Analisi II per Ingegneria Elettronica & Internet
22–09–2018 A.A. 2017/2018, Sessione Autunnale, secondo appello

Nome(Stampatello) **Cognome**(Stampatello) **Matricola**

Inserire il presente foglio nel foglio protocollo

Le risposte vanno motivate sul foglio protocollo. Se immotivate, ancorché esatte, non verranno prese in considerazione.

1) (6.5 punti) Sia data la curva $\underline{\gamma}^+ \in \mathbf{R}^3$, percorsa in senso antiorario ed il cui sostegno è dato da $\{\underline{x} \in \mathbf{R}^3 \colon z = x^2 + y^2, z = 2 + x + y\}$. Sia data la curva $\underline{\sigma}^+ \in \mathbf{R}^3$, percorsa in senso antiorario ed il cui sostegno è dato da $\{\underline{x} \in \mathbf{R}^3 \colon z = x^2+y^2, z = 8+4x+4y\}$. Sia data la forma differenziale $\omega = y^2dx + x^2dy + xydz$. Si calcoli $\displaystyle\oint_{\underline{\gamma}^+} \omega - \oint_{\underline{\sigma}^+} \omega$

Soluzione Conviene usare il Teorema di Stokes in quanto le due curve, percorse nel modo indicato, contornano una porzione di superficie che giace sul paraboloide $z = x^2 + y^2$. La proiezione sul piano (x, y) di $\underline{\gamma}^+$ è data dal sistema $x^2+y^2 = 2+x+y$ ossia $(x-1/2)^2+(y-1/2)^2 = 5/2$. La proiezione sul piano (x, y) di $\underline{\sigma}^+$ è data dal sistema $x^2 + y^2 = 8 + 4x + 4y$ ossia $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 16$. La normale esterna alla superficie è

$$\underline{n}^e = \underline{i}\frac{-2x}{\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}} + \underline{j}\frac{-2y}{\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}} + \underline{k}\frac{1}{\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}}$$

Il rotore della forma è $\underline{i}x-\underline{j}y+\underline{k}(2x-2y) \doteq \underline{r}$ e l'integrale che dobbiamo calcolare è $\displaystyle\iint_S (\underline{r}, \underline{n}^e)d\sigma$ dove S è la porzione di superficeie detta prima e $d\sigma = \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}dx\,dy$. Quindi abbiamo $\displaystyle\iint_D (-2x^2 + 2y^2 - 2x + 2y)dx\,dy$ dove D è l'insieme del piano (x, y) compreso fra le due circonferenze di prima, insieme che può essere scritto come $D_1\backslash D_2$. Chiaramente D_1 è l'insieme del piano (x, y) per cui $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 \leq 16$, e D_2 è l'insieme del piano (x, y) per cui $(x - 1/2)^2 + (y - 1/2)^2 \leq 5/2$. Quindi possiamo scrivere $\displaystyle\iint_D (-2x^2 + 2y^2 - 2x + 2y)dx\,dy =$ $\displaystyle\iint_{D_1} (-2x^2 + 2y^2 - 2x + 2y)dx\,dy - \iint_{D_2} (-2x^2 + 2y^2 - 2x + 2y)dx\,dy$. Passando a coordinate polari si verifica che ciascuno degli integrali è nullo e quindi il risultato è zero.

2) (6.5 punti) Si risolva il seguente problema di Cauchy $\begin{cases} y''(t) + y(t) = F(t), \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0 \end{cases}$

e $\displaystyle F(t) = \int_0^t x\cos(t - x)dx$ (prodotto di convoluzione di $\cos t$ e t.)

Come al solito, sbagliare a scrivere la trasformata $\mathcal{L}(y)$ significa prendere zero all'esercizio

Soluzione Dobbiamo risolvere $\displaystyle\mathcal{L}(y) = \frac{1}{p(p^2 + 1)^2}$ e quindi $\displaystyle y(t) = \frac{-t}{2}\sin t - \cos t + 1$

3) (6.5 punti) Sia data la funzione $F(x, y, z) = \sin x^2 + \sin y^2 + \sin z^2 + z + x^2 + y^2$.

3.1) Applicando il "Teorema delle funzioni implicite", dimostrare che la relazione $F(x, y, z) = 0$ definisce nell'intorno del punto $\underline{x} = (0, 0, 0)$ una funzione $z = f(x, y)$. [Quindi esiste una sfera

$B_{\underline{0}}(r) = \{\underline{x} \in \mathbf{R}^2 \colon \|\underline{x}\| < r, \underline{x} = (x,y)\}$ tale che $F(x,y,f(x,y)) = 0$ *per ogni* $(x,y) \in B_{\underline{0}}(r)$. Il valore di r non è importante].

3.2) Dimostrare che $(0,0)$ è un punto critico per $f(x,y)$ e determinarne la natura.

Risposta (barrare): massimo, minimo sella

Soluzione Si veda qui *http://www.mat.uniroma2.it/ perfetti/didattica/gestionale-analisiII-14-15.html*, lo scritto del 21/2.

