Ing. Informatica, frontale e online, A.A.2015–2016

Giornale delle lezioni; materiale svolto a lezione e non presente sulle dispense

Gli esercizi per casa e non svolti a lezione sono contraddistinti con ♠

Gli esercizi e/o argomenti svolti a lezione ma non presenti sulle dispense sono contraddistinti con •

Lezione del 29/2/2016 integrali multipli

Pag.1,2,3 fino a "Si pone". Pag.5 (nel Teorema 1 sostituire le parole "chiuso limitato e misurabile" con "semplice rispetto ad uno degli assi o tutti e due"). Pag.5 escluso la parte che comincia con "Dato che". Pag.7 fino ai due grafici esclusi. Pag.8 esempio 1.

Lezione del 03/03/2016 integrali multipli

Pag.3 da "Si noti" fino alla fine della pagina. Esempio 2 fra pag.8 e 9. Esempio 3 fra pag.9 e 10. Pag.12 e 13 fino a "ad esempio". Nel teorema 5 di pag.13, alla parola "misurabile" sostituire "semplice rispetto ad almeno uno degli assi". Pag.14 a partire da "Un altro" e fino alla fine.

L'ultimo integrale di pag.5 è stato risolto anche considerando D come semplice rispetto all'asse delle x.

$$D = \{\underline{x}: 0 \le y \le 1,\ -\sqrt{1-y} \le x \le \sqrt{1-y}\}$$

per cui

$$V = \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}} (1-x+y)dx = \int_0^1 dy \left[x - \frac{x^2}{2} + yx\right]_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}} = \int_0^1 dy \left(2\sqrt{1-y} + 2y\sqrt{1-y}\right)$$

$$2\int_0^1 dy\sqrt{1-y} = 2\frac{2}{3}(1-y)^{3/2}\Big|_1^0 = \frac{4}{3}$$

$$2\int_0^1 dyy\sqrt{1-y} = 2\int_0^1 dyy\left(-\frac{2}{3}(1-y)^{3/2}\right)' = 2\left[y\frac{-2}{3}(1-y)^{3/2}\right]_0^1 + \frac{4}{3}\int_0^1 dy(1-y)^{3/2} =$$
$$= \frac{4}{3}\int_0^1 dy(1-y)^{3/2} = \frac{4}{3}\frac{2}{5}(1-y)^{5/2}\Big|_1^0 = \frac{8}{15}$$

La somma delle due quantità dà $\dfrac{4}{3} + \dfrac{8}{15} = \dfrac{28}{15}$

Calcolo dell'area del cerchio di raggio r tramite le coordinate polari. L'area del cerchio è scrivibile come $\displaystyle\int\int_{x^2+y^2\le r^2} dx\,dy$. Cambiamo variabili $x = \rho\cos t$, $y = \rho\sin t$, con $0 \le \rho \le r$, $0 \le t \le 2\pi$. Il determinante della matrice iacobiana è $x_\rho y_t - x_t y_\rho = \rho$. Alla fine otteniamo

$$\int\int_{x^2+y^2\le r^2} dx\,dy = \int_0^{2\pi} dt \int_0^r d\rho\,\rho = 2\pi\int_0^r \rho d\rho = 2\pi\frac{1}{2}\rho^2\Big|_0^r = \pi r^2$$

Facendo un parallelo con gli appunti di Tauraso, le variabili (u, v) in questo caso sono date da (ρ, t). L'insieme D, è il cerchio $x^2 + y^2 \le r^2$. Ciò che lì è $\Phi^{-1}(D)$ qui è il rettangolo $[0, 2\pi] \times$

$[0,r] \ni (t,\rho)$. L'applicazione Φ che io ho chiamato a lezione $\underline{\varphi}\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ è quella scritta sopra: $\underline{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2)$, $x = \varphi_1(\rho,t) = \rho\cos t$, $y = \varphi_2(\rho,t) = \rho \sin t$.

Le funzioni φ_1 e φ_2, devono avere le derivate prime continue e ciò è vero. *L'applicazione $\underline{\varphi}$ deve poi essere biunivoca e questo, con le coordinate polari, non è possibile. Infatti i punti $(\rho,0)$ e $(\rho,2\pi)$ del rettangolo, vengono mandati nello stesso punto del cerchio. Inoltre tutti i punti dell'insieme $(\rho,t) = \{0\} \times [0,2\pi]$ vengono mandati in $(x,y) = (0,0)$. Il teorema sul cambio di variabili continua a valere lo stesso in quanto la condizione di biunivocità può essere sostituita con una condizione in cui la biunivocità è persa su di un insieme di area nulla.*

L'applicazione inversa $\underline{\varphi}^{-1}(x,y)$ ($\Phi^{-1}(x,y)$ per Tauraso) è data da

$$\rho = \sqrt{x^2+y^2}, \qquad t = \arctan\frac{y}{x} \text{ se } x > 0,$$
$$t = \arctan\frac{y}{x} + \pi \text{ se } x < 0, \qquad t = \pi/2 \text{ se } x = 0 \ \wedge \ y > 0,$$

Se $x = 0$ e $y < 0$, non è possibile definire $\underline{\varphi}^{-1}$ in modo che sia biunivoca e continua sul cerchio. Infatti se $y < 0$,

$$L_1 \doteq \lim_{(x,y)\to(0^+,y)} \arctan\frac{y}{x} = \frac{-\pi}{2}, \qquad L_2 \doteq \lim_{(x,y)\to(0^-,y)} \arctan\frac{y}{x} + \pi = 3\frac{\pi}{2}.$$

Notare che $L_2 - L_1 = 2\pi$. Se giro di 360 gradi in senso antiorario, la variazione di t in radianti è 2π.

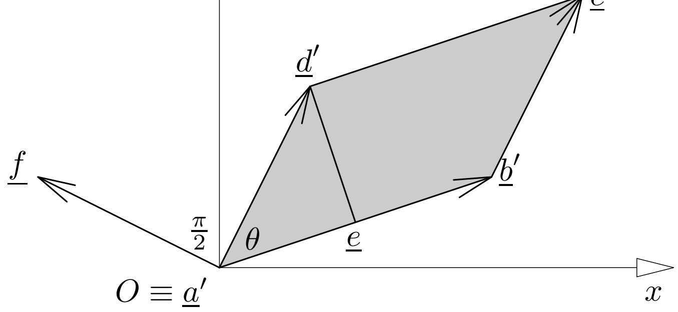
Lezione del 07/03/2016 integrali multipli

• *“Spiegazione” della comparsa del determinante della matrice iacobiana nel cambio di variabili.* Supponiamo di voler eseguire il cambio di coordinate (ricordo che $\underline{x} = (x,y)$, $\underline{u} = (u,v)$,) $\underline{x} \doteq \underline{\varphi}(\underline{u}) = (\alpha(\underline{u}), \beta(\underline{u}))$ (a lezione il ruolo di $\underline{x}$ e $\underline{u}$ era invertito ed in luogo di $\underline{\varphi}$ c'era $\underline{\varphi}^{-1}$). Prendiamo nel piano (u,v) il rettangolo di vertici $\underline{a} = (u_0,v_0)$, $\underline{b} = (u_1,v_0)$, $\underline{c} = (u_1,v_1)$, $\underline{d} = (u_0,v_1)$. La trasformazione manda i quattro punti in

$$\underline{a}' = \underline{\varphi}(u_0,v_0), \quad \underline{b}' = \underline{\varphi}(u_1,v_0), \quad \underline{c}' = \underline{\varphi}(u_1,v_1), \quad \underline{d}' = \underline{\varphi}(u_0,v_1)$$

ed i vettori $\underline{b} - \underline{a}$, $\underline{d} - \underline{a}$ diventano per il teorema di Lagrange

$$\underline{b}' - \underline{a}' = \underline{\varphi}(u_1,v_0) - \underline{\varphi}(u_0,v_0) = \Big(\underline{\varphi}_u(\xi,v_0)\Big)\cdot(u_1-u_0), \qquad u_0 \le \xi \le u_1$$
$$\underline{d}' - \underline{a}' = \underline{\varphi}(u_0,v_1) - \underline{\varphi}(u_0,v_0) = \Big(\underline{\varphi}_v(u_0,\eta)\Big)\cdot(v_1-v_0), \qquad v_0 \le \eta \le v_1$$



$\underline{f} - \underline{a}'$ è ortogonale a $\underline{d}' - \underline{a}'$ e quindi, se quest'ultimo ha coordinate

$$((\varphi_1)_v(u_0,\eta)(v_1-v_0),(\varphi_2)_v(u_0,\eta)(v_1-v_0))$$

$\underline{f} - \underline{a}'$ ha coordinate (oppure l'opposto ma a noi serve il modulo)

$$(-(\varphi_2)_v(u_0,\eta)(v_1-v_0),(\varphi_1)_v(u_0,\eta)(v_1-v_0))$$

L'area è data da

$$|\underline{b}'-\underline{a}'|\cdot|\underline{e}-\underline{d}'| = |\underline{b}'-\underline{a}'|\cdot|\underline{d}'-\underline{a}'|\cdot|\sin\theta| = |\underline{b}'-\underline{a}'|\cdot|\underline{d}'-\underline{a}'|\cdot|\cos(\theta+\frac{\pi}{2})| =$$
$$= \underbrace{|(\underline{b}'-\underline{a}',\underline{f}-\underline{a}')|}_{prodotto\ scalare} =$$
$$= |-(\varphi_1)_u(\xi,v_0)(u_1-u_0)(\varphi_2)_v(u_0,\eta)(v_1-v_0)+(\varphi_2)_u(\xi,v_0)(u_1-u_0)(\varphi_1)_v(u_0,\eta)(v_1-v_0)| =$$
$$= |Det(M)|$$

dove

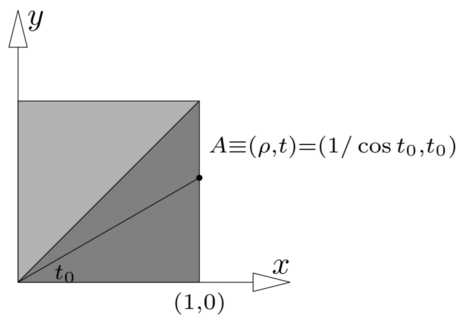
$$M = \begin{pmatrix} (\varphi_1)_v(u_0,\eta)(v_1-v_0) & (\varphi_1)_u(\xi,v_0)(u_1-u_0) \\ (\varphi_2)_v(u_0,\eta)(v_1-v_0) & (\varphi_2)_u(\xi,v_0)(u_1-u_0) \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} (\varphi_1)_v(u_0,\eta) & (\varphi_1)_u(\xi,v_0) \\ (\varphi_2)_v(u_0,\eta) & (\varphi_2)_u(\xi,v_0) \end{pmatrix}(u_1-u_0)(v_1-v_0)$$

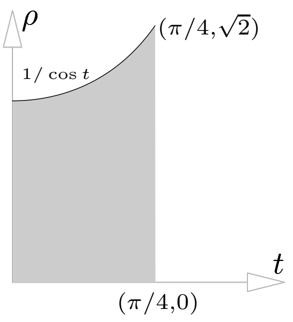
Nell'integrale $u_1 \to u_0$, $v_1 \to v_0$ e $u_1 - u_0$ diventa dx, $v_1 - v_0$ diventa dv. Per il teorema del confronto (Carabinieri) $\xi \to u_0$, $\eta \to v_0$ e quindi

$$\begin{pmatrix} (\varphi_1)_v(u_0,\eta) & (\varphi_1)_u(\xi,v_0) \\ (\varphi_2)_v(u_0,\eta) & (\varphi_2)_u(\xi,v_0) \end{pmatrix}(u_1-u_0)(v_1-v_0) \to \begin{pmatrix} (\varphi_1)_v(u_0,v_0) & (\varphi_1)_u(u_0,v_0) \\ (\varphi_2)_v(u_0,v_0) & (\varphi_2)_u(u_0,v_0) \end{pmatrix} du\,dv$$

ed ecco spiegato il ruolo della matrice Jacobiana.

• Calcolare l'area del quadrato usando coordinate polari.





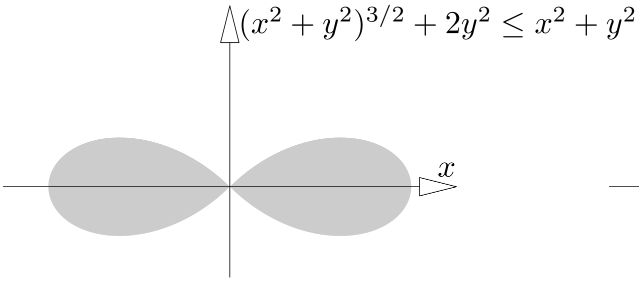
L'area è due volte l'area della metà inferiore.

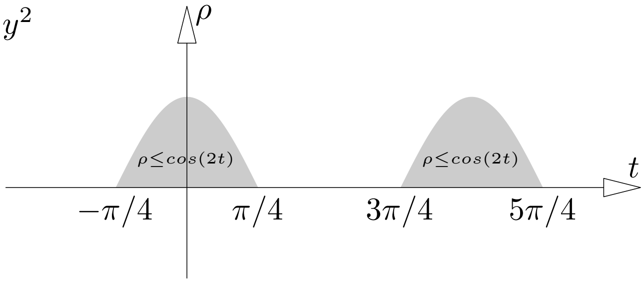
$$\int\int_{\{\underline{x}\in\mathbf{R}^2: x\in[0,1],\ 0\le y\le x\}} dxdy = \int\int_{\{(t,\rho)\in\mathbf{R}^2: t\in[0,\pi/4],\ 0\le\rho\le 1/\cos t\}} \underbrace{\rho}_{iacobiano}\, d\rho\, dt =$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{1/\cos t} \rho\, d\rho\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\rho^2}{2}\Big|_0^{\frac{1}{\cos t}} dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 t} dt = \frac{\tan t}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}$$

e quindi l'area è due volte la quantità trovata.

♠ Eseguire il calcolo trovando l’area della metà superiore anziché inferiore.

• Trovare l’area della figura definita da $(x^2+y^2)^{3/2}+2y^2 \le x^2+y^2$.





Passiamo a coordinate polari (a questo livello stiamo facendo un tentativo. Non è detto che la scelta sia quella giusta anche se in realtà sappiamo che lo è).
$(x^2+y^2)^{3/2}+2y^2 \le x^2+y^2$ diventa $(\rho^2)^{3/2}+2\rho^2\sin^2 t \le \rho^2$ ossia $\rho^2(\rho-\cos 2t)\le 0$ e quindi $\rho \le \cos 2t$. Il fatto che $\rho \ge 0$, implica $\cos 2t \ge 0$ ossia $-\pi/2+2k\pi \le 2t \le \pi/2+2k\pi$, ossia $-\pi/4 \le t \le \pi/4$ con $k=0$ oppure $3\pi/4 \le t \le 5\pi/4$ con $k=1$. Chiaramemte con $k=2$, si riottiene il primo caso e con $k=3$ il secondo. Infatti per $k=2$ e $k=3$ si ha rispettivamente

$$\frac{7}{4}\pi \le t \le \frac{9}{4}\pi \qquad\qquad \frac{11}{4}\pi \le t \le \frac{13}{4}\pi$$

che nel piano (x,y) equivalgono a

$$-\frac{\pi}{4}\pi \le t \le \frac{\pi}{4} \qquad\qquad \frac{3}{4}\pi \le t \le \frac{5}{4}\pi$$

Siccome ad ogni punto (x,y) dentro la parte di destra corrisponde $(-x,y)$ a sinistra, eseguiamo il calcolo solo a destra e moltiplichiamo per due. Matematicamente vuol dire che

$$(x^2+y^2)^{3/2}+2y^2-x^2-y^2 \le 0 \iff ((-x)^2+y^2)^{3/2}+2y^2-(-x)^2-y^2 \le 0$$

$$\int\!\!\int_{\{\underline{x}\in\mathbf{R}^2:(x^2+y^2)^{3/2}+2y^2\le x^2+y^2,\ x\ge 0\}} dxdy = \int\!\!\int_{\{(t,\rho)\in\mathbf{R}^2:t\in[-\pi/4,\pi/4],\ 0\le\rho\le\cos 2t\}} \underbrace{\rho}_{iacobiano}\, d\rho\, dt =$$

$$= \int_0^{\pi/4} dt \int_0^{\cos(2t)} \rho\, d\rho = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} dt \frac{1}{2}\cos^2 t = \frac{\pi}{4}$$

Il risultato è $\pi/2$.

Lezione del 10/03/2016 integrali multipli

• Ricordiamo che se $D\subset\mathbf{R}^2$ è un insieme semplice rispetto ad almeno uno degli assi x,y e $f(x,y)\ge 0$, allora

$$\textbf{(integrazione per fili)} \qquad \int\!\!\int_D f(\underline{x})dx\,dy = \int\!\!\int_D dx\,dy \int_0^{f(\underline{x})} dz \qquad (f.1)$$

(figure a pag. 7 e formula pag.20 delle dispense di Tauraso) è il volume racchiuso dal grafico della funzione e dal piano (x,y). Il grafico della funzione è $\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3:(x,y)\in D,\ z=f(x,y)\}$ e

$f(\underline{x})$ è la lunghezza del filo che dal punto di coordinate $(x,y,0)$ arriva fino al punto di ccordinate $(x,y,f(x,y))$.

Il volume appena calcolato è scrivibile anche come

$$\int\int\int_{\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3:(x,y)\in D,\ 0\le z\le f(x,y)\}} dx\,dy\,dz \qquad (f.2)$$

Il passaggio da (f.1) a (f.2) è l'analogo in tre dimensioni delle formule di riduzione a pag.7 degli appunti di Tauraso. Lì da un integrale doppio si passa ad un integrale in una variabile e poi l'altra variabile. Nel caso dell'integrale triplo si passa ad un integrale unidimensionale interno ed uno doppio esterno.

• Calcoliamo il volume della sfera di raggio R. La formula $x^2+y^2+z^2<R^2$ definisce l'interno della sfera mentre $x^2+y^2+z^2=R^2$ definisce il bordo. La formula data non definisce una equazione cartesiana. Per questo dobbiamo spezzare $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$, $z=-\sqrt{R^2-x^2-y^2}$. Calcoliamo il volume dell'insieme

$$V_+=\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3:\ x^2+y^2\le R^2,\ 0\le z\le\sqrt{R^2-x^2-y^2}\}$$

e poi moltplichiamo per due (pag.10 delle dispense di Tauraso). Otteniamo la formula scritta da Tauraso con un ovvia modifica

$$|V_+|=\int\int_{x^2+y^2\le R^2}\sqrt{R^2-x^2-y^2}dx\,dy$$

A questo punto abbiamo scelto di operare l'integrale secondo le coordinate polari per cui si ottiene

$$\int\int_{\underbrace{\{\rho\le R, 0\le t\le 2\pi\}}_{rettangolo}}\rho\sqrt{R^2-\rho^2}d\rho\,dt=\int_0^{2\pi}dt\int_0^R d\rho\sqrt{R^2-\rho^2}\rho=2\pi(R^2-\rho^2)^{\frac{3}{2}}\frac{2}{3}\frac{1}{2}\Big|_R^0=\pi\frac{2}{3}R^3$$

Chiaramente

$$|V_-|=\left|\int\int_{x^2+y^2\le R^2}-\sqrt{R^2-x^2-y^2}dx\,dy\right|=\frac{2}{3}R^3$$

e la somma è quanto ci aspettavamo ossia $\pi\frac{4}{3}R^3$.

