Analisi II per Ingegneria Elettronica & Internet
02–03–2018 A.A. 2017/2018, Sessione Invernale, terzo appello, compito A

Nome(Stampatello) **Cognome**(Stampatello) **Matricola**

Inserire il presente foglio nel foglio protocollo

Le risposte vanno motivate sul foglio protocollo. Se immotivate, ancorché esatte, non verranno prese in considerazione.

1) (9 punti) Si consideri la funzione $f(x,y)=-\dfrac{3}{2}y^2+x^3+8y+9xy$

1.1) Si individuino i punti critici. Successivamente se ne stabilisca la natura.

1.2) Si trovino massimo e minimo assoluti della funzione all'interno del triangolo di vertici $(0,0)(1,0),(1,1)$ (lati compresi).

1.3) Il massimo e minimo assoluti trovati nel punto 1.2 sono assoluti anche se la funzione non è ristretta al triangolo ma definita su tutto $\mathbf{R}^2$? Rispondere argomentando.

Nella "bella" si evidenzino chiaramente le parti che risolvono rispettivamente i tre punti precedenti. Non si mischino le soluzioni parziali

Soluzione
1.1) $f_x=3x^2+9y=0$, $f_y=-3y+8+9x=0$. Confrontando le due equazioni otteniamo

$$-3x^2=3(8+9x)=0 \iff x=-1,\ -8 \implies y=-1/3\ \ -64/3$$

$$f_{xx}=6x,\quad f_{yy}=-3,\quad f_{xy}=9,$$

$$f_{xx}f_{yy}-(f_{xy})^2=-18x-81\Big|_{(-1,-1/3)}=-63 \text{ sella}$$

$$f_{xx}f_{yy}-(f_{xy})^2=-18x-81\Big|_{(-8,-64/3)}=63\quad f_{xx}=6x\Big|_{(-8,-64/3)}=-64\quad \text{massimo}$$

la cui ordinata è $f(-8,-64/3)=832/3$

1.2) All'interno del triangolo non ci sono punti critici. Se ce ne fossero li avremmo trovati nel punto 1.1. D'altra parte, essendo la funzione continua ed essendo il triangolo chiuso e limitato, massimo e minimo esistono (Teorema di Weierstrass) e vanno trovati sul bordo del triangolo che consta di tre lati.

"Base". $0\le x\le 1$, $y=0$ e quindi $f(x,0)=x^3$ il cui minimo è $x=0$ e massimo è $x=1$. Inoltre $f(0,0)=0$, $f(1,0)=1$.

"Altezza". $0\le y\le 1$, $x=1$ e quindi $g(y)\doteq f(1,y)=-\frac{3}{2}y^2+1+8y+9y$. $g'(y)=-3y^2+17\ge 0$ se e solo se $-\sqrt{17/3}\le y\le \sqrt{17/3}$ per cui la funzione è sempre crescente $(0\le y\le 1)$ e $f(1,0)=1$, $f(1,1)=15/2$.

"Ipotenusa". $g(x)=f(x,x)=x^3+\frac{15}{2}x^2+8x$, $0\le x\le 1$. $g'(x)\ge 0$ se $x\le\frac{-15-\sqrt{129}}{6}$ oppure $x\ge x_0=\frac{-15+\sqrt{129}}{6}\sim\frac{-15+11.36}{6}\sim -0.61$ per cui $f(x,x)$ cresce per $0\le x\le 1$.

Conclusione: $(0,0)$ è il punto di minimo la cui ordinata è zero e il punto di massimo è $(1,1)$ la cui ordinata è $15/2$.

1.3) Ovviamente no. I punti di massimo e minimo di cui al punto 1.2) giacciono sul bordo del triangolo e non sono tali per la funzione non ristretta.

In ogni caso la funzione non ammette né massimo né minimo assoluti. Lo studente interessato(!) cerchi di capire perché.

2) (6 punti) Si calcoli il volume compreso fra i due paraboloidi $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{4}=z$, $x^2+\frac{y^2}{2}=z$ e tale che $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{4}\le 1$,

Soluzione Si cambia variabili $x=\sqrt{2}r\cos t$, $y=2r\sin t$ da cui

$$\int_0^{2\pi} dt\int_0^1 dr 2\sqrt{2}r(r^2\cos^2 t+r^2\sin^2 t)=\sqrt{2}\pi$$

3) (9 punti) Si risolva il seguente problema di Cauchy (**la soluzione è reale e nella formula finale non deve rimanere l'unità immaginaria** i)

$$\begin{cases} x''(t)+y(t)=1 & x(0)=0,\ y(0)=0 \\ y''(t)+x(t)=t & x'(0)=y'(0)=0 \end{cases}$$

Passando alla trasformata di Laplace abbiamo

$$X(p)=\frac{1}{p^2}-\frac{p}{(p+1)(p^2+1)} \qquad Y(p)=\frac{1}{p(p+1)(p^2+1)}$$

da cui

$$x(t)=t+\frac{e^{-t}}{2}-\frac{\cos t+\sin t}{2}, \qquad y(t)=1-\frac{e^{-t}}{2}-\frac{\cos t+\sin t}{2}$$

