Paolo Perfetti, Dipartimento di matematica, Università degli Studi di Roma “Tor Vergata”, facoltà di Ingegneria

Analisi II per Ingegneria Elettronica & Internet
30–07–2018 A.A. 2017/2018, Sessione Estiva, terzo appello

Nome(Stampatello) **Cognome**(Stampatello) **Matricola**

Inserire il presente foglio nel foglio protocollo

Le risposte vanno motivate sul foglio protocollo. Se immotivate, ancorché esatte, non verranno prese in considerazione.

1) (7.5 punti) Sia data la curva $\underline{\gamma}^+ \in \mathbf{R}^3$, percorsa in senso antiorario ed il cui sostegno è dato da $\{\underline{x} \in \mathbf{R}^3 \colon x^2+y^2=1, z=x+y+3\}$. Sia data la curva $\underline{\sigma}^+ \in \mathbf{R}^3$, percorsa in senso antiorario ed il cui sostegno è dato da $\{\underline{x} \in \mathbf{R}^3 \colon x^2+y^2=1, z=-x-2y-3\}$. Sia data la forma differenziale $\omega = \dfrac{x^3+y^3}{3}dx + \left(\dfrac{y^3}{3}+\dfrac{z^2}{2}\right)dy + \left(\dfrac{z^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}\right)dz$. Si calcoli $\displaystyle\oint_{\underline{\gamma}^+}\omega - \oint_{\underline{\sigma}^+}\omega$

Prima soluzione del problema 1 La curva $\underline{\gamma}^+ \cup \underline{\sigma}^-$, contorna una striscia di superficie cilindrica, detta S ed è percorsa in senso antiorario. Per il Teorema di Stokes

$$\oint_{\gamma^+\cup\underline{\sigma}^-}\omega = \oint_{\underline{\gamma}^+}\omega - \oint_{\underline{\sigma}^+}\omega = \iint_S (\mathrm{rot}\underline{F}(\underline{x})\cdot\underline{n}^e)\,d\sigma$$

$$\mathrm{rot}\underline{F}(\underline{x}) = -(z,x^2,y^2), \quad \underline{n}^e = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, 0\right)$$

Parametrizziamo la superficie S in coordinate polari ponendo $x=\cos t$, $y=\sin t$ $z=u$ con $0\le t\le 2\pi$, $-x-2y-3\le z\le x+y+3$ ossia $-\cos t-2\sin t-3\le u\le \cos t+\sin t+3$. Inoltre

$$\mathrm{rot}\underline{F}(\underline{x})\cdot\underline{n}^e = \frac{-u\cos t-\cos^2 t\sin t}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad d\sigma = \sqrt{x^2+y^2}dt\,du$$

e l'integrale diventa

$$\int_0^{2\pi}dt\int_{-\cos t-2\sin t-3}^{\cos t+\sin t+3}du(-u\cos t-\cos^2 t\sin t)$$

Ora, detto $C=\cos t$, $S=\sin t$ si ha

$$\int_0^{2\pi}dt\int_{-\cos t-2\sin t-3}^{\cos t+\sin t+3}du\cos^2 t\sin t = \int_0^{2\pi}dt(2C^3S+3C^2S^2+6C^2S) = \int_0^{2\pi}dt3C^2S^2 = $$
$$= \int_0^{2\pi}\frac{3}{4}(\sin(2t))^2dt = \frac{3}{4}\pi$$

$$\int_0^{2\pi}dt\int_{-C-2S-3}^{C+S+3}duuC = \int_0^{2\pi}dt\frac{C}{2}(-3S^2-6S-2CS) = 0$$

per cui il risultato è $-3\pi/4$. Un altro modo di procedere consiste nell'eseguire direttamente due integrali curvilinei

Seconda soluzione del problema 1) Applichiamo Stokes ai due singoli piani.