• Integrazione per "sezioni" (o "strati"). Partiamo dalla prima riga a pag.21 delle dispense di Tauraso. La formula che definisce D può scriversi pure come $\displaystyle\bigcup_{z\in[a,b]}D(z)$ e $D(z)$ è un sottinsieme del piano orizzontale ad altezza z. In tal caso il volume viene visto come "somma" delle aree dei singoli strati.

Abbiamo calcolato il volume della sfera per strati. In tal caso nel primo integrale a pag.21 delle dispense di Tauraso, dobbiamo porre $f(x,y,z)\equiv 1$ e $D(z)=\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3: z=z_0,\ x^2+y^2\le R^2-z_0^2\}$ ed otteniamo (semisfera superiore)

$$\int\int\int_{x^2+y^2+z^2\le R^2}dx\,dy\,dz=\int_0^R dz\left(\int\int_{x^2+y^2\le R^2-z^2}dx\,dy\right)=\int_0^R|D(z)|dz=\int_0^R\pi(R^2-z^2)dz$$

ossia $\pi\left(R^3-\frac{R^3}{3}\right)=\pi\frac{2}{3}R^3$.

• Coordinate polari sferiche (pag.25 delle dispense di Tauraso).

Calcolo del volume della sfera con tali coordinate. La sfera $x^2+y^2+z^2\le R^2$ diventa $[0,R]\times \underbrace{[0,\pi]}_{\vartheta}\times\underbrace{[0,2\pi]}_{\varphi}$ (la mia notazione inverte il significato di ϑ e φ.

$$\int\int\int_{x^2+y^2+z^2\le R^2} dx\,dy\,dz=\int_0^R d\rho\int_0^\pi d\vartheta\int_0^{2\pi} d\varphi\,\underbrace{\rho^2\sin\vartheta}_{iacobiano}=\pi\frac{4}{3}R^3$$

Lezione del 14/03/2016 integrali multipli

• Coordinate cilindriche (pag.25 delle dispense di Tauraso).

• Uso delle coordinate cilindriche per il calcolo di integrali di volume. Guardando la figura a pagine 38 delle dispense di Tauraso che chiameremo D, possiamo generalizzare pensando che D, giacente sul primo quadrante del piano (y,z), sia staccata dall'asse z. Inoltre possiamo pensare che D sia semplice rispetto all'asse y invece che x come in figura. Assumiamo poi che le variabili (u,v) descrivano l'insieme tratteggiato. Il volume ottenuto ruotando la figura intorno all'asse z per 360 gradi, è ben descritto dal cambio di coordinate (cilindrico)

$$x=u\cos t,\quad y=u\sin t,\quad z=v,\qquad (u,v)\in D,\qquad 0\le\vartheta\le 2\pi \qquad 14/03--1$$

Notare che, preso un punto $(u_0,v_0)\in D$, u_0 è anche il raggio della circonferenza che si ottiene partendo da (u_0,v_0) e ruotando intorno all'asse z rimanendone alla stessa distanza punto per punto di D. Lo iacobiamo $\left|\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,\vartheta)}\right|$ è u e quindi il volume di rotazione è pari a

$$\int_0^{2\pi} d\vartheta\int\int_D u\,du\,dv=2\pi\int\int_D u\,du\,dv$$

Ragionamento intuitivo Sia C_{u_0} la circonferenza ottenuta a partire da (u_0,v_0) e ruotando di 360 gradi intorno a z. Possiamo pensare che il volume di rotazione sia $\bigcup_{(u_0,v_0)\in D} C_{u_0}$. Per il calcolo del volume dovrei "sommare" la lunghezza di tutte le circonferenze C_{u_0} al variare di (u_0,v_0) in D. Ciascuna circonferenza è lunga $2\pi u_0$ e la "somma" è $\int\int_D 2\pi u\,du\,dv$ appunto.

• Se la rotazione avviene intorno all'asse y, allora il volume è

$$\int_0^{2\pi} d\vartheta\int\int_D v\,du\,dv=2\pi\int\int_D v\,du\,dv$$

• Sia data la funzione $f(y)=y^2/(1+y^2)$ con $0\le y\le 1$. Ciò determina sul piano (y,z) un insieme definito da $E=\{(y,z)\in\mathbf{R}^2\colon 0\le y\le 1, f(y)\le z\le 1/2\}$. Calcolare il volume del solido ottenuto ruotando E intorno all'asse z. Applichiamo la formula

$$2\pi\int_0^1 dy\int_{\frac{y^2}{1+y^2}}^{\frac12} dzy=2\pi\int_0^1 dyy\left(\frac12-\frac{y^2}{1+y^2}\right)=2\pi\left[\frac14-\int_0^1 y\left(1-\frac{1}{1+y^2}\right)\right]=$$
$$=2\pi\left(\frac14-\frac12+\frac12\ln 2\right)$$

♠ Calcolare il volume ottenuto ruotando la precedente figura intorno all'asse y.

♠ Tornando all'insieme D dell'inizio, dare la formula del volume del solido ottenuto ruotando D intorno all'asse x.

• Calcolare il volume della sfera usando la precedente formula 14/03–1.

$$2\cdot 2\pi\int\int_{x^2+y^2\le R^2, x\ge 0, y\ge 0} y dx\, dy$$

Passando a coordinate polari, $4\pi\int_0^R d\rho \underbrace{\rho}_{iacobiano} \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt\, \underbrace{(\rho\sin t)}_{y} = \frac{4}{3}\pi R^3$

♠ (difficile) Data la circonferenza di equazione $x^2+y^2+z^2=a^2$, la si intersechi con il piano di equazione $x+y+z=0$. 1) Si individui la proiezone sul piano (x,y) di tale intersezione. 2) se ne calcoli l'area. (vedi la lezione del 17/03/2016).

• Sia dato il volume $V=\{\underline{x}\in\mathbf{R}^3 : x^2+y^2+z^2\le r^2\}$ avente densità di massa costante δ. Si vuole calcolare il potenziale gravitazionale in un qualsiasi punto dello spazio sia interno che esterno al volume.

Sia $\underline{y}_0\equiv(\xi,\eta,\zeta)$ un punto dello spazio. Orientiamo gli assi in modo che il punto $\underline{y}_0$ stia sull'asse z ossia abbia coordinate $(0,0,\zeta)$. Il potenziale generato da V in $\underline{y}_0$ è $I=\int\int\int_V \frac{\delta dxdydz}{dist(\underline{x},\underline{y}_0)}$.

L'integrale diventa $\delta\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}d\vartheta\int_0^r d\rho\frac{\rho^2\sin\vartheta}{\sqrt{\rho^2-2\rho\zeta\cos\vartheta+\zeta^2}} = \frac{2\pi\delta}{\zeta}\int_0^r d\rho\rho(|\rho+\zeta|-|\rho-\zeta|)$.

Si è usato il fatto che

$$\left(\frac{1}{\rho\zeta}\sqrt{\rho^2-2\rho\zeta\cos\vartheta+\zeta^2}\right)' = \frac{\sin\vartheta}{\sqrt{\rho^2-2\rho\zeta\cos\vartheta+\zeta^2}}$$

Ora dobbiamo dividere i due casi $\zeta>r$ e $\zeta\le r$.

Primo caso. Sia $\zeta>r$. L'integrale è $\frac{2\pi\delta}{\zeta}\int_0^r d\rho\rho(\rho+\zeta-(\zeta-\rho)=\frac{2\pi\delta}{\zeta}\int_0^r d\rho 2\rho^2=\frac{4\pi}{3}\delta\frac{r^3}{\zeta}$. Il risultato è quello classico: il potenziale è come se fosse generato da una massa tutta concentrata nell'origine.

Secondo caso. Se $r>\zeta>0$ otteniamo invece $\frac{2\pi\delta}{\zeta}\left(\int_0^{\zeta}d\rho\rho(\rho+\zeta-(\zeta-\rho)+\int_{\zeta}^r(\rho+\zeta-(\rho-\zeta)\right)=$ $2\pi\delta(r^2-\frac{1}{3}\zeta^2)$ e si può notare che per $\zeta=r$ le due formule coincidono.

Esercizi per casa Oltre a quelli indicati sopra, si possono fare quelli delle dispense di Tauraso ed in particolare pag.11 esempio 5 (lasciar perdere la nozione di valor medio che in ogni caso non presenta nessuna difficoltà , ciò che interessa è l'integrale), pag.15 esempio 6 (provare a risolverlo pure scomponendo la figura in sottoinsiemi semplici rispetto ad almeno uno degli assi), pag.19 esempio 9, pag.21 esempio 10, pag.23 esempio 11, pag.26 esempi 12 e 13, pag.27 esempio 15. Del secondo file scaricabile e contenente solo esercizi, si possono fare tutti quelli fino a pag.9.

Lezione del 17/03/2016 integrali multipli

Pag. 28, 29 e 30 delle dispense di Tauraso con alcune precisazioni.

La formula a pag.29 $dS=\frac{dx\cdot dy}{\cos\vartheta}$ è stata da me evitata ed al suo posto, al fine di arrivare alla formula di pag.30 prima dell'esempio 16, è stato spiegato l'argomento qui sotto. Praticamente lo studente deve seguire le dispense di Tauraso fino alla figura di pag.29, e da lì in poi seguire l'argomento qui sotto.

• Per capire il fattore $\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}$, facciamo riferimento alla figura a pag.29 delle dispense di Tauraso.

Abbiamo bisogno di due premesse.

La prima si riferisce all'area del rettangolo. Guardando la prima figura del 7/3/2016, l'area del rettangolo è $|\underline{b}'-\underline{a}'|\cdot|\underline{d}'-\underline{a}'|\cdot|\sin\theta|$ che è il modulo del prodotto vettoriale fra $\underline{b}'-\underline{a}'$ e $\underline{d}'-\underline{a}'$) ossia $|(\underline{b}'-\underline{a}')\wedge\ (\underline{d}'-\underline{a}')|$.

La seconda riguarda la differenziabilità di una funzione. Diciamo che $f(x,y)$ è dfferenziabile in $\underline{x}_0$ se

$$\lim_{\|\underline{h}\|\to 0}\frac{1}{\|\underline{h}\|}\Big[f(\underline{x}_0+\underline{h})-\big(f(\underline{x}_0)+f_x(\underline{x}_0)h_1+f_y(x_0)h_2\big)\Big]=0$$

oppure

$$\lim_{\underline{x}\to\underline{x}_0}\frac{1}{\|\underline{x}-\underline{x}_0\|}\Big[f(\underline{x})-\big(f(\underline{x}_0)+f_x(\underline{x}_0)(x-x_0)+f_y(x_0)(y-y_0)\big)\Big]=0$$

oppure ed è l'espressione secondo me più significativa

$$f(\underline{x})-\Big[f(\underline{x}_0)+f_x(\underline{x}_0)(x-x_0)+f_y(x_0)(y-y_0)\Big]=o(\|\underline{h}\|)\qquad(17/3/2016/1)$$

L'espressione

$$z=f(\underline{x}_0)+f_x(\underline{x}_0)(x-x_0)+f_y(x_0)(y-y_0)\ \text{ossia}\ z=z_0+f_x(\underline{x}_0)(x-x_0)+f_y(x_0)(y-y_0)$$

è l'equazione del piano tangente in $\underline{x}_0$. Equazione che possiamo vedere scritta come

$$(\underline{N},\underline{x}-\underline{x}_0)=0$$

dove $\underline{N}=(-f_x(\underline{x}_0),-f_y(\underline{x}_0),1)$, $\underline{x}-\underline{x}_0=(x-x_0,y-y_0,z-z_0)$. La 17/3//2016/1 ci dice che in un intorno di $\underline{x}_0$, la distanza fra la funzione ed il suo piano tangente tende a zero più velocemente della distanza dal punto $\underline{x}_0$.

Torniamo a pag.29 delle dispense di Tasuraso. Consideriamo l'ivi quadratino identificato da dx e dy e chiamiamo: $\underline{a}=(a_1,a_2)$, il punto più a sinistra del quadratino, $\underline{b}=(b_1,b_2)$, il punto più in basso, $\underline{c}=(c_1,c_2)$, il punto più a destra, $\underline{d}=(d_1,d_2)$, il punto più in alto. Corrisponentemente ai quattro punti disegnamo i quattro punti $\underline{A}=(a_1,a_2,f(\underline{a}))$, $\underline{B}=(b_1,b_2,f(\underline{b}))$, $\underline{C}=(c_1,c_2,f(\underline{c}))$, $\underline{D}=(d_1,d_2,f(\underline{d}))$. Nel disegno di Tauraso, i punti $\underline{A},\underline{B},\underline{C},\underline{D}$ identificano il quadratino tratteggiato. I punti $\underline{A},\underline{B},\underline{C},\underline{D}$ chiaramente non stanno su di un piano ma tanto più dx e dy sono piccoli, tanto meno differiranno i quattro punti dallo stare sul piano tangente passante, per esempio, in $\underline{A}$. Qui entra la differenziabilità . Immaginiamo quindi che i punti $\underline{A},\underline{B},\underline{C},\underline{D}$ stiano sul pianto tangente passante per $\underline{A}$. L'area del quadrilatero identificato da $\underline{A}$, $\underline{B}$, $\underline{C}$, $\underline{D}$ è data dal prodotto vettoriale dei vettori $\underline{B}-\underline{A}$, e $\underline{D}-\underline{A}$ ossia $(\underline{B}-\underline{A})\wedge(\underline{D}-\underline{A})$. Quindi ciò che cerchiamo è il modulo del vettore $(\underline{B}-\underline{A})\wedge(\underline{D}-\underline{A})$ che sappiamo essere ortogonale al piano tangente in $\underline{A}$ di equazione

$$z-f(\underline{a})=f_x(\underline{a})(x-a_1)+f_y(\underline{a})(y-a_2)\qquad\text{ossia}\ (\underline{N},\underline{x}-\underline{a})=0$$

dove $\underline{N}=(-f_x(\underline{a}),-f_y(\underline{a}),1)$, $\underline{x}-\underline{a}=(x-a_1,y-a_2,z-f(\underline{a}))$. Ciò implica che $\underline{N}=(\underline{B}-\underline{A})\wedge(\underline{D}-\underline{A})$ e quindi l'area $dx\cdot dy$ viene mandata in $dx\cdot dy\cdot\|\underline{N}\|=\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\cdot dx\cdot dy$.

Esercizio pag.30 con $m = 1$, α di conseguenza.

• Dato un insieme D sul piano (y, z) che non interseca l'asse delle x. Calcolare il volume del solido ottenuto dalla rotazione di 360 gradi intorno all'asse delle x. Seguendo il **Ragionamento intuitivo** del 14/03/2016 scriveremmo la formula seguente?

$$\int\int_D \sqrt{y^2+z^2}dy\,dz \qquad (17/3/2016/2)$$

• Eseguire il calcolo se D è il triangolo di vertici $(1, 0)$, $(2, 0)$, $(2, 1)$. Dopo avere impostato l'integrale, abbandonare il calcolo in quanto, se ci si ragiona un minimo, il volume del "solido" ottenuto è zero. Dov'è dunque l'errore nello scrivere la (17/3/2016/2) che peraltro ha le dimensioni di una lunghezza alla terza potenza?

♠ calcolare l'integrale in (17/3/2016/2) ma stavolta senza assegnargli nessun significato particolare.

Svolgimento. detto I l'integrale, integriamo per parti:

$$\int_1^2 dy\int_0^{y-1} dz\sqrt{y^2+z^2} = \int_1^2 dy\int_0^{y-1} dz\sqrt{y^2+z^2} = \int_1^2 dy\left[z\sqrt{y^2+z^2}\Big|_0^{y-1} - \int_0^{y-1}\frac{z^2\,dz}{\sqrt{y^2+z^2}}\right]$$

Primo integrale

$$\int_1^2 dy(y-1)\sqrt{2y^2-2y+1} = \frac{1}{4}\int_1^2 dy(4y-2)\sqrt{2y^2-2y+1} - \frac{1}{2}\int_1^2 dy\sqrt{2y^2-2y+1} =$$
$$= \frac{1}{4}\frac{2}{3}(2y^2-2y+1)^{\frac{3}{2}}\Big|_1^2 - \frac{1}{2}\int_1^2\frac{dy}{\sqrt{2}}\sqrt{(2y-1)^2+1} = \frac{2}{3} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\int_1^3 2dt\sqrt{1+t^2}$$

Calcoliamo ora

$$\int\sqrt{1+x^2}dx = x\sqrt{1+x^2} - \int\frac{x^2+1-1}{\sqrt{1+x^2}}dx = x\sqrt{1+x^2} - \int\sqrt{1+x^2}dx - \int\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx$$

da cui

$$\int\sqrt{1+x^2}dx = \frac{1}{2}x\sqrt{1+x^2} - \frac{1}{2}\ln(x+\sqrt{1+x^2})$$

Finalmente abbiamo

$$\int_1^2 dy(y-1)\sqrt{2y^2-2y+1} = \frac{2}{3} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(3\sqrt{10}-\sqrt{2}+\ln\frac{1+\sqrt{2}}{3+\sqrt{10}}\right)$$

Secondo integrale

$$-\int_1^2 dy\int_0^{y-1}\frac{z^2}{\sqrt{y^2+z^2}} = -\int_1^2 dy\int_0^{y-1} dz\sqrt{y^2+z^2} + \int_1^2 dy\int_0^{y-1}\frac{y^2\,dz}{\sqrt{y^2+z^2}}$$

Ciò implica

$$\int_1^2 dy\int_0^{y-1} dz\sqrt{y^2+z^2} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4\sqrt{2}}\left(3\sqrt{10}-\sqrt{2}+\ln\frac{1+\sqrt{2}}{3+\sqrt{10}}\right) + \frac{1}{2}\int_1^2 dy\int_0^{y-1}\frac{y^2\,dz}{\sqrt{y^2+z^2}}$$

Ora

$$\int_1^2 dy \int_0^{y-1} \frac{y^2\,dz}{\sqrt{y^2+z^2}} = \int_1^2 dy y^2 \int_0^{\frac{y-1}{y}} \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = \int_1^2 dy y^2 \ln\left(\frac{y-1}{y} + \sqrt{1+\frac{(y-1)^2}{y^2}}\right) =$$

$$= \int_0^{\frac12} du \frac{1}{(1-u)^4} \ln(u+\sqrt{1+u^2}) = \frac{1}{3(1-u)^3}\ln(u+\sqrt{1+u^2})\Big|_0^{\frac12} - \frac13 \int_0^{\frac12} \frac{1}{(1-u)^3}\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}du =$$

$$= \frac83 \ln\frac{1+\sqrt5}{2} - \frac13 \int_0^{\sinh^{(-1)}(1/2)} \frac{\cosh t\,dt}{(1-\sinh t)^3\cosh t}$$

Calcoliamo l'ultimo integrale (ricordo che $\sinh^{(-1)}(x) = \ln(x+\sqrt{1+x^2})$)

$$\int_0^{\sinh^{(-1)}(1/2)} \frac{dt}{(1-\sinh t)^3} = \int_0^{\sinh^{(-1)}(1/2)} \frac{8dt}{(2-e^t+e^{-t})^3} \underbrace{=}_{e^t=x} 8\int_1^{e^{\sinh^{(-1)}(1/2)}} \frac1x \frac{1}{(2-x+\frac1x)^3} =$$

$$= 8\int_1^{\frac{1+\sqrt5}{2}} \frac{x^2}{(2x-x^2+1)^3} = 8\left[\frac{1-x}{32(x^2-2x-1)} + \frac{3x+1}{8(x^2-2x-1)^2} + \frac{\sqrt2}{128}\ln\frac{x+\sqrt2-1}{-x+\sqrt2+1}\right]\Big|_1^{\frac{1+\sqrt5}{2}} =$$

$$= \left(\frac{3-\sqrt5}{6}\right) + (\sqrt5-1) + \frac{\sqrt2}{128}\ln\frac{\sqrt5+2\sqrt2-1}{1+2\sqrt2-\sqrt5}$$

L'ultima integrazione è per parti. Sommando con il precedente contributo otteniamo

$$\frac13 - \frac{1}{4\sqrt2}\left(3\sqrt{10}-\sqrt2+\ln\frac{1+\sqrt2}{3+\sqrt{10}}\right) + \frac12\left[\left(\frac{3-\sqrt5}{6}\right) + (\sqrt5-1) + \frac{\sqrt2}{128}\ln\frac{\sqrt5+2\sqrt2-1}{1+2\sqrt2-\sqrt5}\right] =$$

$$= \frac{1-\sqrt5}{3} + \frac{\sqrt2}{16}\ln\frac{\sqrt5+2\sqrt2-1}{1+2\sqrt2-\sqrt5}$$

♠ Si prenda nel piano (y,z) il triangolo di vertici $(1,0),(2,0),(2,1)$ e lo si ruoti rispettivamente intorno all'asse y, all'asse z, all'asse $\{y=z, x=0\}$ e all'asse $\{z=3y, x=0\}$. Si calcoli il volume dei quattro solidi ottenuti. (I primi due calcoli sono ovvi. Il terzo lo è meno ed il quarto ancora meno).