4) (6.5 punti) Calcolare l'integrale $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos t dt}{1-2p\cos t + p^2}$. (Si calcolino tutti e due i casi $|p|>1$, e $|p|<1$. [**Il risultato è reale e quindi la soluzione non deve contenere l'unità immaginaria** i.]

Soluzione

$$\int_0^{2\pi} d\vartheta \frac{\cos\vartheta}{1-2p\cos\vartheta+p^2}.$$

$|p|<1$. Con la sostituzione $z = e^{i\vartheta}$ (γ^+) l'integrale diventa

$$I = -\frac{1}{2i}\int_{\gamma^+} dz \frac{z^2+1}{z(pz^2 - z(1+p^2)+p)} = 2\pi i i\left(-\frac{1}{2ip}\right)\Big[\lim_{z\to 0}\frac{z^2+1}{(z^2-\frac{1+p^2}{p}z+1)} + \lim_{z\to p}\frac{z^2+1}{z(z-\frac{1}{p})}\Big] =$$

$$-\frac{\pi}{p}\Big[\frac{p^2+1}{p^2-1}+1\Big] = \frac{2\pi p}{1-p^2}$$

$$|p|>1. \quad I = 2\pi i\left(-\frac{1}{2\pi ip}\right)\Big[\lim_{z\to 0}\frac{z^2+1}{(z^2-\frac{1+p^2}{p}z+1)} + \lim_{z\to\frac{1}{p}}\frac{z^2+1}{z(z-p)}\Big] = \frac{2\pi}{p(p^2-1)}$$

5) (4 punti) Si dimostri il Teorema: *Sia* $A\subseteq\mathbf{R}^3$ *aperto e connesso e sia* $\omega(\underline{x}) = a(\underline{x})dx + b(\underline{x})dy + c(\underline{x})dz$ *una forma tale che* $a,b,c\in C^1(A)$. *Allora la forma è esatta se e solo se l'integrale su ogni curva chiusa regolare, semplice è nullo.*

Analisi II per Ingegneria Informatica (frontale e online)
22–09–2018 A.A. 2017/2018, Sessione Autunnale, secondo appello

Nome(Stampatello) **Cognome**(Stampatello) **Matricola**

Inserire il presente foglio nel foglio protocollo

Le risposte vanno motivate sul foglio protocollo. Se immotivate, ancorché esatte, non verranno prese in considerazione.

1) (7.5 punti) Calcolare il volume dell'insieme definito da $D = \{\underline{x} \in \mathbf{R}^3\colon\ x^2+y^2+z^2 \le 2z,\ 0 \le z \le 2(x^2+y^2)$

Svolgimento–1 Il modo più breve è integrare per strati. Prima bisogna mettere a sistema le due equazioni ed otteniamo $z=0$, $z=3/2$. Sia D_1 la porzione (cerchio) di piano orizzontale di equazione $z=z_0$ e tale che $x^2+y^2+z_0^2 \le 2z_0$. L'area del cerchio è $\pi(2z_0 - z_0^2)$. D_2 la porzione (cerchio) di piano orizzontale di equazione $z=z_0$ e tale che $z \le 2(x^2+y^2)$. L'area del cerchio è $\pi z_0/2$. Il volume che cerchiamo è

$$\pi \int_0^{3/2} dz_0 (-z_0/2 + 2z_0 - z_0^2) = 9\pi/16$$

Svolgimento–2 La proiezione sul piano (y,z) genera l'insieme compreso fra le due funzioni $y^2 = 2z - z^2$ e $z = 2y^2$ la cui intersezione è data dai punti $(0,0)$ e $(\sqrt{3}/2, 3/2)$. Il volume cercato è di rotazione per cui si ha

$$2\pi \int_0^{3/2} dz \int_{\sqrt{2z-z^2}}^{\sqrt{z/2}} y dy = 2\pi \int_0^{3/2} \frac{1}{2}\left(-\frac{z}{2} + 2z - z^2\right)$$

e si riottiene l'integrale precedente.

Svolgimento–3 Coordinate polari sferiche. Vedi pag.238 del Marcellini–Sbordone

Svolgimento –4 Coordinate cilindriche. $x = r\cos t$, $y = r\sin t$, $z = u$. Si ha $0 \le u \le 3/2$, e $\sqrt{u/2} \le r \le \sqrt{2u-u^2}$ da cui

$$\int_0^{2\pi} dt \int_0^{3/2} du \int_{\sqrt{u/2}}^{\sqrt{2u-u^2}} r dr = 2\pi \int_0^{3/2} du \frac{1}{2}(-\frac{u}{2} + 2u - u^2)$$

2) (7.5 punti) Sia $\omega > 0$. Si risolva il seguente problema di Cauchy $\begin{cases} y^{(\mathrm{iv})}(t) - y(t) = \sin(\omega t), \\ y(0) = y'(0) = y''(0) = y'''(0) = 0 \end{cases}$ badando a distinguere i due casi $\omega \ne 1$, $\omega = 1$.

Soluzione $\omega > 0$, $\omega \ne 1$.