Piano basso percorso in senso antiorario. La componente z della normale esterna punta verso l'alto ed è $\underline{n}^{(e)} = (1,2,1)/\sqrt{6}$. L'integrale è ($x = r\cos t$, $y = r\sin t$, $z = -r\cos t - 2r\sin t - 3$)

$$\int_0^1 rdr \int_0^{2\pi} (-z - 2x^2 - y^2)d\sigma = \int_0^1 rdr \int_0^{2\pi} (x + 2y + 3 - 2x^2 - y^2) = \frac{9\pi}{4}$$

Piano alto percorso in senso orario. La componente z della normale esterna punta verso il basso ed è $\underline{n}^{(e)} = (1,1,-1)/\sqrt{3}$. L'integrale è ($x = r\cos t$, $y = r\sin t$, $z = -r\cos t - 2r\sin t - 3$)

$$\int_0^1 rdr \int_0^{2\pi} (-z - x^2 + y^2)d\sigma = \int_0^1 rdr \int_0^{2\pi} (-3) = -3\pi$$

La somma dà $-3\pi/4$. Negli integrali scritti sono stati omessi alcuni di quelli che con certezza avrebbero dato zero.

2) (7.5 punti) Sia $D = \{(y,z) \in \mathbf{R}^2 \colon y = e^t, z = e^{2t}, (\ln 6)/2 \le t \le (\ln(20))/2\}$. Sia V_y l'insieme ottenuto ruotando D di 360^0 gradi intorno all'asse z e sia S la superficie laterale di V_y. Si calcoli l'area di S.

Soluzione del problema 2 Bisogna applicare la prima formula a pag.6 del Giornale delle lezioni che nel nostro caso diventa

$$2\pi \int_{\frac{\ln 6}{2}}^{\frac{\ln 20}{2}} e^t \sqrt{e^{2t} + 4e^{4t}}dt = 2\pi \int_{\frac{\ln 6}{2}}^{\frac{\ln 20}{2}} e^{2t} \sqrt{1 + 4e^{2t}}dt = 2\pi \frac{1}{12}(1 + 4e^{2t})^{\frac{3}{2}} \Big|_{\frac{\ln 6}{2}}^{\frac{\ln 20}{2}} = \frac{\pi}{6}(729 - 125)$$

Alcuni studenti hanno male interpretato l'insieme D che è un oggetto unidimensionale e che potrebbe scriversi pure come $D = \{(y,z) \in \mathbf{R}^2 \colon z = y^2, \sqrt{6} \le y \le \sqrt{20}\}$.

3) (7.5 punti) Sia data la seguente funzione $f(x,y) = \dfrac{x^4}{2} - \dfrac{y^3}{6} \doteq z$ soggetta al vincolo $x^2 + \dfrac{y^2}{4} \le 1$. Se ne trovino i punti critici e se ne stabilisca la natura.

Prima Soluzione del problema 3 L'insieme $x^2 + \dfrac{y^2}{4} < 1$ è aperto e quindi i punti di estremo sono liberi. $f_x = 0$ e $f_y = 0$ danno come risultato $x = y = 0$. Tutti gli elementi della matrice hessiana sono nulli per cui non ci dà nessun aiuto. Bisogna osservare che $f(t,0) = t^4/2$ e quindi si ha un minimo mentre $f(0,t) = -t^3/6$ e si ha un flesso. Se ne conclude che il punto critico è una sella.

Sia ora $x^2 + \dfrac{y^2}{4} = 1$. La lagrangiana è

$$F(x,y,\lambda) = \frac{x^4}{2} - \frac{y^3}{6} - \lambda(x^2 + \frac{y^2}{4} - 1)$$

$$F_x = 2x(x^2 - \lambda) = 0, \quad F_y = -\frac{y^2}{2}(y + \lambda) = 0, \quad F_\lambda = x^2 + \frac{y^2}{4} - 1 = 0$$

Dalla prima otteniamo $x = 0$ e quindi dalla terza otteniamo $y = \pm 2$. La seconda ci dà $y = \mp 2$ per cui abbiamo i punti critici vincolati $P_1 = (0,2,-2)$, $f(P_1) = -4/3$, $P_2 = (0,-2,2)$ $f(P_2) = 4/3$

Sia ora oppure $x^2 = \lambda \ge 0$. Se $y = 0$, la terza ci dà $\lambda = \pm 1$ e quindi abbiamo i due punti critici $P_3 = (1,0,1)$ $f(P_3) = 1$, $P_4 = (-1,0,1)$ $f(P_4) = 1$.