• Si intersechi la sfera $x^2+y^2+z^2=a^2$ con il piano $x+y+z=0$. L'intersezione è una circonferenza di raggio a. Si proietti tale figura sul piano (x,y) e si trovi l'area racchiusa.

Eliminando z dalle due equazioni $x^2+y^2+z^2=a^2$ e $x+y+z=0$ si ottiene $2x^2+2y^2+2xy=a^2$ che è l'equazione della proiezione dell'intersezione delle due superfici. Evidentemente non è più una circonferenza.

$2x^2+2y^2+2xy=a^2$ si può riscrivere come $(x,y)\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} (\underline{x}, M\underline{x})$ Diagonalizzando la matrice si ottiene $D \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix}3&0\\0&1\end{pmatrix}$ e corrispondentemente si ha la trasformazione di coordinate (rotazione nel piano) $\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt2}(x'+y') \\ y = \frac{1}{\sqrt2}(-x'+y') \end{cases}$ (le cui colonne sono le coordinate degli autovettori ossia $\frac{1}{\sqrt2}\binom{1}{1}$ e $\frac{1}{\sqrt2}\binom{-1}{1}$) che trasforma la relazione fra x ed y in $3x'^2+y'^2=a^2$ (ellisse). Dunque l'area dell'insieme è $\pi\frac{a^2}{\sqrt3}$.

Più in dettaglio e facendo riferimento alle pagine 12–13 delle dispense di Tauraso, (u, v) sono (x', y'), Φ è la rotazione descritta sopra, D è l'insieme $2x^2 + 2y^2 + 2xy \le a^2$, $\Phi^{-1}(D)$ è l'ellisse $3(x')^2 + (y^p)^2 \le a^2$. Lo iacobiano di Φ è chiaramente uno (come deve essere per una rotazione che per definizione conserva le distanze fra i punti.

Giusto per completezza riportiamo per esteso il procedimento di diagonalizzazione della matrice M. Si costruisce la matrice $M - \lambda I$ e si pone zero il determinante ottenendo i valori $\lambda_1 = 3$, e $\lambda_2 = 1$. Corrispondentemente a λ_1 si trova l'autovettore associato ossia si risolve l'equazione $\begin{pmatrix} 2-\lambda_1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^{(1)} \\ v_2^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1^{(1)} \\ v_2^{(1)} \end{pmatrix}$ (ossia $M\underline{v}^{(1)} = \lambda_1 \underline{v}^{(1)}$) e si ottiene $\frac{1}{\sqrt{2}}\binom{1}{1}$ (normalizzato a 1). Corrispondentemente a λ_2 si trova l'autovettore associato ossia si risolve l'equazione $\begin{pmatrix} 2-\lambda_2 & 1 \\ 1 & 2-\lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^{(2)} \\ v_2^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1^{(2)} \\ v_2^{(2)} \end{pmatrix}$ (ossia $M\underline{v}^{(2)} = \lambda_2 \underline{v}^{(2)}$) e si ottiene $\frac{1}{\sqrt{2}}\binom{-1}{1}$ (normalizzato a 1). Ora formiamo la matrice $U = \begin{pmatrix} v_1^{(1)} & v_1^{(2)} \\ v_2^{(1)} & v_2^{(2)} \end{pmatrix}$ in modo tale che $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^{(1)} & v_1^{(2)} \\ v_2^{(1)} & v_2^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3v_1^{(1)} & v_1^{(2)} \\ 3v_2^{(1)} & v_2^{(2)} \end{pmatrix}$ e poi consideriamo U^T ossia la matrice trasposta di U e verifichiamo che $U^T M U = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. A questo punto definiamo il cambio di variable $\underline{x} = U\underline{x}'$ ed il prodotto $(\underline{x}, M\underline{x})$ diventa $(U\underline{x}', MU\underline{x}') = (\underline{x}', U^T MU\underline{x}') = (\underline{x}', D\underline{x}') = 3x'^2 + y'^2$

Lezione del 21/03/2016 integrali multipli

• Superfici di rivoluzione (o di rotazione)

Facendo riferimento alla figura a pagina 32 delle dispense di Tauraso, la formula a pag.33 ossia

$$|S| = 2\pi \int_a^b \varphi(x)\sqrt{1 + (\varphi'(x))^2}dx$$

è stata ottenuta come conseguenza della formula $2\pi \int_a^b \varphi(y)ds$ e s è l'ascissa curvilinea della curva.

Argomento usato a lezione Immaginiamo di ruotare ogni punto del grafico della funzione $\varphi(y)$ in basso di 360 gradi intorno all'asse z. Il punto di ascissa y_1 genererà la circonferenza C_{y_1} di lunghezza $2\pi y_1$ e la superficie cercata sarà la sovrapposizione di tutte le circonferenze così ottenute variando il punto sul grafico della funzione. Chiaramente se $y_1 \neq y_2$, allora $C_{y_1} \cap C_{y_2} = \emptyset$. e quindi L'area della superficie cercata è la "somma" delle lunghezze di tali circonferenze. Tale area è data da

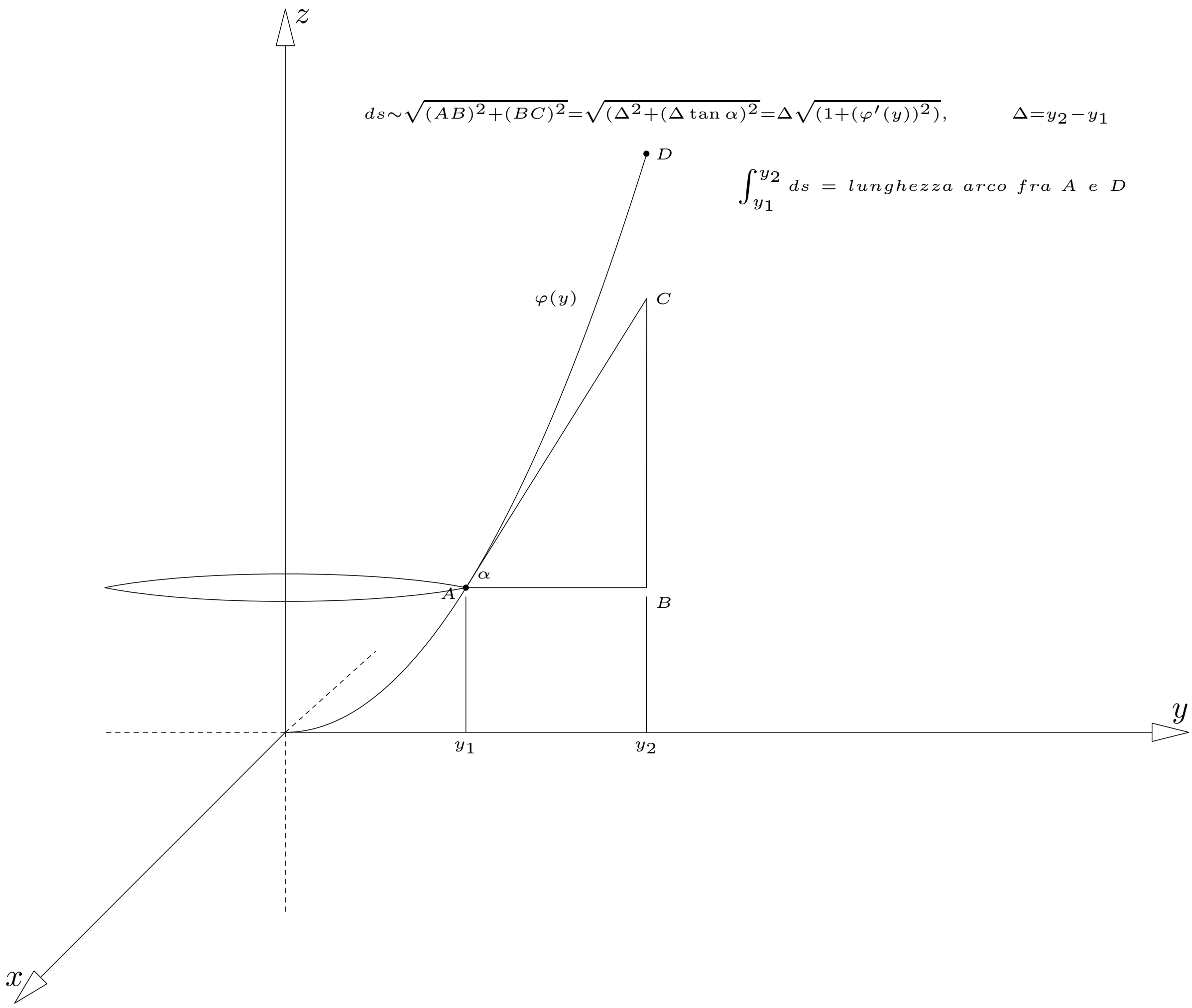
$$2\pi \int_{y_1}^{y_2} ds$$

e ΔS è la lunghezza sul grafico della curva quando mi muovo da y_1 a y_2 sulle ascisse. Tale lughezza è sconosciuta in quanto sappiamo misurare solo lunghezze rettilineee o al massimo archi di circonferenza. Dobbiamo ricorrere alla derivata. Supponiamo quindi φ derivabile e quindi

$$\varphi(y_1 + \Delta) - (\varphi(y_1) + \varphi'(y_1)\Delta) = o(|\Delta|)$$

Ciò vuol dire che la distanza fra i punti C e D tende a zero più velocemente di Δ. Quindi al posto di Δs scriviamo la lunghezza del tratto *rettilineo* fra i punti A e C. Stiamo chiaramente introducendo un'approssimazione ma siccome poi nell'integrale dobbiamo mandare a zero la distanza fra i punti, l'errore introdotto tende pure esso a zero. La lunghezza del tratto $\overline{AC}$ è data dalla formula

$$\Delta s \sim (y_2 - y_1)\sqrt{1 + (\varphi'(y_1))^2} \implies 2\pi \int_{y_1}^{y_2} y\sqrt{1 + (\varphi'(y))^2} dy$$



Se la rotazione avviene intorno all'asse delle y si ha chiaramente

$$2\pi \int_{y_1}^{y_2} \varphi(y)\sqrt{1 + (\varphi'(y))^2} dy$$

La funzione φ è funzione di y. Le stesse identiche considerazioni possono svolgersi se si avesse una funzione di z ossia $y = \psi(z)$. La formula a pag.33 delle dispense di Tauraso è ricavata diversamente. Gli studenti possono cercare di capire anch'essa ed è un utile esercizio.

Esercizio Calcolare l'area ottenuta ruotando rispetto all'asse z il segmento $z = z_0$, $a \le y \le b$. Stessa cosa se ruotato rispetto all'asse y.

Sappiamo che l'area deve essere $\pi(b^2 - a^2)$ ed infatti essa è

$$2\pi \int_a^b y\sqrt{1 + 0^2} dy = \pi(b^2 - a^2) \qquad \text{area della corona circolare}$$

Nel secondo caso abbiamo

$$2\pi \int_a^b z(y)\sqrt{1 + 0^2} dy = 2\pi \int_a^b z_0 dy = 2\pi z_0(b - a) \qquad \text{area di base per altezza}$$

♠ Sia dato il grafico della funzione $z=\sqrt{y}$, $0\le y\le a$, sul piano (z,y). Ruotiamo il grafico intorno all'asse z e vogliamo sapere l'area della superficie generata. Applichiamo la formula ed otteniamo

$$2\pi\int_0^a y\sqrt{1+\frac{1}{4y}}dy = 2\pi\int_0^a \sqrt{y}\sqrt{1+4y}dy \underbrace{=}_{y=t^2} 4\pi\int_0^{\sqrt{a}} t^2\sqrt{1+4t^2}dt = \frac{\pi}{3}\int_0^{\sqrt{a}} t\left[(1+4t^2)^{\frac32}\right]' dt =$$

$$\underbrace{\frac{\pi}{3}t\left[(1+4t^2)^{\frac32}\right]\Big|_0^{\sqrt{a}} - \frac{\pi}{3}\int_0^{\sqrt{a}}(1+4t^2)^{\frac32}dt}_{integr.\ per\ parti} = \underbrace{\frac{\pi}{3}\left(\sqrt{a}(1+4a)^{\frac32}\right)}_{\doteq Q} - \frac{\pi}{3}\int_0^{\sqrt{a}}(1+4t^2)^{\frac32}dt$$

Abbiamo

$$4\pi\int_0^{\sqrt{a}} t^2\sqrt{1+4t^2}dt = \pi\int_0^{\sqrt{a}}(4t^2+1)\sqrt{1+4t^2}dt - \pi\int_0^{\sqrt{a}}\sqrt{1+4t^2}dt = Q - \frac{\pi}{3}\int_0^{\sqrt{a}}(1+4t^2)^{\frac32}dt \qquad (17/03/-1)$$

ossia

$$\frac{4}{3}\pi\int_0^{\sqrt{a}}(1+4t^2)^{\frac32}dt = Q + \pi\int_0^{\sqrt{a}}(1+4t^2)^{\frac12}dt$$

e quindi

$$4\pi\int_0^{\sqrt{a}} t^2\sqrt{1+4t^2}dt = Q - \frac{\pi}{3}\frac{3}{4\pi}\left(Q+\pi\int_0^{\sqrt{a}}(1+4t^2)^{\frac12}dt\right) = \frac{3}{4}Q - \frac{1}{4}\pi\int_0^{\sqrt{a}}(1+4t^2)^{\frac12}dt \qquad (17/03/-1)$$

Il calcolo si è quindi ridotto a trovare l'ultimo integrale della precedenteb formula.

$$\int_0^{\sqrt{a}}(1+4t^2)^{\frac12}dt = \left[t\sqrt{1+4t^2}\right]\Big|_0^{\sqrt{a}} - \int_0^{\sqrt{a}}\frac{4t^2}{\sqrt{1+4t^2}}dt =$$
$$= \sqrt{a}\sqrt{1+4a^2} - \int_0^{\sqrt{a}}\frac{4t^2+1}{\sqrt{1+4t^2}}dt + \int_0^{\sqrt{a}}\frac{dt}{\sqrt{1+4t^2}}$$

e quindi

$$2\int_0^{\sqrt{a}}\sqrt{1+4t^2}dt = \sqrt{a}\sqrt{1+4a} + \int_0^{\sqrt{a}}\frac{dt}{\sqrt{1+4t^2}} \underbrace{=}_{2t=z} \sqrt{a}\sqrt{1+4a} + \frac12\int_0^{2\sqrt{a}}\frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} =$$
$$= \sqrt{a}\sqrt{1+4a} + \frac12\ln(z+\sqrt{1+z^2})\Big|_0^{2\sqrt{a}} = \sqrt{a}\sqrt{1+4a} + \frac12\ln(2\sqrt{a}+\sqrt{1+4a})$$

Dalla 17/03/-1 segue che

$$4\pi\int_0^{\sqrt{a}} t^2\sqrt{1+4t^2}dt = \frac34 Q - \pi\frac{\sqrt{a}\sqrt{1+4a}+\frac12\ln(2\sqrt{a}+\sqrt{1+4a})}{8}$$

Successivamente si è parlato degli integrali di superficie.
Detta $A(x,y)$ la quantità $A(x,y)=\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}$, si ha

$$\int\int_D dx\,dy A(x,y)F(x,y,z) \doteq \int\int_D dx\,dy A(x,y)F(x,y,f(x,y)) = \int\int_D dx\,dy A(x,y)h(x,y)$$

dove $F(x, y, f(x, y)) = h(x, y)$.