Molti studenti qui si sono giocati il compito a causa della scarsa dimestichezza con l'algebra elementare. Forse la stessa algebra bistrattata alle scuole superiori. È una follia ridurre ad un unico denominatore $X(p)$ ed è ancora più folle scrivere $Y(p)=\frac{p-1}{p(p^4-1)}$. Altri invece hanno accoppiato la precedente follia alla “geniale” intuizione di pensare che $Y(p)=\frac{p-1}{p(p^4-1)}$ abbia un polo di ordine quattro come se a denominatore vi fosse $(p-1)^4$. Ciò li ha portati a scrivere immensi calcoli. Se mi avessero chiesto un'opinione glielo avrei certamente fatto notare.

4) (6 punti) Si dimostri il teorema: *Sia $\{f_n(x)\}$ $x\in[a,b]$ una successione di funzioni continue tali che la serie $\sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x)$ uniformemente convergente in $[a,b]$. Dimostrare che* $\int_a^b\sum_{k=1}^{+\infty} f_k(x)dx=\sum_{k=1}^{+\infty}\int_a^b f_k(x)dx$

4.1) Sulla base del teorema si dica se $\int_{-1}^1\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{x^4+k^2}dx=\sum_{k=1}^{+\infty}\int_{-1}^1\frac{1}{x^4+k^2}dx$ nell'intervallo $[-1,1]$

4.2) Argomentando si dica se il teorema ci consente di affermare

$$\int_0^{\infty}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{x^2+k^2}dx=\sum_{k=1}^{+\infty}\int_0^{\infty}\frac{1}{x^2+k^2}dx$$

4.1) Certamente si in quanto $\dfrac{1}{x^4+k^2} \leq \dfrac{1}{k^2}$ e la serie $\sum 1/k^2$ converge.

4.2) Il teorema non è più applicabile in quanto l'intervallo di integrazione ora è illimitato e nella dimostrazione è essenziale la limitatezza.

Analisi II per Ingegneria Informatica
02–03–2018 A.A. 2017/2018, Sessione Invernale, terzo appello, compito A

Nome(Stampatello) **Cognome**(Stampatello) **Matricola**

Inserire il presente foglio nel foglio protocollo

Le risposte vanno motivate sul foglio protocollo. Se immotivate, ancorché esatte, non verranno prese in considerazione.

1) (7 punti) Sia $D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \colon 0 \le x \le 1, y = e^{x-1}\}$. Si parametrizzi D tramite una curva detta $\underline{\gamma}$ e si calcoli $\displaystyle\int_{\underline{\gamma}} \omega$ dove $\omega = \dfrac{4xy + 2x^2y^2 + 1}{(1+xy)^2}dx + \dfrac{x^2}{(1+xy)^2}dy$

Soluzione si veda il compito dell'8/7/2016. **Alcune persone hanno ritenuto la precedente forma non chiusa**

2) (6 punti) Si calcoli il volume compreso fra i due paraboloidi $\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{4} = z$, $x^2 + \dfrac{y^2}{2} = z$ e tale che $\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{4} \le 1$,

Soluzione si veda la precedente soluzione

3) (9 punti) Si risolva il seguente problema di Cauchy (**la soluzione è reale e nella formula finale non deve rimanere l'unità immaginaria** i)

$$\begin{cases} x''(t) + y(t) = 1 & x(0) = 0,\ y(0) = 0 \\ y''(t) + x(t) = t & x'(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$$

Soluzione si veda la precedente soluzione

4) (8–punti) Si calcoli l'integrale $\displaystyle\oint_{|z|=2} \frac{z^2\overline{z}}{\mathrm{Re}(z^2)+5}dz$ (la circonferenza percorsa in senso antiorario; $\overline{z}$ è il complesso coniugato di z).

Soluzione Si veda il compito dell'8/7/2016.

L'integrale è

$$\oint_{|z|=2} \frac{4zdz}{\mathrm{Re}(z^2)+5} \underbrace{=}_{z=2e^{it}} \int_0^{2\pi} \frac{16ie^{2it}dt}{5+4\cos(2t)} \underbrace{=}_{e^{it}=w} \frac{1}{2}\int_{|w|=1} \frac{16w^3dw}{(w^2+2)(w-\frac{i}{\sqrt{2}})(w+\frac{i}{\sqrt{2}})} = \frac{-16i}{3}\pi$$

Solo i punti $w = \pm i/\sqrt{2}$ contano ai fini dei residui.

Analisi II per Ingegneria Elettronica & Internet
02–03–2018 A.A. 2017/2018, Sessione Invernale, terzo appello, compito B

Nome(Stampatello) **Cognome**(Stampatello) **Matricola**

È uguale al compito A tranne il secondo esercizio

Inserire il presente foglio nel foglio protocollo

Le risposte vanno motivate sul foglio protocollo. Se immotivate, ancorché esatte, non verranno prese in considerazione.