Sempre con $x^2=\lambda$ e $y=-\lambda$ dalla seconda, si ottiene dalla terza $\frac{5}{4}\lambda^2=1$ ossia $\lambda=2\sqrt{2}-2\doteq c$ e quindi i due punti critici $P_5=(\sqrt{c},-c,c)$ $P_6=(-\sqrt{c},-c,c)$. $f(P_5)=F(P_6)=\dfrac{8\sqrt{2}-10}{3}\sim 0.44$

Certamente i punti P_1 e P_2 sono rispettivamente di minimo e massimo. Ciò è dovuto al fatto che l'insieme vincolante è compatto (è una ellisse) e la funzione vincolata è continua. Il Teorema (di Weierstrass) secondo cui una funzione continua su di un compatto assume massimo e minimo continua a valere per funzioni reali di più variabili reali. Naturalmente i punti P_1 e P_2 esistono solo se la funzione è vincolata.

Per sapere la natura degli altri punti critici vincolati, bisogna usare il contenuto della pagina 20–21 del Giornale delle lezioni

Teorema 6.2 *Siano* $f,g\colon X\to$, $\overset{o}{X}\subset \mathbf{R}^n$ *di classe* C^2. *Se la forma quadratica* $\sum_{i,j=1}^n[f_{x_ix_j}(\underline{x}^o)-\lambda^o g_{x_ix_j}(\underline{x}^o)]h_ih_j=(\underline{h},H(\underline{x}^o)\underline{h})$, *ristretta all'insieme dei vettori* $\underline{h}$ *tangenziali al vincolo in* $\underline{x}^o$ *ossia* $(\underline{\partial} g(\underline{x}^o),\underline{h})=0$, *è definita negativa (positiva) allora* $\underline{x}^o$ *è punto di massimo (minimo) forte vincolato.*

Partiamo da P_1. $(\underline{\partial} g(\underline{x}^o),\underline{h})=0$, nel nostro caso diventa $(2x,y/2)|_{P_1}\cdot(h_1,h_2)=0$ ossia $0\cdot h_1+1\cdot h_2=0$ ossia $h_2=0$.

$$\sum_{i,j=1}^n[f_{x_ix_j}(P_1)-\lambda^o g_{x_ix_j}(P_1)]h_ih_j=(\underline{h},H(P_1)\underline{h}),=(h_1,0)\left[\begin{pmatrix}0&0\\0&-2\end{pmatrix}-(-2)\begin{pmatrix}2&0\\0&-1/2\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}h_1\\0\end{pmatrix}$$

ossia

$$(h_1,0)\begin{pmatrix}4&0\\0&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}h_1\\0\end{pmatrix}=4h_1^2$$

ossia una forma quadratica strettamente positiva e quindi il punto è di minimo locale (come avevamo già trovato solo che il discorso di prima ci ha consentito di dire che il minimo è pure assoluto)

P_2. Gli stessi calcoli portano a

$$(h_1,0)\left[\begin{pmatrix}0&0\\0&2\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}2&0\\0&-1/2\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}h_1\\0\end{pmatrix}=(h_1,0)\begin{pmatrix}-4&0\\0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}h_1\\0\end{pmatrix}=-4h_1^2$$

e quindi è un massimo locale (che sappiamo essere assoluto)

P_3. $(\underline{\partial} g(\underline{x}^o),\underline{h})=0$, in questo caso diventa $(2x,y/2)|_{P_3}\cdot(h_1,h_2)=0$ ossia $2\cdot h_1+0\cdot h_2=0$ ossia $h_1=0$.

$$(0,h_2)\left[\begin{pmatrix}6&0\\0&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&0\\0&-1/2\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}0\\h_2\end{pmatrix}=(0,h_2)\begin{pmatrix}4&0\\0&1/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\h_2\end{pmatrix}=h_2^2/2$$

minimo locale

P_4. $(\underline{\partial} g(\underline{x}^o),\underline{h})=0$, in questo caso diventa $(2x,y/2)|_{P_4}\cdot(h_1,h_2)=0$ ossia $-2\cdot h_1+0\cdot h_2=0$ ossia $h_1=0$.

$$(0,h_2)\left[\begin{pmatrix}6&0\\0&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&0\\0&-1/2\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}0\\h_2\end{pmatrix}=(0,h_2)\begin{pmatrix}4&0\\0&1/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\h_2\end{pmatrix}=h_2^2/2$$

minimo locale

P_5. $(\partial g(\underline{x}^o), \underline{h}) = 0$, in questo caso diventa $(2x, y/2)|_{P_5} \cdot (h_1, h_2) = 0$ ossia $2\sqrt{c} \cdot h_1 - c \cdot h_2/2 = 0$ ossia $h_1 = h_2\sqrt{c}/4$.

$$(\frac{\sqrt{c}}{4}h_2, h_2)\left[\begin{pmatrix} 6c & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} - c\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{c}}{4}h_2 \\ h_2 \end{pmatrix} = (\frac{\sqrt{c}}{4}h_2, h_2)\begin{pmatrix} 4c & 0 \\ 0 & c/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{c}}{4}h_2 \\ h_2 \end{pmatrix} = \frac{h_2^2}{2}(c + \frac{c^2}{2})$$

minimo locale.