Esempio: (pag.34 delle dispense di Tauraso) baricentro di una superficie massiva. Sia $\delta(x, y)$ la densità (Massa/(distanza)^2) di una superficie. Il baricentro è dato dalle formule di pag.34 delle dispense di Tauraso. Esaminiamo un caso concreto: $f(x, y) = x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 \leq R^2$. $\delta = \sqrt{x^2 + y^2}$ La massa è

$$\int\int_{x^2+y^2\leq R^2} \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)}\sqrt{x^2 + y^2}dx\,dy$$

In coordinate polari diventa

$$\int_0^{2\pi} dt \int_0^R \sqrt{(1 + 4r^2)}r \cdot r\,dr$$

Integriamo per parti ed otteniamo

$$2\pi\frac{1}{12}\left[r(1 + 4r^2)^{\frac{3}{2}}\right]\Big|_0^R - \frac{\pi}{6}\int_0^R (1 + 4r^2)^{\frac{3}{2}}dr = \underbrace{\frac{\pi}{6}R(1 + 4R^2)^{\frac{3}{2}}}_{P} - \frac{\pi}{6}\int_0^R (1 + 4r^2)^{\frac{3}{2}}dr$$

Ci manca il secondo integrale. Quindi torniamo all'integrale iniziale e scriviamo

$$2\pi\int_0^R \sqrt{(1 + 4r^2)}r \cdot r\,dr = 2\pi\frac{1}{4}\int_0^R dr\sqrt{1 + 4r^2}(4r^2 + 1) - 2\pi\frac{1}{4}\int_0^R dr\sqrt{1 + 4r^2}$$

e ciò implica

$$2\pi\frac{1}{4}\int_0^R dr\sqrt{1 + 4r^2}(4r^2 + 1) - 2\pi\frac{1}{4}\int_0^R dr\sqrt{1 + 4r^2} = P - \frac{\pi}{6}\int_0^R (1 + 4r^2)^{\frac{3}{2}}dr$$

ossia

$$\pi\frac{2}{3}\int_0^R (1 + 4r^2)^{\frac{3}{2}}dr = P + \frac{\pi}{2}\int_0^R dr\sqrt{(1 + 4r^2)}$$

L'ultimo integrale lo ricaviamo dall'esercizio precedente con R al posto di $\sqrt{a}$ quindi

$$\int_0^R dr\sqrt{1 + 4r^2} = \frac{R\sqrt{1 + 4R^2}}{2} + \frac{1}{4}\ln(2R + \sqrt{1 + 4R^2})$$

Ne segue

$$\int_0^R (1 + 4r^2)^{\frac{3}{2}}dr = \frac{3P}{2\pi} + \frac{3}{4}\int_0^R dr\sqrt{(1 + 4r^2)} = \frac{3P}{2\pi} + \frac{3R\sqrt{1 + 4R^2}}{8} + \frac{3}{16}\ln(2R + \sqrt{1 + 4R^2})$$

Finalmente

$$P - \frac{\pi}{6}\int_0^R (1 + 4r^2)^{\frac{3}{2}}dr = P - \frac{P}{4} - \pi\frac{R\sqrt{1 + 4R^2}}{16} - \frac{\pi}{32}\ln(2R + \sqrt{1 + 4R^2})$$

e quindi

$$\int_0^{2\pi} dt\int_0^R \sqrt{(1 + 4r^2)}r \cdot r\,dr = \frac{\pi}{8}R(1 + 4R^2)^{\frac{3}{2}} - \pi\frac{R\sqrt{1 + 4R^2}}{16} - \frac{\pi}{32}\ln(2R + \sqrt{1 + 4R^2}) \doteq M$$

La coordinata x del baricentro è

$$\int\int_{x^2+y^2\le R^2} \sqrt{1+4(x^2+y^2)}\sqrt{x^2+y^2}x\,dx\,dy = 0$$

La coordinata y del baricentro è

$$\int\int_{x^2+y^2\le R^2} \sqrt{1+4(x^2+y^2)}\sqrt{x^2+y^2}y\,dx\,dy = 0$$

La coordinata z è

$$\int\int_{x^2+y^2\le R^2} \sqrt{1+4(x^2+y^2)}\sqrt{x^2+y^2}f(x,y)\,dx\,dy =$$
$$= \int\int_{x^2+y^2\le R^2} \sqrt{1+4(x^2+y^2)}\sqrt{x^2+y^2}(x^2+y^2)\,dx\,dy$$

che in coordinate polari è

$$2\pi\int_0^R r^4\sqrt{1+4r^2}dr = \frac{\pi}{6}\left[r^3(1+4r^2)^{\frac{3}{2}}\right]\Big|_0^R - \frac{\pi}{6}3\int_0^R drr^2(1+4r^2)^{\frac{3}{2}}$$

e gli integrali sono desumibili dai precedenti.

Curve ed integrali curvilinei

Integrali curvilinei Pagine 1,2,3 fino a "$\forall t\in I$".

A pag.1 a "γ è iniettiva", sostituire la frase: *se per ogni* $t_1\in I, t_2\in I$, t_1 *e/o* t_2 *non appartenenti al bordo di* I, *allora* $\underline{\gamma}(t_1)\neq\underline{\gamma}(t_2)$.

Altrimenti dovremmo dire che la curva a pag.2, ellisse, non è iniettiva.

A pag.3 a $\forall t\in I$; sostituire $\forall t\in \overset{\circ}{I}$.

• Le curve del tipo 3) a pag.3 sono dette cartesiane e sono sempre semplici, non chiuse e regolari purché $f(t)$ sia derivabile con derivata continua.

• La formula $2\pi\overline{\rho}|D|$ (Pappo–Guldino a pag.38) è così scritta in tutti i testi che la riportano ma in generale NON va usata calcolando esattamente le gandezze in essa riportate. In altre parole NON si deve prima calcolare $\overline{\rho}$ e poi $|D|$ Il motivo è che al denominatore di $\overline{\rho}$, c'è esattamente $|D|$ che dunque va via. Conviene in generale calcolare $\displaystyle\int\int_D \rho\,d\rho, dz$ e poi moltiplicare per 2π.

Lezione del 31/03/2016 Curve e integrali curvilinei di prima specie

Richiamo di quanto fatto sull'argomento nella lezione precedente. Pag.4 sugli integrali curvilinei delle dispense di Tauraso. Esempio 1 di pag.5.

• Esercizio 2.8.1 del file http://www.mat.uniroma2.it/ perfetti/eserci/19intsup.pdf. Nel nostro caso abbiamo $0\le t\le 1$ al posto di $-b\le t\le b$. Data la simmetria della funzione integranda, basta prendere la metà dell'integrale fra $-b$ e b. La densità nel nostro caso inoltre è $\delta\equiv 1$. La soluzione dell'esercizio ci interessa fino a "Sempre con densità costante".

♠ Svolgere gli esercizi fino a pag.10 delle dispense di Tauraso

• Dimostrare che la curva $(\cos t, \sin t)$, $0\le t\le 2\pi$ è semplice.

Lezione del 04/04/2016 (annullata)

Lezione del 07/04/2016 Curve e integrali curvilinei di prima e seconda specie

Nozione di "curve equivalenti" (pag.7 delle dispense di Tauraso) Sia data la curva $\underline{\gamma}_1(t)$, $a \leq t \leq b$. Sia $t = \varphi(\tau)$ con $\varphi' > 0$. Definiamo la curva $\underline{\gamma}_2(\tau) = \underline{\gamma}_1(\varphi(\tau)) = (\underline{\gamma}_1 \circ \varphi)(\tau)$ con $\varphi^{-1}(a) \leq \tau \leq \varphi^{-1}(b)$. Le curve $\underline{\gamma}_1$ e $\underline{\gamma}_2$ sono dette equivalenti. Se invece $\varphi' < 0$ allora tutto è uguale solo che $\varphi^{-1}(b) \leq \tau \leq \varphi^{-1}(a)$. Esempio pag.7.

♠ Siano date le due curve $\underline{\gamma}_1(t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$, $\underline{\gamma}_1(t) = (\cos t, \sin t)$, e $\underline{\gamma}_2(\tau)$, $0 \leq \tau \leq 4\pi$ $\underline{\gamma}_2(\tau) = (\cos\tau, \sin\tau)$. Sono esse equivalenti?

Teorema 1 pag.7 delle dispense di Tauraso.

• *Dimostrazione* Dobbiamo dimostrare che $\displaystyle\int_{\underline{\gamma}_1} f(\underline{\gamma}_1)ds = \int_{\underline{\gamma}_2} f(\underline{\gamma}_2)ds$ dove $\underline{\gamma}_1$ e $\underline{\gamma}_2$ sono curve equivalenti.

$$\int_{\underline{\gamma}_1} f(\underline{\gamma}_1)ds = \int_a^b f(\underline{\gamma}_1(t))\|\underline{\gamma}_1'\|dt$$

Ora supponiamo che $t = \varphi(\tau)$, $\varphi' > 0$ e ricordiamo che $(\varphi^{-1}(t))' = 1/\varphi'(\tau)$. L'unico elemento che necessita di un minimo di attenzione è $\underline{\gamma}_1'(t)$.

$$\underline{\gamma}_1(t) = \underline{\gamma}_1 \circ \varphi \circ \varphi^{-1}(t) \doteq \left(\underline{\gamma}_2 \circ \varphi^{-1}\right)(t)$$

da cui

$$\frac{d}{dt}\underline{\gamma}_1(t) = \frac{d}{d\tau}\underline{\gamma}_2(\tau)\frac{d}{dt}\varphi^{-1}(t) = \frac{d}{d\tau}\underline{\gamma}_2(\tau) \cdot \frac{1}{\varphi'(\tau)} = \underline{\gamma}_2' \cdot \frac{1}{\varphi'(\tau)}$$

Quindi l'integrale diventa

$$\int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\underline{\gamma}_1(\varphi(\tau)))\|\underline{\gamma}_2'\|\frac{1}{|\varphi'(\tau)|}\varphi'(\tau)dt = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\underline{\gamma}_2(\tau))\|\underline{\gamma}_2'\|\frac{1}{\varphi'(\tau)}\varphi'(\tau)dt =$$
$$= \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\underline{\gamma}_2(\tau))\|\underline{\gamma}_2'\|dt = \int_{\underline{\gamma}_2} f(\underline{\gamma}_2)ds$$

Se $\varphi' < 0$, abbiamo

$$\int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\underline{\gamma}_1(\varphi(\tau)))\|\underline{\gamma}_2'\|\frac{1}{|\varphi'(\tau)|}\varphi'(\tau)dt = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\underline{\gamma}_2(\tau))\|\underline{\gamma}_2'\|\frac{-1}{\varphi'(\tau)}\varphi'(\tau)dt =$$
$$= \int_{\varphi^{-1}(b)}^{\varphi^{-1}(a)} f(\underline{\gamma}_2(\tau))\|\underline{\gamma}_2'\|dt$$

• Esercizio: Calcolo del baricentro del triangolo di vertici $(a, 0)$, $(0, b)$, $(-a, 0)$.

Eseguiamo tutti calcoli, anche quelli il cui risultato è a priori ovvio come ad esempio l'ascissa del baricentro che è chiaramente nulla.

Siano

$$\underline{\gamma}_1(t) = \begin{cases} t & -a \leq t \leq a \\ 0 \end{cases} \qquad \underline{\gamma}_2(t) = \begin{cases} -t & -a \leq t \leq 0 \\ b + \dfrac{b}{a}t \end{cases} \qquad \underline{\gamma}_3(t) = \begin{cases} -t & 0 \leq t \leq a \\ b - \dfrac{b}{a}t \end{cases}$$

$\underline{\gamma}_1$ viene percorsa da sinistra verso destra, $\underline{\gamma}_1$ dal basso verso l'alto e $\underline{\gamma}_3$ dall'alto verso il basso. La lunghezza del triangolo è chiaramente $L(a,b) \doteq 2a + 2\sqrt{a^2+b^2}$

Ascissa del baricentro.

$$\int_{\underline{\gamma}_1\cup\underline{\gamma}_2\cup\underline{\gamma}_3} xds = \int_{\underline{\gamma}_1} xds + \int_{\underline{\gamma}_2} xds + \int_{\underline{\gamma}_3} xds$$

$$\int_{\underline{\gamma}_1} xds = \int_{-a}^{a} t\sqrt{1^2+0^2}dt = 0, \qquad \int_{\underline{\gamma}_2} xds = \int_{-a}^{0} (-t)\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}dt$$

$$\int_{\underline{\gamma}_3} xds = \int_{0}^{a} (-t)\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}dt$$

e la somma degli ultimi due fa zero come ci aspettavamo.

Ordinata del baricentro.

$$\int_{\underline{\gamma}_1} yds = \int_{-a}^{a} 0\cdot\sqrt{1^2+0^2}dt = 0$$

$$\int_{\underline{\gamma}_2} yds = \int_{-a}^{0} \left(b+\frac{b}{a}t\right)\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}dt$$

$$\int_{\underline{\gamma}_3} yds = \int_{0}^{a} \left(b-\frac{b}{a}t\right)\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}dt$$

la cui somma dà

$$2ab\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}} - a^2\frac{b}{a}\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}} = ab\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}$$

Le coordinate del baricentro sono quindi

$$\left(0, \frac{b\sqrt{a^2+b^2}}{2a+2\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

La scelta del verso di percorrenza su $\underline{\gamma}_1, \underline{\gamma}_2, \underline{\gamma}_3$, è del tutto irrilevante dato il risultato del teorema appena dimostrato.

Anche la lunghezza del triangolo, volendo, si può trovare attraverso gli integrali curvilinei. *fine dell'esercizio*

Pag.9 ed esempio a pag.9–10 delle dispense di Tauraso.

Pag.11 delle dispense di Tauraso.

♠ Calcolare la derivata rispetto a t della funzione $U(\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ supponendo che $U(x,y)$ sia differenziabile e $\gamma_i(t)$ derivabile, $i = 1, 2$.

Svolgimento Sia $g(t) \doteq U(\gamma_1(t), \gamma_2(t))$. Abbiamo

$$g(t+h) - g(t) = U(\gamma_1(t+h), \gamma_2(t+h)) - U(\gamma_1(t), \gamma_2(t))$$

Ricordiamo la differenziabilità

$$U(\underline{x}') = U(\underline{x}) + \underline{\partial}U(\underline{x})\cdot(\underline{x}'-\underline{x}) + o(\|\underline{x}'-\underline{x}\|)$$

Nel nostro caso $\underline{x} = \underline{\gamma}(t)$ e $\underline{x}' = \underline{\gamma}(t+h)$ per cui

$$g(t+h) - g(t) = \underline{\partial} U(\underline{\gamma}(t)) \cdot (\underline{\gamma}(t+h) - \underline{\gamma}(t)) + o(\|\underline{\gamma}(t+h) - \underline{\gamma}(t)\|) =$$
$$\underbrace{=}_{\underline{\gamma}\ derivabile} \underline{\partial} U(\underline{\gamma}(t)) \cdot (\underline{\gamma}(t+h) - \underline{\gamma}(t)) + o(\|\underline{\gamma}'(t)h + o(|h|)\|)$$

Se $\underline{\gamma}'(t) \neq 0$, la precedente espressione è pari a

$$\underline{\partial} U(\underline{\gamma}(t)) \cdot (\underline{\gamma}(t+h) - \underline{\gamma}(t)) + o(\|\underline{\gamma}'(t)h\|) = \underline{\partial} U(\underline{\gamma}(t)) \cdot (\underline{\gamma}(t+h) - \underline{\gamma}(t)) + \|\underline{\gamma}'(t)\| o(|h|)$$

e dividendo per h e facendo il limite per $h \to 0$ abbiamo

$$\underline{\partial} U(\underline{\gamma}(t)) \cdot \frac{(\underline{\gamma}(t+h) - \underline{\gamma}(t))}{h} + \frac{o(\|\underline{\gamma}'(t)h\|)}{h} \to \underline{\partial} U(\underline{\gamma}(t)) \cdot \underline{\gamma}(t)$$

Sapendo che $o(o(x)) = o(x)$, se $\underline{\gamma}'(t) = \underline{0}$, la precedente espressione è pari a

$$\underline{\partial} U(\underline{\gamma}(t)) \cdot (\underline{\gamma}(t+h) - \underline{\gamma}(t)) + o(|h|)$$

e dividendo per h e mandando ha zero, si ha lo stesso risultato.

Lezione dell'11/04/2016 Curve e integrali curvilinei di seconda specie

Teorema 2 (pag.15 delle dispense di Tauraso) *Siano $\underline{\gamma}$ e $\underline{\eta}$ due curve equivalenti. Allora $\int_{\underline{\gamma}} \omega = \int_{\underline{\eta}} \omega$ se $\varphi' > 0$ oppure $\int_{\underline{\gamma}} \omega = -\int_{\underline{\eta}} \omega$ se $\varphi' < 0$ dove $\omega = a(\underline{x})dx + b(\underline{x})dy$.*

Dimostrazione

$$\int_{\underline{\gamma}} \omega = \int_a^b (a(\underline{\gamma}(t))\gamma_1'(t) + b(\underline{\gamma}(t))\underline{\gamma}_2'(t)dt$$

Sia ora $t = \varphi(\tau)$ per cui si ha

$$\int_{\varphi^{(-1)}(a)}^{\varphi^{(-1)}(b)} \left[a(\underline{\gamma}(\varphi(\tau))) \frac{(\gamma_1 \circ \varphi)'}{\varphi'(\tau)} + b(\underline{\gamma}(\varphi(\tau))) \frac{(\gamma_1 \circ \varphi)'}{\varphi'(\tau)} \right] \varphi'(\tau) d\tau =$$
$$= \int_{\varphi^{(-1)}(a)}^{\varphi^{(-1)}(b)} \left[a(\underline{\eta}(\tau))\eta_1' + b(\underline{\eta}(\tau))\eta_2' \right] d\tau =$$

Se $\varphi' > 0$, allora $\varphi^{(-1)}(a) < \varphi^{(-1)}(b)$. Se $\varphi' < 0$, allora $\varphi^{(-1)}(a) > \varphi^{(-1)}(b)$ e scriviamo

$$-\int_{\varphi^{(-1)}(b)}^{\varphi^{(-1)}(a)} \left[a(\underline{\eta}(\tau))\eta_1' + b(\underline{\eta}(\tau))\eta_2' \right] d\tau = -\int_{\underline{\eta}} \omega \quad \blacksquare$$

Dal paragrafo 4 a pag.16 fino a pag.22 (esempio 12 escluso); esempio 14 pag.23–24 ed esempio 15 pag.24–25 (solo calcolo della primitiva; senza il calcolo dell'integrale specificato nell'esempio).

• Trovare la primitiva della forma differenziale $(y^2, 2xy + y)$.

Svolgimento Bisogna risolvere il sistema $U_x = y^2, U_y = 2xy + y$. Dalla prima otteniamo $U(\underline{x}) = y^2x + h(y)$. Dalla seconda $2xy + h'(y) = 2xy + y$ ossia $h'(y) = y$ e quindi $h(y) = y^2/2 + c$. Alla fine abbiamo $U(\underline{x}) = y^2x + y^2/2 + c$. Cercare la primitiva che in $\underline{x}_0$ vale U_0, fissa il valore della costante c. Infatti si deve risolvere

$$U(\underline{x}_0) = y_0^2x_0 + \frac{y_0^2}{2} + c = U_0 \implies c = U_0 - y_0^2x_0 + \frac{y_0^2}{2}$$

Lezione del 14/04/2016 Curve e integrali curvilinei di seconda specie

Pag. 26,27 delle dispense di Tauraso. Per l'integgrale lungo φ_2 ho dapprima parametrizzato la curva scrivendo $(-t,\varphi(-t))$, $-b\le t\le -a$. Il corrispondente integrale (il primo dell'ultima riga di pag.26) diventa

$$\int_{-b}^{-a} A(-t,\varphi(-t))(-1)dt \underbrace{=}_{t=-\tau} \int_b^a A(\tau,\varphi_2(\tau))d\tau$$

che è esattamente quanto scritto sulle dispense. Per quanto riguarda pag.27, l'integrale sulla quarta curva si effettua dopo la parametrizzazione $(\psi_1(-t),-t)$, $-d\le t\le -c$.

Pag.28 delle dispense di Tauraso. In tal caso bisogna fare riferimento alla figura ma bisogna disegnare solo le due curve $\underline{\gamma}_1$ e $\underline{\gamma}_2$. La curva $\underline{\gamma}_1\cup\underline{\gamma}_2$ è la curva, detta ∂^+D, percorsa in senso antiorario e costituente il bordo dell'insieme tratteggiato. A questo punto otteniamo la formula

$$\int\int_D\left(\frac{\partial B}{\partial x}-\frac{\partial A}{\partial y}\right)dx\,dy=\int_{\partial^+D}(Adx+Bdy)=\int_{\underline{\gamma}_1\cup\underline{\gamma}_2}(Adx+Bdy)$$

Si noti che $\underline{\gamma}_2$, come curva in sé, è percorsa in senso orario.

Esempio 16 pag. 29–30. Esempio 18 pag. 31.

Corollario del Lemma di Gauss–Green rappresentato dalla formula di pag. 32 $|D|=\displaystyle\int\int_D dx\,dy=\frac{1}{2}\int_{\partial^+D}(xdy-ydx)$ e sua rappresentazione tramite coordinate polari.