1) (9 punti) Si consideri la funzione $f(x,y) = -\frac{3}{2}y^2 + x^3 + 8y + 9xy$

1.1) Si individuino i punti critici. Successivamente se ne stabilisca la natura.

1.2) Si trovino massimo e minimo assoluti della funzione all'interno del triangolo di vertici $(0,0)(1,0),(1,1)$ (lati compresi).

1.3) Il massimo e minimo assoluti trovati nel punto 1.2 sono assoluti anche se la funzione non è ristretta al triangolo ma definita su tutto $\mathbf{R}^2$? Rispondere argomentando.

Nella “bella” si evidenzino chiaramente le parti che risolvono rispettivamente i tre punti precedenti. Non si mischino le soluzioni parziali

2) (6 punti) Si calcoli il volume compreso fra i due paraboloidi $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} = z$, $x^2 + \frac{y^2}{2} = z$ e tale che $x^2 + \frac{y^2}{2} \le 1$

Soluzione $x = r\cos t$ $y = \sqrt{2}r\sin t$

$$\int_0^{2\pi} dt \int_0^1 dr\sqrt{2}r(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}y^2) = \sqrt{2}\int_0^{2\pi}\int_0^1 drr^3\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}\pi}{4}$$

3) (9 punti) Si risolva il seguente problema di Cauchy (**la soluzione è reale e nella formula finale non deve rimanere l'unità immaginaria** i)

$$\begin{cases} x''(t) + y(t) = 1 & x(0) = 0,\ y(0) = 0 \\ y''(t) + x(t) = t & x'(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$$

Soluzione vedi compito A.

4) (6 punti) Si dimostri il teorema: *Sia* $\{f_n(x)\}$ $x \in [a,b]$ *una successione di funzioni continue tali che la serie* $\sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x)$ *uniformemente convergente in* $[a,b]$. *Dimostrare che* $\int_a^b \sum_{k=1}^{+\infty} f_k(x)dx = \sum_{k=1}^{+\infty}\int_a^b f_k(x)dx$

4.1) Sulla base del teorema si dica se $\int_{-1}^1 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{x^4+k^2}dx = \sum_{k=1}^{+\infty}\int_{-1}^1 \frac{1}{x^4+k^2}dx$ nell'intervallo $[-1,1]$

4.2) Argomentando si dica se il teorema ci consente di affermare
$$\int_0^\infty \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{x^2+k^2} dx = \sum_{k=1}^{+\infty} \int_0^\infty \frac{1}{x^2+k^2} dx$$

Analisi II per Ingegneria Informatica
02–03–2018 A.A. 2017/2018, Sessione Invernale, terzo appello, compito B

Nome(Stampatello) **Cognome**(Stampatello) **Matricola**

Inserire il presente foglio nel foglio protocollo

Le risposte vanno motivate sul foglio protocollo. Se immotivate, ancorché esatte, non verranno prese in considerazione.

1) (7 punti) Sia $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \colon 0 \le x \le 1, y = e^{x-1}\}$. Si parametrizzi D tramite una curva detta $\underline{\gamma}$ e si calcoli $\displaystyle\int_{\underline{\gamma}} \omega$ dove $\omega = \dfrac{4xy + 2x^2y^2 + 1}{(1 + xy)^2}dx + \dfrac{x^2}{(1 + xy)^2}dy$

Come il compito A

2) (6 punti) Si calcoli il volume compreso fra i due paraboloidi $\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{4} = z$, $x^2 + \dfrac{y^2}{2} = z$ e tale che $x^2 + \dfrac{y^2}{2} \le 1$

Come il compito B di Elettronica&Internet

3) (9 punti) Si risolva il seguente problema di Cauchy (**la soluzione è reale e nella formula finale non deve rimanere l'unità immaginaria** i)

$$\begin{cases} x''(t) + y(t) = t & x(0) = 0,\ y(0) = 0 \\ y''(t) + x(t) = 1 & x'(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$$

È uguale al compito A ma con $x(t)$ e $y(t)$ invertite

4) (8–punti) Si calcoli l'integrale $\displaystyle\oint_{|z|=2} \frac{z\overline{z}^2}{\text{Re}(z^2) + 5}dz$ (la circonferenza percorsa in senso antiorario; $\overline{z}$ è il complesso coniugato di z).

L'integrale è

$$\oint_{|z|=2} \frac{4\overline{z}dz}{\text{Re}(z^2) + 5} \underbrace{=}_{z=2e^{it}} \int_0^{2\pi} \frac{16idt}{5 + 4\cos(2t)} \underbrace{=}_{e^{it}=w} \frac{1}{2}\int_{|w|=1} \frac{16wdw}{(w^2 + 2)(w - \frac{i}{\sqrt{2}})(w + \frac{i}{\sqrt{2}})} = \frac{32i}{3}\pi$$

Solo i punti $w = \pm i/\sqrt{2}$ contano ai fini dei residui.