plastica di quelle usuali oppure grappettati. **Non presentarsi con due o più fogli sfusi la cui unione diventa poi un mio problema. In tal caso i fogli non verranno accettati.** *Gli studenti possono associarsi fra loro e farsi aiutare ma sconsiglierei di trascrivere pedissequamente qualcosa che non si è capito. Se allo scritto d'esame si dimostra di non padroneggiare l'esercizio riguardante gli integrali multipli, sarà inevitabile doversi sottoporre alla prova orale e se alla fine non si supera l'esame, si perdono i punti del minicompito.* Evitare di chiedere suggerimenti su come procedere. Non ne verranno dati.

Non è possibile consegnare le risposte successivamente; eventualmente è possibile farlo alla fine di una qualsiasi delle lezioni precedenti a quella del 6/11/2018. Alternativamente è possibile lasciare l'elaborato, sempre entro le 15.45 del 6/11/2018, nella mia buca delle lettere che si trova nel Dipartimento di Matematica (zona Sogene). La buca delle lettere si trova sullo stesso piano di "Focal Point" ed è distante 20 metri circa da esso (percorrere il corridoio alle spalle di "Focal Point").

Prima soluzione del primo problema

Sia $x = r\cos t$, $y = r\sin t$, $z = \tan s$ e calcoliamo solo la parte $0 \le y \le x \le 1$ moltiplicata per due. Ora $0 \le z \le 1$ impone $0 \le s \le \pi/4$. $0 \le y \le x$ impone $0 \le \vartheta \le \pi/4$ e $x \le 1$ impone $0 \le r \le 1/\cos t$. L'integrale è

$$2\int_0^{\frac{\pi}{4}} dt \int_0^{\frac{\pi}{4}} ds \int_0^{\frac{1}{\cos t}} dr \frac{r}{\cos^2 s}\frac{1}{(1+r^2+\tan^2 s)^2} = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} dt \int_0^{\frac{\pi}{4}} ds \int_0^{\frac{1}{\cos t}} dr \frac{r\cos^2 s}{(r^2\cos^2 s+1)^2} =$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} dt \int_0^{\frac{\pi}{4}} ds \int_0^{\frac{1}{\cos t}} \frac{1}{2}\frac{1}{1+r^2\cos^2 s}\Big|_{\frac{1}{\cos t}}^{0} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} dt \int_0^{\frac{\pi}{4}} ds \left[1 - \frac{\cos^2 t}{\cos^2 t + \cos^2 s}\right] =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} dt \int_0^{\frac{\pi}{4}} ds \frac{\cos^2 s}{\cos^2 t + \cos^2 s} \underbrace{=}_{s\to t,\, t\to s} \int_0^{\frac{\pi}{4}} dt \int_0^{\frac{\pi}{4}} ds \frac{\cos^2 t}{\cos^2 s + \cos^2 t}$$

Ne segue

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} dt \int_0^{\frac{\pi}{4}} ds \frac{\cos^2 t}{\cos^2 s + \cos^2 t} = \frac{1}{2}\frac{\pi^2}{16} = \frac{\pi^2}{32}$$

Seconda soluzione del primo problema

(simile alla precedente)

Coordinate cilindriche sempre in $0 \le y \le x \le 1$. $x = r\cos t$, $y = r\sin t$, $z = u$. L'integrale è

$$2\int_0^1 du \int_0^{\frac{\pi}{4}} dt \int_0^{\frac{1}{\cos t}} dr \frac{r}{(1+r^2+u^2)^2} = \int_0^1 du \int_0^{\frac{\pi}{4}} dt \left[\frac{1}{1+u^2} - \frac{\cos^2 t}{1+(1+u^2)\cos^2 t}\right] =$$
$$= \int_0^1 du \int_0^{\frac{\pi}{4}} dt \frac{1}{(1+u^2)(1+(1+u^2)\cos^2 t)} \doteq I$$

Poi

$$\int_0^1 du \int_0^{\frac{\pi}{4}} dt \frac{\cos^2 t}{1+(1+u^2)\cos^2 t} \underbrace{=}_{t=\arctan p} \int_0^1 du \int_0^1 dp \frac{1}{1+p^2}\frac{1}{1+p^2+1+u^2}$$

che è poi uguale a

$$\int_0^1 du \int_0^1 dp \frac{1}{1+u^2}\frac{1}{1+u^2+1+p^2} = \int_0^1 du \int_0^{\frac{\pi}{4}} dt \frac{1}{(1+u^2)(1+(1+u^2)\cos^2 t)}$$

Quindi $\dfrac{\pi^2}{16} - I = I$

Secondo problema

Usiamo coordinate polari sferiche $x = r\sin\vartheta\cos s$, $y = r\sin\vartheta\sin s$, $z = r\cos\vartheta$. Se $\vartheta = \pi/2$, l'equazione della lemniscata diventa $r^2(s) = a^2\cos(2s)$ e quindi $-\pi/4 \le s \le \pi/4$, $3\pi/4 \le s \le 5\pi/4$. Sia P un punto della circonferenza C avente per diametro M. Il segmento OP è pari a $r(s)\sin\vartheta$ per cui le coordinate del punto P sono pari a

$$x \doteq \varphi_1 = (a\sqrt{\cos 2s}\sin\vartheta)\sin\vartheta\cos s,\ y \doteq \varphi_2 = (a\sqrt{\cos 2s}\sin\vartheta)\sin\vartheta\sin s,$$
$$z \doteq \varphi_3 = (a\sqrt{\cos 2s}\sin\vartheta)\cos\vartheta,$$