• Esercizio 13.8.1 escluse le domande 1) e 2) del file file http://www.mat.uniroma2.it/ perfetti/eserci/19intsup.pdf

Lezione del 18/04/2016 Curve e integrali curvilinei di seconda specie

• Calcolare $\displaystyle\oint_{\underline{\gamma}}\omega$ dove $\underline{\gamma}$ è la curva che connette i punti di coordinate $(0,2)$, $(1,0)$ lungo l'ellisse $x^2+y^2/4=1$ percorsa in senso antiorario e $\omega=\dfrac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}$. È stato risolto in 5 modi diversi (almeno in parte)

Esercizio num.20 pag.33 delle dispense di Tauraso.

Lezione del 19/04/2016 Curve e integrali curvilinei di seconda specie – numeri complessi (recupero della lezione del 4/4/2016).

• **Teorema di Gauss nel piano** Partiamo da

$$\int\int_D\left(\frac{\partial B}{\partial x}-\frac{\partial A}{\partial y}\right)dx\,dy=\int_{\partial^+D}(Adx+Bdy)=$$

e parametrizziamo $\partial^+D=(\gamma_1,\gamma_2)$. Il vettore tangente è $\underline{t}=(\gamma_1',\gamma_2')$. Il vettore ortogonale alla curva, $\underline{\tau}$,e destro giro ($\underline{\tau}\wedge\ \underline{t}>0$) è $(\gamma_2',-\gamma_1')$. Riscriviamo

$$\int_{\underline{\gamma}}(Adx+Bdy)=\int_a^b((-A)(-\gamma_1')+B\gamma_2')dt=\int_a^b(B,A)\cdot(\gamma_2',-\gamma_1')dt=\int_a^b(B,A)\cdot\underline{\tau}$$

ossia è l'integrale del flusso del campo vettoriale $(B,-A)$, uscente attraverso la curva $\underline{\gamma}$. Ora $B_x+(-A)_y$ è la *divergenza* del campo vettoriale $(B,-A)$. Ne segue il teorema di Gauss: il flusso uscente attraverso una curva chiusa è l'integrale della divergenza all'interno della superficie (piatta) racchiusa dalla curva e ciò vale chiaramente per qualsiasi campo vettoriale (A, B).

♠ Problema: **trovare l'errore** Sia data la forma $\omega = \dfrac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2}$ e le due curve $\underline{\gamma}_1$ data da $x^2 + y^2 = 9$ e $\underline{\gamma}_2$ pari a $(x-2)^2 + y^2 = 1$. La prima percorsa in senso antiorario e la seconda in senso orario. Sia $\partial^+ D$ la curva costituita dall'unione delle due curve e che costituisce il bordo dell'insieme, detto D, compreso fra le due curve. Sappiamo che $\displaystyle\int_{\underline{\gamma}_1} \omega = 2\pi$ ed applicando il Lemma di Gauss–Green, troviamo che l'integrale sulla seconda deve essere pari a -2π mentre sappiamo che deve fare zero. Dovè l'errore?

Numeri complessi: somma, prodotto, quoziente, modulo, rappresentazione algebrica $z = a + ib$, trigonometrica $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, esponenziale $z = |z|e^{i\varphi}$. Soluzione della equazione $z^n = w$ con w numero complesso dato. Volendo si possono visitare le pagine
https://en.wikipedia.org/wiki/Complex_number, (fino "Natural Logarithm")
https://it.wikipedia.org/wiki/Radice_dell%27unit%C3%A0,
http://mathworld.wolfram.com/RootofUnity.html

♠ risolvere le equazioni: $iz^2 + z(1-i) + 1 = 0$, $z^6 - 7z^3 - 8 = 0$ (applicare la formula sulle quazioni di secondo grado). Dopo aver risolto l'equazione $z^6 + 1 = 0$, scomporre in fattori irriducibili il polinomio $x^6 + 1$. Fare la stessa cosa con $x^6 - 1$.

Lezione del 21/04/2016 Funzioni complesse

Pag.1–3 (escluso esempio 6). Pag.5–10. Esempio pag.13 con $n \geq 1$.

• Il testo del Teorema 2 di pag.7 va modificato togliendo "con le loro derivate parziali continue in Ω"

A lezione il Teorema 2 è stato dimostrato completamente. Riporto qui la dimostrazione.

Dimostrazione Sia $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ olomorfa. Ciò vuol dire che

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + o(|z - z_0|) = f(z_0) + (a + ib)(z - z_0) + o(|z - z_0|), \qquad a + ib = f'(z_0)$$

Separando parte reale e immaginaria si arriva a

$$\begin{aligned} u(x,y) + iv(x,y) &= (u(x_0,y_0) + (a(x - x_0) - b(y - y_0)) + Re(o(|z - z_0|))) + \\ &+ i\,(v(x_0,y_0) + (a(y - y_0) + b(x - x_0)) + Im(o(|z - z_0|)))\,. \end{aligned}$$

$u(x,y) = (u(x_0,y_0) + (a(x - x_0) - b(y - y_0)) + Re(o(|z - z_0|)))$ è la relazione di differenziabilità di $u(x,y)$ e la seconda la stessa cosa per $v(x,y)$. Ne segue che $a = u_x(x_0,y_0) = v_y(x_0,y_0)$ e $b = v_x(x_0,y_0) = -u_y(x_0,y_0)$.
Viceversa supponiamo che $u(x,y)$ e $v(x,y)$ siano differenziabili e valgano le condizioni di Cauchy–Riemann. Sappiamo che

$$\begin{aligned} u(\underline{x}) &= u(\underline{x}_0) + u_x(\underline{x}_0)(x - x_0) + u_y(\underline{x}_0)(y - y_0) + o(|\underline{x} - \underline{x}_0|) \\ v(\underline{x}) &= v(\underline{x}_0) + v_x(\underline{x}_0)(x - x_0) + v_y(\underline{x}_0)(y - y_0) + o(|\underline{x} - \underline{x}_0|). \end{aligned}$$

Sommando si ottiene

$$u(\underline{x}) + iv(\underline{x}) = u(\underline{x}_0) + iv(\underline{x}_0) + (x - x_0)(u_x(\underline{x}_0) + iv_x(\underline{x}_0)) + i(y - y_0)(-iu_y(\underline{x}_0) + v_y(\underline{x}_0) + o(|z - z_0|)$$

ed usando le condizioni di Cauchy Riemann si arriva a

$$\begin{aligned}&u(\underline{x})+iv(\underline{x})=u(\underline{x}_0)+iv(\underline{x}_0)+\\&+(x-x_0)(u_x(\underline{x}_0)+iv_x(\underline{x}_0))+i(y-y_0)(iv_x(\underline{x}_0)+u_x(\underline{x}_0)+o(|z-z_0|)=\\&=f(z_0)+(z-z_0)(u_x(\underline{x}_0)+iv_x(\underline{x}_0))+o(|z-z_0|)\end{aligned}$$

da cui segue la derivabilità della funzione $f(z)$ in $z_0=x_0+iy_0$ e $f'(z_0)=u_x(\underline{x}_0)+iv_x(\underline{x}_0))=\frac{1}{i}(u_y(\underline{x}_0)+iv_y(\underline{x}_0))$ q.e.d.

• Grazie alle condizioni di Cauchy–Riemann viene fuori che data una funzione olomorfa $f(z)$ in un aperto a $A\subseteq\mathbf{C}$, la quantita

$$f(z)dz=\big[u(x,y)dx-v(x,y)dy\big]+i\big[v(x,y)dx+u(x,y)dy\big]\doteq\omega_1+i\omega_2$$

definisce due forme differenziali **chiuse** in A

Lezione del 28/04/2016 Analisi Complessa

Esempio 3 pag.13 con $n\le -1$ intero.

♠ Usando l'ultima osservazione del 21/4/2016 ed il contenuto della pagina 16 delle dispense di Tauraso, dimostrare che la forma differenziale $\dfrac{(x^2-y^2)dx+2xydy}{(x^2+y^2)^2}$ è esatta nel suo dominio. [Suggerimento: si studi dz/z^2. Si può anche procedere rimanendo all'interno del contesto delle forme differenziali senza sconfinare nelle variabili complesse]

• Osservazione che $\dfrac{dz}{z}=\dfrac{xdx+ydy}{x^2+y^2}+i\dfrac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}=\dfrac{1}{2}d(\ln\rho^2)+id(\varphi)$ e relazione con l'integrale $\displaystyle\oint_{|z|=r}\frac{dz}{z}$

Pag.18 e 19 fino a Esempio 5.

• $\displaystyle\oint_{|z|=r}\frac{e^z}{z}dz$ usando la formula di Cauchy di pag.18

• Concetto di primitiva di una funzione complessa.

Definizione Sia $f\colon A\subseteq\mathbf{C}\to\mathbf{C}$ con A aperto. Se esiste $F\colon A\subseteq\mathbf{C}\to\mathbf{C}$ tale che $F'(z)=f(z)$, F è detta primitiva di f.

Teorema *Sia $f\colon A\subseteq\mathbf{C}\to\mathbf{C}$ continua con A connesso per archi e aperto. Supponiamo che $\displaystyle\int_{\gamma_{z_0,z}}f(z)dz$ non dipenda dal sostegno di γ il cui sostegno giace in A chiaramente, ma solo da z (fissato z_0). Allora la funzione $F(z)\doteq\displaystyle\int_{\gamma_{z_0,z}}f(z)dz$ è la primitiva di f. Inoltre $\displaystyle\int_{\gamma_{z_0,z}}f(z)dz=F(z)-F(z_0)$.*

Dimostrazione Sia $\sigma=z+th$ con $0\le t\le 1$ e sia $\gamma_{z_0,z+h}=\gamma_{z_0,z}\cup\sigma$. Inoltre $F(z+h)=\displaystyle\int_{\gamma_{z_0,z+h}}f(z)dz$. Dunque

$$\frac{F(z+h)-F(z)}{h}=\frac{1}{h}\left[\int_{\gamma_{z_0,z}}f(z)dz+\int_{\gamma_{z,z+h}}f(z)dz-\int_{\gamma_{z_0,z}}f(z)dz\right]=\frac{1}{h}\int_{\gamma_{z,z+h}}f(z)dz=$$

$$=\frac{1}{h}\int_0^1 f(z+th)\underbrace{hdt}_{dz}=f(z+\tau h)\underbrace{\longrightarrow}_{h\to 0\ e\ f\ continua}f(z)\implies F'(z)=f(z)$$

Corollario *Nelle condizioni del teorema sopra, se f è olomorfa e A è semplicemente connesso, allora f ammette primitiva.*

Dimostrazione Sappiamo che l'integrale su ogni curva chiusa è zero e quindi scatta il Teorema.

■

• Se f è olomorfa ma A non è semplicemente connesso, la primitiva potrebbe esistere oppure no. Ad esempio $f(z) = z^{-n}$ e $A = \mathbf{C}\backslash\{0\}$ e $n \neq -1$ ammette primitiva $z^{-n+1}/(1-n)$ ma con $n = -1$ no. Se invece prendiamo, ad esempio, $A = \mathbf{C} \backslash\{\mathbf{C} : Imz = 0, Rez > 0\}$, allora anche $1/z$ ammette primitiva.

♠ Sia data la funzione del piano complesso $f(z) = x^2 + y^2$.

1) Dimostrare che in $z = 0$ è derivabile.

2) **Trovare l'errore nei seguenti passaggi**
$\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=1} \frac{f(z)}{z}dz = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=r} \frac{f(z)}{z}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{r^2}{e^{i\varphi}} ie^{i\varphi}d\varphi = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} ir^2 d\varphi = r^2$. Il primo uguale deriva dalla formula centrale a pag.18 delle dispense di Tauraso con $R = 0$, $z_0 = 0$ e $f(z) = x^2 + y^2$. Se ora mandiamo r a zero otteniamo zero e quindi $\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=1} \frac{f(z)}{z}dz = 0$. D'altra parte $\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=1} \frac{f(z)}{z}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} id\vartheta = 1$. Dov'è l'errore?

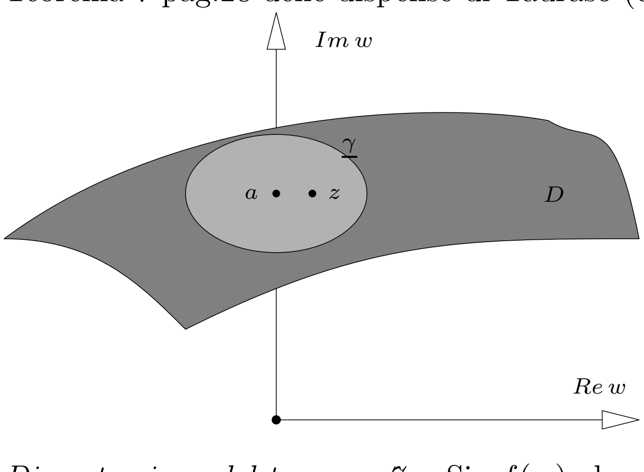
Dalle dispense **con soli esercizi** di Tauraso risolvere gli esercizi fino a pag.10. Dalle dispense **teoria ed esercizi** di Tauraso risolvere gli esercizi fino a pag.23.

Lezione del 02/05/2016 Analisi Complessa

Dimostrazione che se $a \neq 1$, $A_n \doteq \sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$ (usare Ruffini in $x^{n+1} - y^{n+1} = (x-y)\sum_{k=0}^{n} x^n y^{n-k}$ con $x = a$ e $y = 1$.) Se $a = 1$, allora $A_n = n + 1$.

Dedurne che: i) se $|a| < 1$, $A_n \to 1/(1-a)$, ii) se $a \geq 1$, $A_n \to +\infty$, iii) se $a < -1$, il limite non esiste.

Teorema 7 pag.28 delle dispense di Tauraso (con dimostrazione non presente)



Dimostrazione del teorema 7 Sia $f(w)$ olomorfa in $D = \overset{\circ}{D}$. La formula di Cauchy dà

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z}dw$$

Poi scriviamo $w-z=w-a+a-z=(w-a)\left(1-\dfrac{z-a}{w-a}\right)$ e notare che su γ si ha $|z-a|<|w-a|$ da cui

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(w)}{w-z}dw=\frac{1}{2\pi i}\oint \frac{f(w)}{w-a}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(z-a)^k}{(w-a)^k}dw=\sum_{k=0}^{+\infty}(z-a)^k\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{f(w)}{(w-a)^{k+1}}dw=$$
$$=\sum_{k=0}^{+\infty}(z-a)^k\frac{f^{(k)(a)}}{k!}$$

Notare che per avere sempre $|z-a|<|w-a|$ bisogna che $|z-a|<dist(a,\partial D)$.

• Applicazione del teorema alla funzione $1/(1-z)$. Scivere la serie di taylor centrata nell'origine e centrata nel punto $z=i$ con particolare rilevanza data al raggio di convergenza ossia al valore massimo R per cui la serie converge per $|z-a|<R$. Tale valore di R cambia se cambia il centro dello sviluppo di Taylor.

Intermezzo sulle serie

Definizioni e proprietà generali. Pagine 23 e 24 fino a “Osservazione” delle dispense di Tauraso. Vedere pag.10 del file

http://www.mat.uniroma2.it/ perfetti/didattica/analisi-I_mir-pet_09-10/Dimostrazione_di_alcuni_risultati.pdf

• Teoremi del confronto: 1) $0\le a_k\le c_k$ e $\sum c_k$ convergente, implica $\sum a_k$ convergente, 2) $0\le d_k\le a_k$ e $\sum d_k$ divergente, implica $\sum a_k$ divergente. La relazione $0\le a_k\le b_k$ è l'analoga della $|z_n|\le c_n$ a pag.24 delle dispense di Tauraso ($|z_n|\ge 0$ è ovvia).

• Dimostrazione attraverso il criterio del confronto che $\sum 1/k^a$ diverge se $a\le 1$.

• **Teorema** *Sia $a_k\ge 0$. Se esiste $p>1$ tale che $\lim\limits_{n\to+\infty}k^pa_k=l\ne+\infty$, allora la serie $\sum a_k$ converge.*

Dimostrazione $\lim\limits_{n\to+\infty}k^pa_k=l\ne+\infty$ vuol dire che definitivamente $l-\varepsilon<k^pa_k<l+\varepsilon$ da cui $0\le a_k\le(l+\varepsilon)k^{-p}$ e se $p>1$, il criterio del confronto implica la convergenza della serie $\sum a_k$.

Lezione del 05/05/2016 Serie reali e di potenze

• Studio del carattere delle serie

$$\sum\frac{\sqrt{k}}{k^2+k+1},\quad \sum\frac{\sqrt{k}}{k^2-k+1},\quad \sum\frac{\sqrt{k}}{k+1},\quad \sum\frac{\sqrt{k}}{\ln(k+e^{k^a})},\quad \sum\frac{\sqrt{k}}{\ln(k+e^{ka})}$$

a nei reali.

• **Teorema** *Sia $a_k\ge 0$. Se esiste $p\le 1$ tale che $\lim\limits_{n\to+\infty}k^pa_k=l\ne 0$, allora la serie $\sum a_k$ diverge.*

Dimostrazione $\lim\limits_{n\to+\infty}k^pa_k=l\ne 0$ vuol dire che definitivamente $l-\varepsilon<k^pa_k<l+\varepsilon$ da cui $(l-\varepsilon)k^{-p}<a_k$ e se $p\le 1$, il criterio del confronto implica la divergenza della serie $\sum a_k$. Notare come sia essenziale $l\ne 0$ e quindi $l>0$. Inoltre dovendo essere $l-\varepsilon>0$, prendiamo, ad esempio, $\varepsilon=l/2$ e quindi la relazione $(l-\varepsilon)k^{-p}<a_k$ è vera solo da un certo $n_{l/2}$ in poi ma il carattere di una serie non cambia se l'indice muto comincia da $k=1$ oppure k qualsiasi.

• **Teorema** *Sia $a_k>0$. Sia $\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{a_{k+1}}{a_k}=l$. Se $l>1$ la serie diverge. Se $l<1$ la serie converge. Se $l=1$ dipende da caso a caso.*

• Studiare il carattere della serie $\sum \frac{k^{10^3}}{k!}$

• **Teorema** *Sia* $a_k > 0$. *Sia* $\lim\limits_{k\to\infty} a_k^{\frac{1}{k}} = l$. *Se* $l > 1$ *la serie diverge. Se* $l < 1$ *la serie converge. Se* $l = 1$ *dipende da caso a caso.*

• Criterio di cauchy per la convergenza delle serie ed applicazione al Teorema

• **Teorema** *Se* $\sum |a_k|$ *converge, allora converge pure* $\sum a_k$ ed applicazione alla serie $\sum(\sin k)/k^2$.

• Estrazione della frazione generatrice del numero periodico $0,\overline{1234}$.

• Uso della proprietà di Cauchy per dimostrare che se una serie converge allora $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=n}^{\infty} a_k = 0$.

Serie di potenze $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k(z-z_0)^k$ e definizione del raggio di convergenza.

Lezione del 09/05/2016 Serie reali e di potenze

Calcolo del raggio di convergenza delle serie di potenze $\sum z^k$, $\sum z^k/k$, $\sum z^k/k^N$, con N intero qualsiasi, $\sum k!z^k$, $\sum z^k/k!$, $\sum(-z)^{2k+1}/(2k+1)!$. In relazione alla seconda serie si è studiato il carattere della serie numerica $\sum(-1)^k/k$ (serie di Leibnitz ma la convergenza è stata dimostrata usando la proprietà di Cauchy e sfruttando l'andamento della somma di due termini adiacenti).

Derivazione di una serie di potenze (teorema 6 a pag.27 delle dispense di Tauraso).