P_6. $(\partial g(\underline{x}^o), \underline{h}) = 0$, in questo caso diventa $(2x, y/2)|_{P_6} \cdot (h_1, h_2) = 0$ ossia $-2\sqrt{c} \cdot h_1 - c \cdot h_2/2 = 0$ ossia $h_1 = -h_2\sqrt{c}/4$.

$$(\frac{-\sqrt{c}}{4}h_2, h_2)\left[\begin{pmatrix} 6c & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} - c\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} \frac{-\sqrt{c}}{4}h_2 \\ h_2 \end{pmatrix} = (\frac{-\sqrt{c}}{4}h_2, h_2)\begin{pmatrix} 4c & 0 \\ 0 & c/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{-\sqrt{c}}{4}h_2 \\ h_2 \end{pmatrix} = \frac{h_2^2}{2}(c + \frac{c^2}{2})$$

minimo locale.

Seconda soluzione del problema 3. Si parametrizza il vincolo come $x = \cos t \doteq C$, $y = 2\sin t \doteq S$ e la funzione ristretta al vincolo diventa

$$f(\cos t, 2\sin t) = \frac{C^4}{2} - \frac{4S^3}{3} \doteq q(t) \qquad q'(t) \geq 0 \iff CS(1 - S)^2 \leq 0$$

e si vede che a $t = \pi/2$, e $t = 3\pi, 2$, corrispondono dei minimi. A $t = 0$ e $t = \pi$ dei massimi da cui $(\pm 1, 0)$ sono miniimi e $(0, \pm 2)$ dei massimi.

4) (7.5 punti) Calcolare l'integrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^{1/4}}{1 + x^2}dx$. [**Il risultato è reale e positivo quindi la soluzione deve essere positiva e non deve contenere l'unità immaginaria** i.]

Il cammino che adotto io è quello "a Packman" a pagina 12 del Giornale delle lezioni ma si può adottare pure un cammino analogo (non uguale) a quello a pag.46 delle lezioni di Tauraso che ha il vantaggio di costringere a calcolare un solo residuo in $z = i$.

Soluzione del problema 4. Utilizzando il cammino a pag.12 del Giornale delle lezione si perviene a

$$I(1 - e^{\frac{2i\pi}{4}}) = 2\pi i \sum_{z=\pm i} \text{Res} f(z) = 2\pi i \left(\frac{e^{i\frac{\pi}{8}}}{2i} + \frac{e^{i\frac{3\pi}{8}}}{-2i}\right) =$$

ossia

$$I(1-i) = 2\pi i \sum_{z=\pm i} \text{Res} f(z) = \pi e^{\frac{i\pi}{4}}\left(e^{i\frac{-\pi}{8}} - e^{i\frac{\pi}{8}}\right) \implies I = \pi e^{\frac{i\pi}{4}}\frac{-2i\sin\frac{\pi}{8}}{\sqrt{2}e^{\frac{i7\pi}{4}}} = \pi\frac{-2i\sin\frac{\pi}{8}}{\sqrt{2}(-i)} = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{2}}{2}}$$

Gli studenti sono invitati a rifarsi i calcoli e ad impratichirsi con gli incastri "micidiali" fra algebra e numeri complessi che danno luogo a risultati reali. Inoltre un integrale quasi uguale lo si può trovare a pag.12 del Giornale delle lezioni

5) (5 punti) Si dimostri il Teorema: *Sia* $A \subseteq \mathbf{R}^3$ *aperto e connesso e sia* $\omega(\underline{x}) = a(\underline{x})dx + b(\underline{x})dy + c(\underline{x})dz$ *una forma tale che* $a, b, c \in C^1(A)$. *Allora la forma è esatta se e solo se l'integrale su ogni curva chiusa regolare, semplice è nullo.*

Analisi II per Ingegneria Informatica
02–07–2018 A.A. 2017/2018, Sessione Estiva, secondo appello

Nome(Stampatello) **Cognome**(Stampatello) **Matricola**

Inserire il presente foglio nel foglio protocollo

Le risposte vanno motivate sul foglio protocollo. Se immotivate, ancorché esatte, non verranno prese in considerazione.