$\mathcal{L}(y) = \dfrac{\omega}{(p^2+\omega^2)} \dfrac{1}{(p^2+1)(p^2-1)}$ da cui $y(t) = \dfrac{\omega}{2(1+\omega^2)} \sinh(t) + \dfrac{\sin(\omega t)}{\omega^4 - 1} - \dfrac{1}{2}\dfrac{\omega}{\omega^2-1} \sin t$

Per non venire travolti dai calcoli, è bene che gli studenti imparino ad organizzarli e per questo bisogna saper usare l'algebra elementare.

Ad esempio è chiaro che i due poli $\pm i\omega$ daranno luogo ad un contributo reale.

$$\lim_{p\to i\omega}\frac{\omega e^{pt}(p-i\omega)}{(p-i\omega)(p+i\omega)(p^4-1)}+\lim_{p\to -i\omega}\frac{\omega e^{pt}(p+i\omega)}{(p-i\omega)(p+i\omega)(p^4-1)}=\frac{e^{i\omega t}}{2i(\omega^4-1)}+\frac{e^{-i\omega t}}{-2i(\omega^4-1)}=$$
$$=\frac{\sin(\omega t)}{\omega^4-1}$$

$$\lim_{p\to i}\frac{\omega e^{pt}(p-i)}{(p^2+\omega^2)(p^2-1)(p+i)(p-i)}+\lim_{p\to -i}\frac{\omega e^{pt}(p+i)}{(p^2+\omega^2)(p^2-1)(p+i)(p-i)}=$$
$$=\frac{\omega e^{it}}{(\omega^2-1)(-2)(2i)}+\frac{\omega e^{-it}}{(\omega^2-1)(-2)(-2i)}=\frac{-\omega\sin t}{2(\omega^2-1)}$$

$$\lim_{p\to 1}\frac{\omega e^{pt}(p-1)}{(p^2+\omega^2)(p^2+1)(p+1)(p-1)}+\lim_{p\to -i}\frac{\omega e^{pt}(p+1)}{(p^2+\omega^2)(p^2+1)(p+1)(p-1)}=$$
$$=\frac{\omega e^{t}}{(\omega^2+1)(2)(2)}+\frac{\omega e^{-t}}{(\omega^2+1)(2)(-2)}=\frac{\omega\sinh t}{2(\omega^2+1)}$$

$\omega=1$.

$\mathcal{L}(y)=\dfrac{1}{(p^2+1)^2}\dfrac{1}{p^2-1}$ da cui $y(t)=\dfrac{1}{4}t\cos t-\dfrac{1}{2}\sin t+\dfrac{1}{4}\sinh t$

$$\lim_{p\to 1}\frac{e^{pt}(p-1)}{(p^2+1)^2(p+1)(p-1)}+\lim_{p\to -1}\frac{e^{pt}(p+1)}{(p^2+1)^2(p+1)(p-1)}=\frac{e^t}{8}+\frac{e^{-t}}{(-8)}=\frac{\sinh t}{4}$$

$$\lim_{p\to i}\frac{d}{dp}\frac{e^{pt}}{(p+i)^2(p^2-1)}+\lim_{p\to -i}\frac{d}{dp}\frac{e^{pt}}{(p-i)^2(p^2-1)}=$$
$$=\underbrace{\frac{te^{it}}{(-4)(-1-1)}+\frac{te^{-it}}{(-4)(-1-1)}}_{\frac{t}{4}\cos t}-\lim_{p\to i}\frac{2e^{pt}}{(p+i)^3(p^2-1)}-\lim_{p\to -i}\frac{2e^{pt}}{(p-i)^3(p^2-1)}+$$
$$-\lim_{p\to i}\frac{2pe^{pt}}{(p+i)^2(p^2-1)^2}-\lim_{p\to -i}\frac{2pe^{pt}}{(p-i)^2(p^2-1)^2}=$$
$$=\frac{t}{4}\cos t-\frac{2e^{it}}{(-8i)(-2)}-\frac{2e^{-it}}{(8i)(-2)}-\frac{2ie^{it}}{(-4)(-1-1)^2}-\frac{-2ie^{-it}}{(-4)(-1-1)^2}=$$
$$=\frac{t}{4}\cos t-\frac{\sin t}{4}-\frac{\sin t}{4}=\frac{t}{4}\cos t-\frac{\sin t}{2}$$

3) (7.5 punti) Calcolare l'integrale $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{\cos t dt}{1-2p\cos t+p^2}$. (Si calcolino tutti e due i casi $|p|>1$, e $|p|<1$. [**Il risultato è reale e quindi la soluzione non deve contenere l'unità immaginaria** i.]

Soluzione vedi sopra.

4) (7.5 punti) Si risolva il seguente problema di Cauchy $\begin{cases} y''(t)+y(t)=F(t), \\ y(0)=0,\ y'(0)=0\end{cases}$

e $F(t)=\displaystyle\int_0^t x\cos(t-x)dx$ (prodotto di convoluzione di $\cos t$ e t.)

Come al solito, sbagliare a scrivere la trasformata $\mathcal{L}(y)$ significa prendere zero all'esercizio

Soluzione vedi sopra.