Pagina 29, 30 e 31 fino a “in z_0” delle dispense di Tauraso.

Sviluppo di Laurent della funzione $1/(1-z)$, centrata in $z_0 = 0$ e per $|z| > 1$.

Lezione del 12/05/2016 Funzioni complesse

• Data la funzione $\dfrac{1}{z^2-(3+i)x+3i}$ si calcoli: 1) la serie di Taylor centrata nell'origine e l'insieme di convergenza, 2) la serie di Laurent centrata nell'origine e convergente nell'insieme $1 < |z| < 3$, 3) la serie di Laurent centrata nell'origine convergente per $|z| > 3$, 4) la serie di Laurent centrata in $z = i$ e convergente per $|z-i| < |3-i|$, 4) la serie di Laurent centrata in $z = i$ e convergente per $|z-i| > |3-i|$,

Nozione di singolarità polare di una funzione olomorfa; nozione di residuo, calcolo dei residui di di una funzione complessa, Teorema 9 pag.34–35 delle dispense di Tauraso

Lezione del 16/05/2016 Funzioni complesse

• Calcolo degli integrali usando i teorema dei residui: $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+1)(3x^2+1)}$ $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x^2dx}{(x^2+1)(3x^2+1)}$ $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{dt}{p^2-2p\cos t+1}$ $|p| \neq 1$.

In generale sono calcolabili gli integrali della forma

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}dx, \quad P, Q \text{ polinomi}, \ Q(x)\neq 0, \ \text{grado}(Q)\geq \text{grado}(P)+2$$

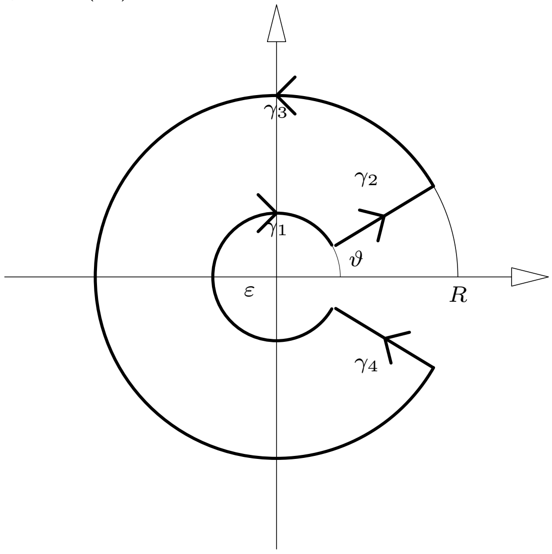
e

$$\int_0^{2\pi}\frac{P(\cos t,\sin t)}{Q(\cos t,\sin t)}dt \quad P, Q \text{ polinomi di } x, y, \quad Q(x,y)\neq 0$$

♠ Calcolare gli integrali $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^3}$ $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^4}$, $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2 t dt}{p^2-2p\cos t+1}$ $|p|\neq 1$, $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2 t dt}{1+\sin^2 t}$

Lezione del 19/05/2016 Funzioni complesse

• Calcolo degli integrali $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}}{(1+x)^2}dx$, e in generale integrali della forma $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}P(x)}{Q(x)}dx$, con $Q(x)$ polinomio mai uguale a zero in $(0,+\infty)$ tale che grado$(Q)\geq$ grado$(P)+\frac{5}{2}$. Si possono anche calcolare integrali come $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{P(x)}{\sqrt{x}Q(x)}dx$, con $Q(0)\neq 0$. Stavolta però grado$(Q)+\frac{1}{2}\geq$ grado$(P)+2$.



$$\gamma_2(t)=te^{i\vartheta}\quad \varepsilon\leq t\leq R$$
$$\gamma_3(t)=Re^{it}\quad \vartheta\leq t\leq 2\pi-\vartheta$$
$$\gamma_4(t)=-te^{i(2\pi-\vartheta)}\quad -R\leq t\leq -\varepsilon$$
$$\gamma_1(t)=\varepsilon e^{-it}\quad \vartheta-2\pi\leq t\leq -\vartheta$$

Si esegua $\displaystyle\lim_{\vartheta\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{R\to+\infty}\oint_{\underline{\gamma}}\frac{\sqrt{x}}{(1+x)^2}dx$ con $\underline{\gamma}=\underline{\gamma}_1\cup\underline{\gamma}_2\cup\underline{\gamma}_3\cup\underline{\gamma}_4$ e si dimostri che

$$\lim_{\vartheta\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{R\to+\infty}\oint_{\underline{\gamma}_1}\frac{\sqrt{x}}{(1+x)^2}dx=\lim_{\vartheta\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{R\to+\infty}\oint_{\underline{\gamma}_3}\frac{\sqrt{x}}{(1+x)^2}dx=0$$

Inoltre $\displaystyle\lim_{\vartheta\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{R\to+\infty}\oint_{\underline{\gamma}_2}\frac{\sqrt{x}}{(1+x)^2}dx=\lim_{\vartheta\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{R\to+\infty}\oint_{\underline{\gamma}_4}\frac{\sqrt{x}}{(1+x)^2}dx=\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}}{(1+x)^2}dx$

♠ Calcolare $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}(1+x^2)^2}dx$, così come $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}}{(1+x^2)^2}dx$, oppure $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x\sqrt{x}}{(1+x^2)^2}dx$,

• $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^3}dx$ senza usare il cammino particolare usato nelle dispense di Tauraso a pag. 46–47 ma introducendo la funzione complessa $\displaystyle\frac{\mathrm{Ln}(z)}{1+z^3}$ con $\mathrm{Ln}(z)=\mathrm{Ln}(|z|e^{i\varphi})=\ln(|z|)+i\varphi$. Si integri sullo stesso cammino di sopra.

♠ Si calcoli ad esempio $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+x^2)(1+x^2+x)}dx$ $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+x^3)(1+x^2-x)}dx$

♠ $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+x)(1+x^2+x)}dx$ $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{(1+x^2)(1+x^2+x)}dx$

♠ $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+x)(1+x^2)(1+x^3)}dx$

♠ Si calcoli $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos t}{3-\sin t}dt,\ \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 t}{3-\sin t}dt,\ \int_0^{2\pi} \frac{\cos t}{3+\sin t}dt,\ \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 t}{3+\sin t}dt,$

♠ Si calcoli $\displaystyle\oint_{|z|=5} \frac{zdz}{\sin z(1-\cos z)}$ (antiorario)

Lezione del 23/05/2016 Funzioni complesse

• $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^{\frac{p}{q}} \frac{P(x)}{Q(x)}dx$ con grado$(P) \geq$ grado$(Q) + 2 + \frac{p}{q}$, $Q(x) \neq 0$. Si integri sullo stesso cammino descritto nella figura del **19/05/2016** .

Pagina 43 delle dispense di Tauraso. Calcolo di integrali del tipo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cos ax \frac{P(x)}{Q(x)}dx \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \sin ax \frac{P(x)}{Q(x)}dx, \qquad a \in \mathbf{R}$$

dove p e q interi primi fra di loro, $p < q$ e q dispari. Inoltre P e Q sono polinomi con grado$(P) \geq$ grado$(P) + 2$ e $Q(x) \neq 0$.

• $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos ax}{x^2+b^2}dx,$

♠ $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin ax}{(x^2+1)^2}dx, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos ax}{x^2+x+1}dx$

• Valor Principale (VP) di un integrale. Evidenziamo con un calcolo esplicito

$$\begin{aligned} J &\doteq \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin ax}{x(x^2+b^2)}dx = \\ &= \int_{-\infty}^{-1} \frac{\sin ax}{x(x^2+b^2)}dx + \int_{-1}^{1} \frac{\sin ax}{x(x^2+b^2)}dx + \int_{1}^{+\infty} \frac{\sin ax}{x(x^2+b^2)}dx \doteq I_1 + I_2 + I_3 \end{aligned}$$

I_2 non è in realtà un intgrale improprio in quanto $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin ax}{x} = a$ ed inoltre

$$\left|\frac{\sin ax}{x(x^2+b^2)}\right| \leq \frac{1}{x^3}$$

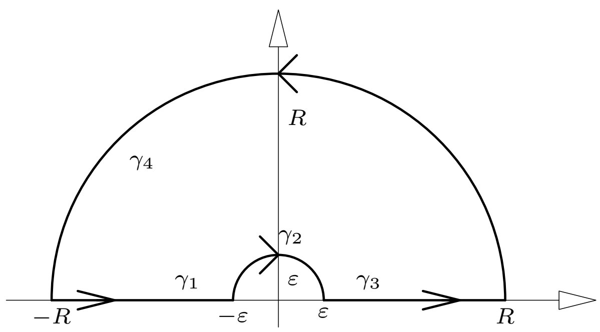
per cui anche I_1 ed I_3 convergono. L'integrale improprio J dunque esiste ma per poterlo aclcolare dobbiamo scrivere la formula

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin ax}{x(x^2+b^2)}dx = \mathrm{Im}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iax}}{x(x^2+b^2)}dx\right)$$

ed a questo punto l'origine diventa un punto di singolarità per la funzione da cui il fatto che possiamo definire il secondo integrale solo come valor principale ossia

$$VP\ \mathrm{Im}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin ax}{x(x^2+b^2)}dx\right)$$

Il cammino su cui integrare è il seguente se $a > 0$ e quello opposto (che gira in senso orario) se $a < 0$.



Eseguendo gli integrali e prendendo i limiti $\varepsilon \to 0$ $R \to +\infty$, si ottiene

$$\oint_{\underline{\gamma}} \frac{e^{iaz}}{z(z^2+b^2)}dz \xrightarrow[R\to+\infty]{\varepsilon\to 0} \left(VP \oint_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iax}}{x(x^2+b^2)}dx\right) - i\pi \frac{e^{iaz}}{z^2+b^2}\Big|_{z=0}$$

e quindi

$$\left(VP \oint_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iax}}{x(x^2+b^2)}dx\right) - i\pi \frac{e^{iaz}}{z^2+b^2}\Big|_{z=0} = 2\pi i Res\left(\frac{e^{iaz}}{z(z^2+b^2)}\right) = 2\pi i \frac{e^{iaib}}{ib2ib}$$

da cui

$$\left(VP \oint_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iax}}{x(x^2+b^2)}dx\right) = 2\pi i \frac{e^{iaib}}{ib2ib} + i\frac{\pi}{b^2} = i\frac{\pi}{b^2}\left(1-e^{-ab}\right)$$

La parte immaginaria è $\frac{\pi}{b^2}\left(1-e^{-ab}\right)$ ed è il valore dell'integrale cercato. Notare che per $a \to 0$, il risultato tende a zero come ci aspettiamo che sia ponendo $a=0$ nell'integrale originale. Se invece $b \to 0$, il risultato è illimitato come ci si aspetta dal fatto che l'integrale originario diventa un integrale improprio non convergente.

♠ Esercizi sul valor principale. $VP \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x(ax^2+bx+c)}dx$, con $b^2-4ac<0$. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin ax}{x}dx$, $VP \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iax}-e^{ix}}{x^2(x^2+b^2)}dx$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin ax}{x(x^2-x+1)}dx$, $VP \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos bx - \cos ax}{x^2}dx$, $VP \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos ax}{x(x^2+b^2)}dx$,

Calcoliamo il primo integrale. $az^2+bz+c=0$ se e solo se $z_{1,2} = \dfrac{-b \pm i\sqrt{4ac-b^2}}{2a} \doteq \dfrac{-b\pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ e $z_1 - z_2 = i\sqrt{-\Delta}/a$.

$$I = \frac{i\pi}{c} + 2\pi i Res(\frac{1}{z(az^2+bz+c)})\Big|_{z=z_1} = \frac{i\pi}{c} + 2\pi i \lim_{z\to z_1} \frac{z-z_1}{z_1(z-z_1)(z-z_2)} =$$

$$= \frac{i\pi}{c} + \frac{2\pi i}{a\frac{i\sqrt{-\Delta}}{a}\frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}} = \frac{i\pi}{c} + \frac{1}{\sqrt{-\Delta}}\frac{4a\pi}{-b+i\sqrt{-\Delta}} = \frac{i\pi}{c} + \frac{1}{\sqrt{-\Delta}}\frac{4a\pi(-b-i\sqrt{-\Delta})}{4ac} =$$

$$= \frac{-\pi b}{\sqrt{4ac-b^2}c}$$

Lezione del 26/05/2016 Funzioni complesse, Trasformata di Laplace

Nozione di punto all'infinito

• **Teorema** *Sia* $f\colon \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ *una funzione olomorfa tranne un numero finito di singolarità polari* $z_1, z_2, \dots z_n$. *Allora* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} Resf(z_k) + Resf(\infty) = 0$

• Utilizzare il terorema precedente per risolvere il seguente esercizio: trovare i primi quattro valori interi p per cui è diverso da zero l'integrale $\displaystyle\oint_{|z|=4} \frac{z^p}{z(z-1)(z^2-4)(z^3-27)}dz$

♠ Utilizzare il teorema precedente per risolvere il seguente esercizio: sia $p(z)\colon \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ il polinomio $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ e R tale che $|z|=R$ contine al suo interno tutti gli zeri di $p(z)$. Calcolare in funzione dei coefficienti del polinomio l'integrale $\displaystyle\oint_{|z|=R} \frac{zf'(z)}{f(z)}dz$ (antiorario).

Trasformata di Laplace.

Ipotesi–L *Sia* $f\colon [0,+\infty)\to \mathbf{C}$ *una funzione integrabile in ogni intervallo* $[0,b)$ *con* $b>0$.

Se $\displaystyle\int_0^{+\infty} |f(x)|dx<+\infty$ (integrale assolutamente convergente) diciamo che la funzione è assolutamente integrabile.

Proposizione *Se* $p_0\in\mathbf{C}$ *è tale che la funzione* $f(x)e^{-p_0x}$ *è assolutamente integrabile, allora se* $\mathrm{Re}p>\mathrm{Re}p_0$ *anche la funzione* $f(x)e^{-px}$ *è assolutamente integrabile.*

Dimostrazione Basta osservare che

$$\Big|\int_0^{+\infty} f(x)e^{-px}dx\Big| \le \int_0^{+\infty}\Big|f(x)e^{-px}\Big|dx = \int_0^{+\infty}|f(x)|\Big|e^{-x(\mathrm{Re}p+i\mathrm{Im}p)}\Big|dx =$$
$$= \int_0^{+\infty}|f(x)|\Big|e^{-x\mathrm{Re}p}\Big|dx \le \int_0^{+\infty}|f(x)|\Big|e^{-x\mathrm{Re}p_0}\Big|dx = \int_0^{+\infty}|f(x)|\Big|e^{-xp_0}\Big|dx$$

Definizione

$$a=\inf\left\{Re(z)\colon \int_0^{+\infty} f(x)e^{-zx}dx\,\text{assolutamente convergente}\right\}$$

è detta ascissa di convergenza di f *ed inoltre* $a\le \mathrm{Re}p_0$

Non è detto che il valore a renda l'integrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)e^{-ax}dx$ assolutamente convergente anche perché potrebbe essere $a=-\infty$. La trasformata di Laplace di una funzione f si indica con $\mathcal{L}(f)$.

Sia $f\colon [0,+\infty)\to\mathbf{C}$ tale da soddisfare la **Ipotesi–L** . Se esistono due costanti positive M ed α tali che $|f(x)|\le \hat{M}e^{\hat{a}x}$, allora $f(x)e^{-px}$ è assolutamente integrabile purché $\mathrm{Re}p>\hat{a}$.

Esempio–1 Sia α reale.

$$\mathcal{L}(e^{\alpha x})=\int_0^{+\infty} e^{-px+\alpha x}dx=\frac{e^{x(\alpha-p)}}{\alpha-p}\Big|_0^{+\infty}=\frac{e^{x(\alpha-\mathrm{Re}p-i\mathrm{Im}p)}}{\alpha-p}\Big|_0^{+\infty}=\frac{1}{p-\alpha} \qquad (26/05.1)$$

se $\mathrm{Re}p>\alpha$. Se $\mathrm{Re}p<\alpha$ l'integrale non converge in quanto

$$\lim_{x\to+\infty}\Big|\frac{e^{x(\alpha-\mathrm{Re}p-i\mathrm{Im}p)}}{\alpha-p}\Big|=+\infty$$

Se $\mathrm{Re}p=\alpha$ e $\mathrm{Im}p\neq 0$ l'integrale pure non converge. In tal caso infatti $p=\alpha$ e l'integrale chiaramente diverge. Dunque $\mathcal{L}(e^{\alpha p})=\dfrac{1}{p-\alpha}$ con la condizione $\mathrm{Re}p>\alpha$ e quindi α è l'ascissa di convergenza. In tal caso $\hat{M}=1$, $\hat{a}=\alpha$.

Esempio–2 Sia $\omega\in\mathbf{C}$ e $\mathrm{Im}\omega\neq 0$ si ha lo stesso tipo di risultato. $\mathcal{L}(e^{\omega x})=\dfrac{1}{p-\omega}$, $\mathrm{Re}p>\mathrm{Re}\,\omega$ Qui $\hat{M}=1$, $\hat{a}=\mathrm{Re}\omega$.

Esempio–3 $\mathcal{L}(\cos\omega x)=\dfrac12\mathcal{L}(e^{ix\mathrm{Re}\omega-x\mathrm{Im}\omega})+\dfrac12\mathcal{L}(e^{-ix\mathrm{Re}\omega+x\mathrm{Im}\omega})=\dfrac{1}{2(p-i\omega)}+\dfrac{1}{2(p+i\omega)}=\dfrac{p}{p^2+\omega^2}$. con $\mathrm{Re}p>\max\{\mathrm{Im}\omega,-\mathrm{Im}\omega\}$ ossia $\mathrm{Re}p>|\mathrm{Im}\omega|$ Qui $\hat{M}=1$, $\hat{a}=|\omega|$

Esempio–4 $\mathcal{L}(\sin\omega x)=\dfrac{1}{2i}\mathcal{L}(e^{ix\mathrm{Re}\omega-x\mathrm{Im}\omega})-\dfrac{1}{2i}\mathcal{L}(e^{-ix\mathrm{Re}\omega+x\mathrm{Im}\omega})=\dfrac{1}{2i(p-i\omega)}-\dfrac{1}{2i(p+i\omega)}=\dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$. con $\mathrm{Re}p>\max\{\mathrm{Im}\omega,-\mathrm{Im}\omega\}$ ossia $\mathrm{Re}p>|\mathrm{Im}\omega|$ Qui Si può scegliere $\hat{a}$ un qualsiasi numero positivo e $M=\max\limits_{t\geq 0}t^ne^{-t\hat{a}}$. Per la scelta di $\hat{M}$ e $\hat{a}$ si proceda come in **Esempio–3** .

♠ **Esempio–5** Sia n intero non negativo. $\mathcal{L}(x^n)=\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-px}x^ndx=\frac{n!}{p^{n+1}}$, $\mathrm{Re}p>0$. Qui Si può scegliere $\hat{a}$ un qualsiasi numero positivo e $M=\max\limits_{t\geq 0}t^ne^{-t\hat{a}}$

In generale opereremo la trasformata di Laplace su funzioni che ammettono $\hat{M}$ e $\hat{a}$ ma con alcune ben delimitate eccezioni.

La funzione e^{-x^2} ammette $a=-\infty$. Infatti $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-x^2-px}dx$ converge per ogni valore del parametro p. Basta osservare che $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2e^{-x^2-px}=0$ per ogni valore di p per concludere circa la convergenza dell'integrale.