1) (7.5 punti) Sia $D=\{(y,z)\in\mathbf{R}^2\colon y=e^t, z=e^{2t}, (\ln 6)/2\le t\le(\ln(20))/2\}$. Sia V_y l'insieme ottenuto ruotando D di 360^0 gradi intorno all'asse z e sia S la superficie laterale di V_y. Si calcoli l'area di S.

Soluzione del primo esercizio Si veda il compito di Elettronica&Internet

2) (7.5 punti) Sia $\underline{\gamma}^+$ la curva (non chiusa) di sostegno $x^2+4y^2=9$, $y\ge 0$. Sia data la forma differenziale

$$\omega=\frac{2x-y}{x^2-xy+y^2}dx+\frac{2y-x}{x^2-xy+y^2}dy$$

Si calcoli $\displaystyle\int_{\underline{\gamma}^+}\omega$

Soluzione del secondo esercizio È facile vedere che la forma è chiusa. La curva giace in una porzione del piano che è semplicemente connessa, ad esempio la porzione $\{\underline{x}\in\mathbf{R}^2\colon y\ge 0,\ (x,y)\neq(0,0)\}$ e quindi la forma è esatta. Il potenziale è $v(x,y)=\ln(x^2+y^2-xy)$ per cui il risultato è zero anche se la curva non è chiusa.

Una volta constatata la chiusura, si sarebbe potuto passare direttamente a cercare il potenziale ed ottenere $v(x,y)=\ln(x^2+y^2-xy)$ ma va verificato che il dominio di $v(x,y)$ contiene il dominio di ω. Ciò è vero e quindi la forma è esatta anche senza passare attraverso la semplice connessione.

3) (7.5 punti) Calcolare l'integrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x^{1/4}}{(1+x^2)^2}dx$. [**Il risultato è reale e positivo quindi la soluzione deve essere positiva e non deve contenere l'unità immaginaria** i.]

Il cammino che adotto io è quello "a Packman" a pagina 12 del Giornale delle lezioni ma si può adottare pure un cammino analogo (non uguale) a quello a pag.46 delle lezioni di Tauraso che ha il vantaggio di costringere a calcolare un solo residuo. in $z=i$.

$$I(1-e^{\frac{2i\pi}{4}})=2\pi i\sum_{z=\pm i}\mathrm{Res}f(z)=2\pi i\left[\lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\frac{z^{1/4}}{(z+i)^2}+\lim_{z\to -1}\frac{d}{dz}\frac{z^{1/4}}{(z-i)^2}\right]=$$

$$=2\pi i\left[\frac{1}{4}\frac{e^{-i\frac{3\pi}{8}}}{-4}-2\frac{e^{i\frac{\pi}{8}}}{-8i}+\frac{1}{4}\frac{e^{-i\frac{9\pi}{8}}}{-4}-2\frac{e^{i\frac{3\pi}{8}}}{8i}\right]=2\pi i\left[\frac{1}{-16}e^{-i\frac{3\pi}{8}}+\frac{1}{16}e^{-i\frac{\pi}{8}}+\frac{e^{i\frac{\pi}{8}}}{4i}-\frac{e^{i\frac{3\pi}{8}}}{4i}\right]$$

$$=2\pi i\left[\frac{e^{i\frac{-\pi}{4}}}{16}(e^{i\frac{\pi}{8}}-e^{-i\frac{\pi}{8}})+\frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{4i}(e^{-i\frac{\pi}{8}}-e^{i\frac{\pi}{8}})\right]$$

e quindi

$$I(1-i) = -\pi\frac{1-i}{4\sqrt{2}}\sin\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{\sqrt{2}}(1-i)\sin\frac{\pi}{8} \implies I = \frac{3\pi}{4\sqrt{2}}\sin\frac{\pi}{8} = \frac{3\pi}{4\sqrt{2}}\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}}$$

Gli studenti sono invitati a rifarsi i calcoli e ad impratichirsi con gli incastri "micidiali" fra algebra e numeri complessi che danno luogo a risultati reali. Inoltre un integrale uguale lo si può trovare a pag.12 del Giornale delle lezioni

4) (7.5 punti) Si risolva il seguente problema di Cauchy $\begin{cases} y''(t)+y(t)=F(t), \\ y(0)=0,\ y'(0)=0 \end{cases}$

e $F(t)=\displaystyle\int_0^t \cos(t-x)\sin x dx$ (prodotto di convoluzione di $\cos t$ e $\sin t$.)