Siccome la lemniscata è simmetrica rispetto all'origine, basta moltiplicare per 4 il calcolo ristretto al primo quadrante da cui $0 \le \vartheta \le \pi/2$, $0 \le s \le \pi/4$. Inoltre si vede facilmente che $\|\underline{\varphi}_s \wedge \underline{\varphi}_\vartheta\| = a^2\sin^2\vartheta$ e quindi la superficie cercata è $8a^2\displaystyle\int_0^{\pi/4} ds \int_0^{\pi/2} \sin^2\vartheta d\vartheta = \frac{\pi^2 a^2}{2}$.

Il volume è pari a

$$V = \int_0^{\pi/4} ds \int_0^{\pi} d\vartheta \sin^2\vartheta \int_0^{a\sqrt{\cos 2s}} r^2 dr = \frac{\pi}{6}a^3 \int_0^{\pi/4} (\cos(2s))^{3/2} ds$$

e la componente x del baricentro è

$$x_b = \frac{1}{V}\int_0^{\pi/4} ds \int_0^{\pi} d\vartheta \sin^2\vartheta \int_0^{a\sqrt{\cos 2s}} r^2(a\sqrt{\cos 2s}\sin\vartheta)\sin\vartheta\cos s\, dr =$$
$$\frac{a^4}{3V}\int_0^{\pi/4} \cos s\cos^2(2s)\, ds \int_0^{\pi/2} d\vartheta \sin^4\vartheta = \frac{a^4}{3V}\frac{4}{15}\sqrt{2}\frac{3}{8}\pi = \frac{\sqrt{2}}{30}\frac{a^4\pi}{V}$$

$$y_b = \frac{1}{V}\int_0^{\pi/4} ds \int_0^{\pi} d\vartheta \sin^2\vartheta \int_0^{a\sqrt{\cos 2s}} r^2(a\sqrt{\cos 2s}\sin\vartheta)\sin\vartheta\sin s\, dr =$$

$$\frac{a^4}{3V}\int_0^{\pi/4} \sin s\cos^2(2s)\, ds \int_0^{\pi/2} d\vartheta \sin^4\vartheta = \frac{a^4}{3V}\frac{7-4\sqrt{2}}{15}\frac{3}{8}\pi = \frac{7-4\sqrt{2}}{120}\frac{a^4\pi}{V}$$

$$z_b = \frac{1}{V}\int_0^{\pi/4} ds \int_0^{\pi} d\vartheta \sin^2\vartheta \int_0^{a\sqrt{\cos 2s}} r^2(a\sqrt{\cos 2s}\sin\vartheta)\cos\vartheta\, dr =$$

$$\frac{a^4}{3V}\int_0^{\pi/4} \cos^2(2s)\, ds \underbrace{\int_0^{\pi} d\vartheta \sin^2\vartheta\cos\vartheta}_{=0} = 0,$$

Terzo problema

Da $\vartheta = \pi/2 - t$ otteniamo $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi}{\cos(a\sin\vartheta\cos\varphi)}$ con $|a < \pi/2|$ Per $a=0$ vale $\pi/2$. Sia $a \neq 0$.

La parametrizzazione della sfera unitaria $x = \sin\vartheta\cos\varphi$, $y = \sin\vartheta\sin\varphi$, $z = \cos\vartheta$ e $d\sigma = \sin\vartheta d\vartheta d\varphi$ ci dice che

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi}{\cos(a\sin\vartheta\cos\varphi)} = \int\int_{\substack{x^2+y^2+z^2=1,\\ x,y,z\geq 0}} \frac{d\sigma}{\cos(ax)}$$

Parametrizziamo l'ottante di sfera come $x=u$, $y=v$, $z=\sqrt{1-u^2-v^2}$ ed otteniamo

$$\int\int_{u^2+v^2\leq 1} \frac{du\, dv}{\sqrt{1-u^2-v^2}}\frac{1}{\cos(au)} \underbrace{=}_{v=\sqrt{1-u^2}\sin z} \int_0^1\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du\sqrt{1-u^2}\cos z dz}{\sqrt{1-u^2}\cos z\cos(au)} =$$

$$= \frac{\pi}{2}\int_0^1 \frac{du}{\cos(au)} = \frac{\pi}{2}\frac{1}{a}\ln\frac{1+\sin a}{\cos a} = \frac{\pi}{2a}\ln\frac{1+\tan(a/2)}{1-\tan(a/2)}$$

Si può verificare che $\displaystyle\lim_{a\to 0}\frac{\pi}{2a}\ln\frac{1+\tan(a/2)}{1-\tan(a/2)} = \frac{\pi}{2}$