Le due costanti $\hat{M}$, e $\hat{a}$ possono non essere ottimali ossia una stima migliore sulla funzione f potrebbe condurre a trovare $\hat{M}_1<\hat{M}$ e $\hat{a}_1<\hat{a}$.

Lezione del 30/05/2016 Trasformata di Laplace

$$\mathcal{L}(\sinh\omega x)=\mathcal{L}((e^{\omega x}-e^{-\omega x})/2)=\frac{1}{2(p-\omega)}-\frac{1}{2(p+\omega)}=\frac{\omega}{p^2-\omega^2},\ \mathrm{Re}p>|\mathrm{Re}\,\omega|$$

$$\mathcal{L}(\cosh\omega x)=\mathcal{L}((e^{\omega x}+e^{-\omega x})/2)=\frac{1}{2(p-\omega)}+\frac{1}{2(p+\omega)}=\frac{p}{p^2-\omega^2},\ \mathrm{Re}p>|\mathrm{Re}\,\omega|$$

Paragrafi 1), 2), 3), pag.4. Paragrafo 5) ma dimostrazione solo per derivate prime e seconde. Paragrafo 2) pag.8, paragrafo 3) pag.9. Teorema 1 pag.11–12 delle dispense di Tauraso.

♠ Tutte le formule sulle trasformate non svolte a lezione e presenti sulle dispense di Tauraso nella parte di teoria ed esercizi.

♠ Sia data la funzione $f(x)\doteq|\sin\alpha x|$ di periodo π/α. Applichiamo la formula di pag.7 delle dispense di Tauraso per scrivere

$$\mathcal{L}(f)=(1-e^{-p\pi/\alpha})^{-1}\int_0^{\frac{\pi}{\alpha}}e^{-px}\frac{1}{2i}\left(e^{i\alpha x}-e^{-i\alpha x}\right)dx=\frac{(e^{-p\pi/\alpha})+1}{(1-e^{-p\pi/\alpha})}\frac{\alpha}{p^2+\alpha^2}=\frac{\alpha}{p^2+\alpha^2}\coth\frac{p\pi}{2\alpha}$$

• **Teorema** *Se $F(p)$ è la trasformata di Laplace di una funzione f, tale che $|f|\leq\hat{M}e^{\hat{a}x}$ allora $\lim\limits_{\mathrm{Re}p\to+\infty}F(p)=0$ uniformemente.*

Dimostrazione Si scriva il calcolo 26/05.1 con un coefficiente $\hat{M}$ a fattore. (fine della dimostrazione).

♠ Sia ora $H(x)$ la funzione che vale 0 se $x<0$ e 1 se $x\geq 0$. $H(x)\cdot f(x)$ vale $f(x)$ se $x\geq 0$ e 0 altrimenti. Ne segue che

$$\mathcal{L}(f)=\int_0^{+\infty}f(x)e^{-px}dx=\int_0^{+\infty}H(x)\cdot f(x)e^{-px}dx=\mathcal{L}(Hf)\doteq F(p)$$

ma allora $H(x)f(x)=\mathcal{L}^{-1}(F)$ dove $\mathcal{L}^{-1}$ abbiamo indicato l'operazione inversa della trasformata di Laplace.

♠ Sia data $F(p) = \dfrac{p^2}{(p^2+\alpha^2)^2} = \left(\dfrac{p}{p^2+\alpha^2}\right)^2$ e quindi la funzione $\displaystyle\int_0^t \cos\alpha(t-\tau)\cos\alpha\tau d\tau$ è la antitrasformata di Laplace ed è pari a $(\sin\alpha t + t\cos\alpha t)/(2\alpha)$.

♠ Sia data $F(p) = \dfrac{1}{p(p^2+\alpha^2)} = \dfrac{1}{p^2}\dfrac{p}{p^2+\alpha^2}$ e quindi la funzione $\displaystyle\int_0^t (t-\tau)\cos\alpha\tau d\tau$ è la antitrasformata di Laplace ed è pari a $(1-\cos\alpha t)/\alpha^2$.

• Risoluzione della equazione differenziale $f^{(iv)}(x)+2f''(x)+f(x)=0$, $f(0)=f'(0)=f''(0)=0$, $f'''(0)=\xi$.

♠ Si risolvano gli esercizi num.3,6 qui
http://www.mat.uniroma2.it/ perfetti/didattica/analisiII_elettronica_11-12-9cfu/09-02-2012-AN-II-Elettr_e_Telec_2011-2012.pdf.

Soluzione num.3 La relazione

$$x^2+\frac{y^2}{4}=1, \qquad z^2 \le 4x^2+\frac{y^2}{4}$$

definisce un cilindro ellissoidale la cui ordinata è limitata in alto e basso rispettivamente da $-\sqrt{4x^2+\frac{y^2}{4}}$ e $\sqrt{4x^2+\frac{y^2}{4}}$. Fissiamo le coordinate $(x_0,y_0.)$ Alla superficie che andiamo cercando contribuisce unicamente il filo di estremi $\left(-\sqrt{4x_0^2+\frac{y_0^2}{4}}, \sqrt{4x_0^2+\frac{y_0^2}{4}}\right)$. La superficie che cerchiamo è la "somma" di tutti codesti fili e quindi è

$$I \doteq \int_{x^2+\frac{y^2}{4}=1} 2\sqrt{4x^2+\frac{y^2}{4}}ds$$

È un integrale curvilineo di prima specie e dopo avere parametrizzato la circonferenza $x^2+\frac{y^2}{4}=1$ al solito modo $(x,y)=(\cos t, 2\sin t)$, si ha

$$I = 2\int_0^{2\pi} \sqrt{4\cos^2 t+\sin^2 t}\,\underbrace{\sqrt{4\cos^2 t+\sin^2 t}dt}_{ds} = 10\pi$$

Esiste un altro modo di risolvere l'esercizio che prevede la formula sul calcolo di una superficie generica espressa in coordinate **non cartesiane** . Tale formula però non fa parte del programma. Per chi volesse approfondire l'argomento, si può consultare un qualsiasi testo universitario oppure guardare qui http://www.mat.uniroma2.it/ perfetti/didattica/analisi3online/duevar.pdf (capitolo 5, pag.73 e relative).

La soluzione del num.6 è certamente alla portata della classe.

♠ Svolgimento del seguente compito
http://www.mat.uniroma2.it/ tauraso/aa1314/testo02-07-2014.pdf

Esercizio 1. Osserviamo che il cono ha equazione $z=2-\sqrt{x^2+y^2}$ Infatti passa per i punti $(0,0,2)$ e $(2,0,0)$ ed è una superficie di rotazione intorno all'asse z. L'equazione del cilindro è $(x-1)^2+y^2=1$.

Il volume che cerchiamo è

$$\int\int\int_{\substack{0\le z\le 2-\sqrt{x^2+y^2}\\ (x-1)^2+y^2\le 1}} dx\,dy\,dz = \int\int_{(x-1)^2+y^2\le 1} dx\,dy\int_0^{2-\sqrt{x^2+y^2}} dz = \int\int_{(x-1)^2+y^2\le 1}(2-\sqrt{x^2+y^2})$$

Conviene introdurre coordinate polari centrate nell'origine $x = r\cos t$, $y = r\sin t$ e l'equazione $(x-1)^2 + y^2 = 1$ diventa $r = 2\cos t$ con chiaramente $-\pi/2 \le t \le \pi/2$. L'integrale diventa

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dt \int_0^{2\cos t} dr(2-r)$$

Esercizio 2. Prima maniera Si eseguono tutti gli integrali e si passa tutto il tempo dell'esame a fare calcoli con un'altissima probabilità di fare errori.

Seconda maniera Conviene osservare che: 1) $y\cos x dx + \sin x dy = d(y\sin x) \doteq d(F_1)$, 2) $ydx + xdy = d(xy) \doteq d(F_2)$, 3) $ydy = d(y^2/2) \doteq d(F_3)$. Nel calcolo si usamo quindi le tre primitive appena trovate nel modo usuale: se indichiamo con $\underline{\gamma}$ la curva su cui integrare,

$$\int_{\underline{\gamma}} d(F_i) = F_i(0,2)) - F_i(0,0)$$

Solo per $i = 3$ ho un risultato non nullo ossia 2.

Rimane $-y^3dx + x^3dy$ che va calcolata sulla curva non essendo esatta. La prima curva è $\underline{\gamma}(t) = (t,0)$, $0 \le t \le 2$ e l'integrale vale zero. La seconda curva è $(-t, 4+2t)$, $-1 \le t \le 0$ e l'integrale vale 19/2. La terza curva è $(0,-t)$, $-1 \le t \le 0$ e l'integrale vale 8. Sommando i vari pezzi ottengo 39/2.

Esercizio 5. Usiamo Laplace. $\mathcal{L}(x') = pF(p) - x(0) = pF(p)$. $\mathcal{L}(x'') = p\mathcal{L}(x') - x'(0) = p^2F(p) + 2$, $\mathcal{L}(t) = p^{-2}$. Mettendo nella equazione si ha $p^2F(p) + 2 + 3pF(p) + 2F(p) = \dfrac{12}{p^2}$ ossia $F(p) = \left(\dfrac{12}{p^2} - 2\right)\dfrac{1}{p^2+3p+2}$ e quindi

$$x(t) = \sum_{p=0,-1,-2} Res\left(e^{pt}\left(\frac{12}{p^2} - 2\right)\frac{1}{p^2+3p+2}\right) = 6t - 9 - e^{-2t} + 10e^{-t}$$

da cui la risposta

♠ **Svolgimento del seguente compito**
http://www.mat.uniroma2.it/ tauraso/aa1314/testo14-07-2014.pdf.

Esercizio 1. Basta scrivere

$$\int\int\int_D \ln\left(\frac{xy}{z}\right) dx\,dy\,dz = \int\int_{\substack{4\le yz,\\ 0\le y+z\le 5}} dy\,dz \int_1^e dx(\ln x + \ln\frac{y}{z}) =$$

$$= \int\int_{\substack{4\le yz,\\ 0\le y+z\le 5}} dy\,dz\left[(x\ln x - x + x\ln\frac{y}{z})\Big|_1^e\right] = \int\int_{\substack{4\le yz,\\ 0\le y+z\le 5}} dy\,dz(1 + (e-1)\ln\frac{y}{z})$$

$$= \int_1^4 dy \int_{\frac{4}{y}}^{5-y} dz(1 + (e-1)\ln\frac{y}{z}) =$$

$$= \int_1^4 dy\left(5 - y - \frac{4}{y}\right)(1 + (e-1)\ln y) + \int_1^4 dy(1-e)\left[(z\ln z - z)\Big|_{\frac{4}{y}}^{5-y}\right]$$

e poi basta integrare.

Esercizio 2. Scriviamo la forma come

$$\left(6x+\left(\frac{y}{x^2+2}\right)_x\right)dx+\frac{1}{x^2+2}dy+3xdy=\left(6x+\left(\frac{y}{x^2+2}\right)_x\right)dx+\left(\frac{y}{x^2+2}\right)_y dy+3xdy$$

ossia

$$\left[\left(\frac{y}{x^2+2}\right)_x dx+\left(\frac{y}{x^2+2}\right)_y dy\right]+[6xdx+3xdy]\doteq\omega_1+\omega_2$$

Ne segue che

$$\int_{\underline{\gamma}}\omega_1=\left[\frac{y}{x^2+2}\right]\Big|_{(1,0)}^{(0,1)}=\frac{1}{2},\qquad \int_{\underline{\gamma}}6xdx=3x^2\Big|_{(1,0)}^{(0,1)}=-3$$

La curva è $x=1+\cos t$, $y=1+\sin t$, $-\pi/2\le t\le\pi$ e quindi

$$\int_{\underline{\gamma}}3xdy=3+\frac{9}{4}\pi$$

La somma $3+\frac{9}{4}\pi-3+\frac{1}{2}$ dà il risultato.

Problema num.3 qui Scriviamo $\dfrac{z^2}{z+2}=\dfrac{z^2-4+4}{z+2}=z-2+\dfrac{4}{z+2}$ da cui

$$\oint_{|z-1|=4}\frac{z^2\mathrm{Re}\,z}{z+2}dz=\oint_{|z-1|=4}(z-2)\mathrm{Re}\,zdz+\oint_{|z-1|=4}\frac{4\mathrm{Re}\,z}{z+2}dz$$

$$\oint_{|z-1|=4}(z-2)\mathrm{Re}\,zdz=\int_0^{2\pi}\underbrace{(-1+4e^{it})}_{z-2}\underbrace{4\cos t}_{\mathrm{Re}\,z}\underbrace{4ie^{it}dt}_{dz}$$

Di tutti gli integrali sopravvive solo $-16i\displaystyle\int_0^{2\pi}\cos^2 tdt=-16i\pi$. Poi abbiamo

$$\oint_{|z-1|=4}\frac{4\mathrm{Re}\,z}{z+2}dz=16i\int_0^{2\pi}\frac{1+4\cos t}{3+4e^{it}}e^{it}dt\underbrace{=}_{z=e^{it}}16i\oint_{|z|=1}\frac{1+2z+2z^{-1}}{3+4z}\frac{dz}{iz}z=$$

$$=16i\oint_{|z|=1}\frac{2z^2+z+2}{3+4z}\frac{dz}{z}=16i2\pi i\frac{1}{i}\left(\frac{2}{3}-\frac{4}{3}\frac{1}{4}\left((\frac{9}{8}-\frac{3}{4}+2\right)\right)=-4\pi i$$

da cui la somma $-20\pi i$. L'integrale $I\doteq\displaystyle\oint_{|z|=1}\frac{2z^2+z+2}{3+4z}\frac{dz}{z}$ si poteva risolvere pure usando il punto all'infinito. All'intenro del cerchio d raggio 1 ci sono tutte le singolarità per cui posso scrivere $I=-2\pi iRes(f;\infty)$ e per trovare il residuo sviluppiamo asintoticamente la funzione cercando il termine $1/z$. $\dfrac{2}{3+4z}\dfrac{1}{z}$ comincia con $1/z^2$ e quindi il residuo è nullo. Poi abbiamo

$$\frac{2z^2+z}{3+4z}\frac{1}{z}=\frac{2z+1}{3+4z}=\frac{2z}{3+4z}+\frac{1}{3+4z}=\frac{2z}{4z(1+\frac{3}{4z})}+\frac{1}{4z}\frac{1}{1+\frac{3}{4z}}=$$
$$\frac{1}{2}\left(1-\frac{3}{4z}+o(\frac{1}{z})\right)+\frac{1}{4z}\left(1-\frac{3}{4z}+o(\frac{1}{z^2})\right)$$

e quindi $Res(f;\infty) = \dfrac{3}{8} - \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{8}$ e quindi $I = -2\pi i\dfrac{1}{8} = -\dfrac{i\pi}{4}$ da cui il risultato.

Problema num.4 La funzione è pari per cui $I = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}(1-\cos x)^3(1+\cos(3x))dx$. Poi poniamo $z = e^{it}$ da cui $\cos t = (e^{it}+e^{-it})/2, = (z+z^{-1})/2$, $\cos(3x) = (e^{3it}+e^{-3it})/2 = (z^3+z^{-3})/2$. L'integrale diventa

$$\oint_{|z|=1} \underbrace{\frac{dz}{iz}}_{dt}\left(1-\frac{z^2+1}{2z}\right)^3\left(1+\frac{z^6+1}{2z^3}\right) = \oint_{|z|=1} \underbrace{\frac{dz}{iz}}_{dt}\left(-\frac{z}{2}+1-\frac{1}{2z}\right)^3\left(\frac{z^3}{2}+1+\frac{1}{2z^3}\right)$$

$$\oint_{|z|=1}\frac{-38z^6-18z^9-18z^3+24z^7+15z^{10}+3z^4+24z^5+3z^8+15z^2-6z^{11}-6z+z^{12}+1}{-i16z^7}dz$$

e quindi $I = \dfrac{1}{2}\dfrac{38}{16i}2\pi i$. Se non si vuole fare la moltiplicazione (noiosa) si può scrivere lo schema seguente

$$\begin{matrix} (\frac{-1}{2}) & (1) & (\frac{-1}{2}) & & (\frac{-1}{2}) & (1) & (\frac{-1}{2}) & & (\frac{-1}{2}) & (1) & (\frac{-1}{2}) & & (\frac{1}{2}) & (1) & (\frac{1}{2}) \\ 1 & 0 & -1 & & 1 & 0 & -1 & & 1 & 0 & -1 & & 3 & 0 & -3 \end{matrix}$$

i numeri in basso sono le potenze mentre i numeri in alto i rispettivi coeffcienti. Sommiamo i numeri in basso prendendone uno da ogni gruppo di tre e cerchiamo quelle somme che fanno zero. Ad esempio alla $-1-1-1+3=0$ e $1+1+1-3=0$ corrispondono a $\dfrac{-1}{2}\dfrac{-1}{2}\dfrac{-1}{2}\dfrac{1}{2} = \dfrac{-1}{16}$ mentre $0+0+0+0=0$ corrisponde a $1\cdot 1\cdot\cdot = 1$ e via dicendo.

Volendo accorciare i calcoli si scriva

$$\oint_{|z|=1}\frac{dz}{iz}\left(-\frac{z}{2}+1-\frac{1}{2z}\right)^3\left(\frac{z^3}{2}+1+\frac{1}{2z^3}\right) =$$
$$= \oint_{|z|=1}\frac{dz}{iz}\left(-\frac{z}{2}+1-\frac{1}{2z}\right)^3\frac{z^3}{2} + \oint_{|z|=1}\frac{dz}{iz}\left(-\frac{z}{2}+1-\frac{1}{2z}\right)^3 + \oint_{|z|=1}\frac{dz}{iz}\left(-\frac{z}{2}+1-\frac{1}{2z}\right)^3\frac{1}{2z^3}$$

Cambiamo variabile $z = 1/w$ nel terzo ed otteniamo il primo per cui abbiamo

$$\oint_{|z|=1}\frac{dz}{iz}\left(-\frac{z}{2}+1-\frac{1}{2z}\right)^3\left(\frac{z^3}{2}+1+\frac{1}{2z^3}\right) =$$
$$= 2\oint_{|z|=1}\frac{dz}{iz}\left(-\frac{z}{2}+1-\frac{1}{2z}\right)^3\frac{z^3}{2} + \oint_{|z|=1}\frac{dz}{iz}\left(-\frac{z}{2}+1-\frac{1}{2z}\right)^3$$

Nel primo integrale dobbiamo soptavvive solo l'elemento

$$2\oint_{|z|=1}\frac{dz}{iz}\frac{-1}{8z^3}\frac{z^3}{2} = -\frac{\pi}{4}$$

Nel secondo sopravvivono solo i termini

$$\oint_{|z|=1}\frac{dz}{iz}\left(1+6\frac{-z}{2}\frac{-1}{2z}\right) = 5\pi$$

da cui $5\pi - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{19}{4}\pi$ che poi diventa $\pi 19/8$ dividendo per due.