Come al solito, sbagliare a scrivere la trasformata $\mathcal{L}(y)$ significa prendere zero all'esercizio

Soluzione del problema 4. $\mathcal{L}(y) = \dfrac{p}{(p^2+1)^3}$ per cui

$$\begin{aligned}
y(t) &= \sum_{p=\pm i}\text{Res}\frac{pe^{pt}}{(p^2+1)^3} = \frac{1}{2}\frac{d^2}{dp^2}\frac{pe^{pt}}{(p+i)^3}\Big|_{p=i} + \frac{1}{2}\frac{d^2}{dp^2}\frac{pe^{pt}}{(p-i)^3}\Big|_{p=-i} \\
&= \frac{1}{2}\frac{d}{dp}\left[\frac{tpe^{pt}+e^{pt}}{(p+i)^3} - \frac{3pe^{pt}}{(p+i)^4}\right]\Big|_{p=i} + \frac{1}{2}\frac{d}{dp}\left[\frac{tpe^{pt}+e^{pt}}{(p-i)^3} - \frac{3pe^{pt}}{(p-i)^4}\right]\Big|_{p=-i} = \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{t^2pe^{pt}+2te^{pt}}{(p+i)^3} - \frac{3e^{pt}(1+tp)}{(p+i)^4}\right]\Big|_{p=i} + \frac{1}{2}\left[\frac{t^2pe^{pt}+2te^{pt}}{(p-i)^3} - \frac{3e^{pt}(1+tp)}{(p-i)^4}\right]\Big|_{p=-i} + \\
&- \frac{1}{2}\left[\frac{3e^{pt}+pte^{pt}}{(p+i)^4} - \frac{12pe^{pt}}{(p+i)^5}\right]\Big|_{p=i} - \frac{1}{2}\left[\frac{3e^{pt}+pte^{pt}}{(p-i)^4} - \frac{12pe^{pt}}{(p-i)^5}\right]\Big|_{p=-i}
\end{aligned}$$

ed ora per scoprire quale è la sua espressione (reale), esplicitiamo i calcoli sommando i termini omogenei.

$$\frac{1}{2}\frac{t^2pe^{pt}}{(p+i)^3} + \frac{1}{2}\frac{t^2pe^{pt}}{(p-i)^3} \to \frac{1}{2}\frac{it^2e^{it}}{-8i} + \frac{1}{2}\frac{-t^2ie^{-it}}{8i} = \frac{-t^2\cos t}{8}$$

$$\frac{1}{2}\frac{2te^{pt}}{(p+i)^3} + \frac{1}{2}\frac{2te^{pt}}{(p-i)^3} \to \frac{1}{2}\frac{2te^{it}}{-8i} + \frac{1}{2}\frac{2te^{-it}}{8i} = \frac{-t\sin t}{4}$$

$$-\frac{1}{2}\frac{3e^{pt}}{(p+i)^4} - \frac{1}{2}\frac{3e^{pt}}{(p-i)^4} \to -\frac{1}{2}\frac{3e^{it}}{16} - \frac{1}{2}\frac{3e^{-it}}{16} = \frac{-3}{16}\cos t$$

$$-\frac{1}{2}\frac{pte^{pt}}{(p+i)^4} - \frac{1}{2}\frac{pte^{pt}}{(p-i)^4} \to -\frac{1}{2}\frac{ite^{it}}{16} - \frac{1}{2}\frac{-ite^{-it}}{16} = \frac{-t}{16}\sin t$$

$$\frac{-1}{2}\frac{3e^{it}(1+ti)}{(2i)^4} + \frac{-1}{2}\frac{3e^{-it}(1-ti)}{(-2i)^4} = \frac{-3}{16}\cos t + \frac{3}{16}t\sin t$$

$$6\frac{pe^{pt}}{(p+i)^5} + 6\frac{pe^{pt}}{(p-i)^5} \to 6\frac{ie^{it}}{32i} + 6\frac{-ie^{-it}}{-32i} = \frac{3}{8}\cos t$$

La somma di tutti i contributi è il risultato $y(t) = \dfrac{-t^2}{8}\cos t - \dfrac{t}{8}\sin t$