♠ **Svolgimento del seguente compito**
http://www.mat.uniroma2.it/ tauraso/aa1314/testo10-09-2014.pdf

Esercizio 1 Prima dimostrazione Al fine di avere una notazione più familiare, y la chiamiamo z e z la chiamiamo y. Otteniamo

$$\int\int\int_D \frac{2x^2+y^2}{x^2+y^2}dxdydz, \quad D=\{\underline{x}\in\mathbf{R}^3: \underbrace{1\le x^2+y^2+z^2\le 4}_{due\ sfere}, \quad \underbrace{x^2+y^2\le z^2}_{cono\ a\ doppia\ falda} \ \}$$

Sia $z\ge 0$. Passiamo a coordinate polari $x=r\sin\vartheta\cos\varphi$, $y=r\sin\vartheta\sin\varphi$, $z=r\cos\vartheta$. Chiaramente si ha $1\le r\le 2$. La relazione $z^2\ge x^2+y^2$ diventa $\cos^2\vartheta\ge\sin^2\vartheta$ ossia $\tan^2\vartheta\le 1$ e quindi $0\le\vartheta\le\pi/4$. L'integrale diventa

$$\underbrace{2}_{z\le 0}\ \underbrace{\int_0^{2\pi}d\varphi}_{\substack{D\ dipende\ da\ x,y\\ attraverso\ x^2+y^2}}\ \int_0^{\frac{\pi}{4}}d\vartheta\int_1^2 d\rho\ \rho^2\sin\vartheta\underbrace{\left(1+\frac{\rho^2\sin^2\vartheta\cos^2\varphi}{\rho^2\sin^2\vartheta}\right)}_{\frac{2x^2+y^2}{x^2+y^2}=1+\frac{x^2}{x^2+y^2}}=$$

$$=2\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\vartheta\int_1^2 d\rho\ \rho^2\sin\vartheta\left(1+\cos^2\varphi\right)=(14-7\sqrt{2})\pi$$

Seconda dimostrazione Integriamo per fili. Il sistema $\{x^2+y^2+z^2=1,\ z^2+x^2+y^2\}$ dà $x^2+y^2=1/2$. $\{x^2+y^2+z^2=4,\ z^2+x^2+y^2\}$ dà $x^2+y^2=2$. Abbiamo quindi

$$\int\int\int_D \frac{2x^2+y^2}{x^2+y^2}dxdydz=\int\int_{x^2+y^2\le\frac{1}{2}}\frac{2x^2+y^2}{x^2+y^2}dxdy\int_{\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}}dz+$$

$$+\int\int_{\frac{1}{2}\le x^2+y^2\le 2}\frac{2x^2+y^2}{x^2+y^2}dxdy\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}}dz=\int\int_{x^2+y^2\le 2}\frac{2x^2+y^2}{x^2+y^2}\sqrt{4-x^2-y^2}dx\,dy+$$

$$-\int\int_{x^2+y^2\le\frac{1}{2}}\frac{2x^2+y^2}{x^2+y^2}\sqrt{1-x^2-y^2}dxdy-\int\int_{\frac{1}{2}\le x^2+y^2\le 2}\frac{2x^2+y^2}{x^2+y^2}\sqrt{x^2+y^2}dx\,dy$$

Ora introduciamo nel piano (x,y) coordinate polari $x=r\cos t$, $y=r\sin t$ ed il primo integrale diventa

$$\int_0^{2\pi}(1+\cos^2 t)\int_0^{\sqrt{2}}r\sqrt{4-r^2}=3\pi\frac{1}{3}(8-2\sqrt{2})$$

Il secondo integrale diventa

$$\int_0^{2\pi}(1+\cos^2 t)\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}r\sqrt{1-r^2}=3\pi\frac{1}{3}(1-\frac{1}{2\sqrt{2}})$$

Il terzo integrale è

$$\int_0^{2\pi}(1+\cos^2 t)\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\sqrt{2}}r\cdot r=3\pi\frac{1}{3}(2\sqrt{2}-\frac{1}{2\sqrt{2}})$$

e $3\pi\frac{1}{3}(8-2\sqrt{2})-3\pi\frac{1}{3}(1-\frac{1}{2\sqrt{2}})-3\pi\frac{1}{3}(2\sqrt{2}-\frac{1}{2\sqrt{2}})=\pi 7(1-\frac{\sqrt{2}}{2})$. Moltiplicando per due abbiamo il risultato.

Esercizio 5 Dobbiamo calcolare $\displaystyle\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau$. Cambiamo variabile $t-\tau=u$ da cui

$$\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau = \int_0^t duf(u)g(t-u) \underbrace{=}_{1\le t\le 2} \int_0^1 duf(u)g(t-u) + \int_1^2 duf(u)g(t-u) =$$

$$= \int_0^1 dug(t-u) - \int_1^2 dug(t-u)$$

Nel primo integrale dobbiamo limitarci a quei valori di u per cui $0 \le t-u \le 1$. La parte sinistra $0 \le t-u$ è certamente verificata in quanto $0 \le u \le 1$ ma $t \ge 1$. La parte destra invece impone che sia $u \ge t-1$. Per quanto riguarda il secondo integrale $t-u \ge 0$ impone $u \le t$ e la condizione $t-u \le 1$ ossia $u \ge t-1$ è sempre verificata in quanto $u \ge 1$ e $t-u \le 1$. Dunque otteniamo

$$\int_0^1 dug(t-u) - \int_1^2 dug(t-u) = \int_{t-1}^1 2(t-u)du - \int_1^t 2(t-u)du = -2t^2+4t-1$$

♠ **Svolgimento del seguente compito**
http://www.mat.uniroma2.it/ tauraso/aa1314/testo22-09-2014.pdf

Esercizio 1. Si tratta di un toro. L'equazione $(2-\sqrt{x^2+y^2})^2+z^2=1$ suggerisce di scrivere $2-\sqrt{x^2+y^2}=\cos\varphi$ e $z=\sin\varphi$. L'equazione $2-\sqrt{x^2+y^2}=\cos\varphi$ è quella di una circonferenza di raggio $2-\cos\varphi$ e centro l'origine per cui scriviamo $x=(2-\cos\varphi)\cos\vartheta$, $y=(2-\cos\varphi)\sin\vartheta$. Il cambio di variabile è quindi

$$x=(2-\cos\varphi)\cos\vartheta, \qquad y=(2-\cos\varphi)\sin\vartheta, \qquad z=\sin\varphi, \qquad 0\le\varphi\le 2\pi, \qquad 0\le\vartheta\le 2\pi$$

ma tale cambio descrive la superficie del toro. Noi vogliamo integrare sul volume per cui dobbiamo parametrizzare $(2-\sqrt{x^2+y^2})^2+z^2\le 1$

$$x=(2-r\cos\varphi)\cos\vartheta, \quad y=(2-r\cos\varphi)\sin\vartheta, \quad z=r\sin\varphi \quad 0\le\varphi\le 2\pi, \quad 0\le\vartheta\le 2\pi \quad 0\le r\le 1$$

La matrice iacobiana è $J=\begin{pmatrix} -2\sin\vartheta+r\sin\vartheta\cos\varphi & r\cos\vartheta\sin\varphi & -\cos\varphi\cos\vartheta \\ 2\cos\vartheta-r\cos\varphi\cos\vartheta & +r\sin\varphi\sin\vartheta & -\sin\vartheta\cos\varphi \\ 0 & r\cos\varphi & \sin\varphi \end{pmatrix}$ e sviluppando secondo la prima colonna il determinante è $(-2S_\vartheta+rS_\vartheta C_\varphi)rS_\vartheta-(2C_\vartheta-rC_\vartheta C_\varphi)rC_\vartheta = r(-2+rC_\varphi)<0$.

La quantità $\sqrt{x^2+y^2}$ è $2-r\cos\varphi$ e l'integrale richiesto è

$$\int_0^1 dr\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} d\vartheta d\varphi r(2-r\cos\vartheta)^2 = \frac{17}{2}\pi^2$$

Si potrebbero usare pure le coordinate cilindriche o polari sferiche ma i calcoli sono di gran lunga più complicati.

Esercizio 5. Sia $F(p)\doteq\mathcal{L}x$, $G(p)=\mathcal{L}y$ $\mathcal{L}x'=pF-1$, $\mathcal{L}G=pG-2$ da cui il sistema diventa algebrico ossia

$$pF-1=4F-G, \qquad pG-2=F+2G \implies F=\frac{p-4}{(p-3)^2}\ G=\frac{2p-7}{(p-3)^2}$$

da cui

$$x(t) = \lim_{z\to 3} \frac{d}{dp} e^{pt}(p-4) = -te^{3t} + e^{3t}$$

Per $y(t)$ si può fare la stessa cosa oppure tornare alla prima equazione del sistema e ricavarla da lì . Nel primo caso abbiamo

$$y(t) = \lim_{z\to 3} \frac{d}{dp} e^{pt}(2p-7) = -te^{3t} + 2e^{3t}$$

♠ **Svolgimento del seguente compito**
http://www.mat.uniroma2.it/ tauraso/aa1314/testo02-02-2015.pdf

Esercizio 1. La superficie di rotazione ha equazione (cono) $z = 4 - 2\sqrt{x^2+y^2}$. Passa per i punti $(2,0,0)$, $(1,0,2)$, $(0,0,2)$, $(0,0,4)$. Sul piano (x,y) definisce la circonferenza $x^2+y^2=4$. Se taglio il cono col piano $z=2$, si definisce una circonferenza $x^2+y^2=1$. L'integrale che cerchiamo è

$$\int\int_{x^2+y^2\le 4} dx\,dy \int_0^{4-2\sqrt{x^2+y^2}} f(x,y,z)dz - \int\int_{x^2+y^2\le 1} dx\,dy \int_2^{4-2\sqrt{x^2+y^2}} f(x,y,z)dz$$

Esercizio 2. Scriviamo la forma come

$$\frac{x^3y(x^4+y^4)}{x^4+y^4}dx + \frac{y^3+(x^4+y^4)}{x^4+y^4}dy$$

ossia

$$\frac{1}{4}\left(\frac{4x^3}{x^4+y^4}dx + \frac{4y^3}{x^4+y^4}dy\right) + dy + ydx \doteq \omega_1+\omega_2+\omega_3 \doteq \frac{1}{4}d\left(\ln(x^4+y^4)\right) + d(y) + ydx$$

Il cammino inizia a $(1,0)$ e finisce $(2,0)$ quindi

$$\int_{\underline{\gamma}} \omega_1+\omega_2 = \ln 2$$

Rimane $\displaystyle\int_{\underline{\sigma}} yx$. Si posso eseguire i tre integrali corrispondenti a ciascun pezzo di $\underline{\gamma}$ oppure si può ricordare il lemma di Gauss–Green

$$\oint_{\partial^+ D}(Pdx+Qdy) = \int\int_D (Q_x - P_y)dxdy \underbrace{\Longrightarrow}_{P\equiv y,\, Q\equiv 0} \oint_{\partial^+ D} ydx = \int\int_D -dxdy$$

Allora chiudiamo il cammino con il tratto orizzontale da $(1,0)$ a $(2,0)$ e con D indichiamo l'interno della curva, detta $\underline{\gamma}$, ormai chiusa e percorsa in senso orario. Sia invece $\underline{\sigma}$ la curva lungo la quale dobbiamo integrare e $\underline{\gamma}_1$ la curva $(x,y)=(-t,0)$, $-2\le t\le 0$.

$$\int\int_D -dxdy = -\frac{1}{4}(\pi\cdot 2\cdot 3 - \pi\cdot 1^2) = -\frac{5\pi}{4}$$

$$\oint_{\partial^+ D} ydx = -\oint_{\underline{\gamma}} ydx = -\int_{\underline{\sigma}} ydx - \int_{\underline{\gamma}_1} ydx = -\int_{\underline{\sigma}} ydx$$

Ne segue che $\displaystyle\oint_{\partial^+ D} ydx = \frac{5\pi}{4}$ e quindi il risultato sommando i due contributi.

Esercizio 3. Dobbiamo scrivere lo sviluppo di Laurent ed individuare la parte principale.

$$\frac{e^z-1}{z^3} = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{2z} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24}z + O(z^2)$$

$$\frac{1}{\sin z} = \frac{1}{\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!}} = \frac{1}{z}\frac{1}{\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k+1)!}} = \frac{1}{z}\frac{1}{1+\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k+1)!}} =$$
$$= \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{z^2}{6}+\frac{z^4}{5!}+O(z^6)} = \frac{1}{z}\left(1+\frac{z^2}{6}-\frac{z^4}{5!}+O(z^6)+O(z^4)\right) = \frac{1}{z}+\frac{z}{6}+O(z^3)$$

Moltiplicando si ottiene

$$\frac{e^z-1}{z^3\sin z} = \left(\frac{1}{z^2} + \frac{1}{2z} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24}z + O(z^2)\right)\left(\frac{1}{z}+\frac{z}{6}+O(z^3)\right)$$

la cui parte principale è quella indicata nelle soluzioni.

In $z=\pi$ è ancora più breve.

$$\frac{1}{\sin z} = \frac{1}{\sin(z-\pi+\pi)} = \frac{1}{-\sin(z-\pi)} = \frac{-1}{(z-\pi)} + O(1)$$

da cui il risultato in quanto $(e^z-1)/z^3$ contribuisce con $(e^\pi-1)/\pi^3$ essendo ivi olomorfa.

Esercizio 4. L'integrale è $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{3x}+e^x}{e^{4x}+1}dx \underbrace{=}_{e^x=y} \int_0^{+\infty} \frac{y^2+1}{y^4+1}dy = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y^2+1}{y^4+1}dy$. Facile ora "applicare i residui".

♠ Svolgimento del seguente compito http://www.mat.uniroma2.it/ tauraso/aa1213/testo05-07-2013.pdf

Esercizio 2. Abbiamo un cilindro "tagliato" da due piani non intersecantisi. Il testo vuole che calcoliamo la superficie laterale dell'insieme D e poi quella superiore ed inferiore dei due piani. Le chiamiamo S_{lat}, S_{sup} e S_{inf}. Per S_{lat} si veda la soluzione a pagina 29 di un problema analogo e si ottiene 4π.

$$S_{sup} = \int\int_{(x-2)^2+y^2\le 1} \sqrt{5}dx\,dy = \sqrt{5}\pi$$

Si applichi la prima formula di pag.30 delle dispense di Tauraso con $z=f(x,y)=2x$. Per S_{inf} si ha la stessa cosa e si ottiene $\sqrt{2}\pi$. Sommando si ottiene il risultato.

Esercizio 3. Si scriva $z=2e^{it}$ e $\mathrm{Re}z = 2\cos t = 2e^{it}+2e^{-it}$. Poi si ponga $e^{it}=w$ e si applichi il teorema dei residui.

Esercizio 5. Detta $F(p)=\mathcal{L}(x)$, abbiamo $\mathcal{L}(x')=pF(p)$, $\mathcal{L}(x'')=p^2F(p)-1$, $\mathcal{L}(e^{-t}) = 1/(p+1)$, $\mathcal{L}(\delta(t-2)) = e^{-2p}$. L'equazione diventa

$$p^2F - 1 + 2pF + F = \frac{2}{p+1} + e^{-2p} \implies F(p) = \frac{1}{(p+1)^2} + \frac{2}{(p+1)(p+1)^2} + \frac{e^{-2p}}{(p+1)^2}$$

da cui

$$x(t) = \frac{d}{dp}e^{pt}\Big|_{p=-1}H(t) + \frac{1}{2}\frac{d^2}{dp^2}2e^{pt}\Big|_{p=-1}H(t) + H(t-2)\frac{d}{dp}e^{p(t-2)}\Big|_{p=-1}$$

e quindi

$$x(t) = te^{-t} + t^2e^{-t} + (t-2)H(t-2)e^{-(t-2)}$$

Notare che $x(0)=0$. Ora facciamo la derivata prima

$$x'(t) = e^{-t} - te^{-t} + 2te^{-t} - t^2e^{-t} + H(t-2)e^{-(t-2)} + (t-2)\delta(t-2)e^{-(t-2)} - (t-2)H(t-2)e^{-(t-2)}$$

che uguaglia

$$x'(t) = e^{-t} - te^{-t} + 2te^{-t} - t^2e^{-t} + H(t-2)e^{-(t-2)} - (t-2)H(t-2)e^{-(t-2)}$$

e per $t=0$ vale 1.

$$\lim_{t\to 2^+} x'(t) = 2^{-2} - 2e^{-2} + 4e^{-2} - 4e^{-2} + 1 - 0 = 1 - e^{-2}$$

$$\lim_{t\to 2^-} x'(t) = 2^{-2} - 2e^{-2} + 4e^{-2} - 4e^{-2} + 0 - 0 = -e^{-2}$$

♠ Se volessimo calcolare il volume di D nell'esercizio 2, l'integrale è (sempre integriamo per fili)

$$\int\int_{(x-2)^2+y^2\le 1} dxdy\int_x^{2x} dz = \int\int_{(x-2)^2+y^2\le 1} xdxdy = \int_0^{2\pi} dt\int_0^1 dr\, r\ (2+\cos t) = 2\pi$$

♠ Svolgimento del seguente compito
http://www.mat.uniroma2.it/ tauraso/aa1213/testo10-02-2014.pdf

Problema 3. Come al solito, non conviene buttarsi subito a fare calcoli inutili. Conviene osservare le formule e “semplificare” il possibile. Si vuole la parte immaginaria e quindi la estraiamo da $\mathrm{Im}\left(|z|\left(z+\frac{1}{z}\right)dz\right) = |z|\Big(x+\frac{x}{x^2+y^2}\Big)dy + |z|\Big(y-\frac{y}{x^2+y^2}\Big)dx$ che riscriviamo come $|z|(xdy+ydx) + |z|\Big(\frac{x}{x^2+y^2}dy - \frac{y}{x^2+y^2}dx\Big) \doteq \omega_1+\omega_2$ e quindi abbiamo ottenuto due forme differenziali reali da integrare sul cammino indicato. Il cammino è dato dai tre segmenti $\underline{\gamma}_1(t)=(t,0)$, $0\le t\le 1$, $\underline{\gamma}_2(t)=(\cos t,\sin t)$, $0\le t\le 3\pi/4$, $\underline{\gamma}_3(t)=(-t,-t)$, $-\sqrt{2}/2\le t\le 0$.

$$\int_{\underline{\gamma}_1}\omega_1 = 0, \qquad \int_{\underline{\gamma}_1}\omega_2 = 0$$

$$\int_{\underline{\gamma}_2}\omega_1 = \int_{\underline{\gamma}_2}|z|d(xy) = \underbrace{1}_{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\left(xy\Big|_0^{-\frac{1}{2}}\right) = -\frac{1}{2}, \qquad \int_{\underline{\gamma}_2}\omega_2 = \frac{3}{4}\pi$$

$$\int_{\underline{\gamma}_3}\omega_1 = \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^0 \sqrt{2}(-t)2(-t)(-dt) = \frac{1}{3}, \qquad \int_{\underline{\gamma}_1}\omega_2, = 0$$

e quindi $12\left(\frac{3}{4}\pi - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) = 9\pi - 2$

Lezione del 06/06/2016 Trasformata di Laplace, equazioni differenziali

• Risolvere l'equazione differenziale $mx''(t) = \delta(t - t_0)$, $x(0) = a$, $x'(0) = b$ e $t_0 > 0$.

♠ Risolvere l'equazione differenziale $mx''(t) - \lambda x'(t) = \delta(t - t_0)$, $x(0) = a$, $x'(0) = b$ e $t_0 > 0$.

♠ Risolvere l'equazione differenziale $mx''(t) - \lambda x(t) = \delta(t - t_0)$, $x(0) = a$, $x'(0) = b$ e $t_0 > 0$.

♠ Risolvere l'equazione differenziale $mx''(t) - \lambda x(t) = \delta(t - t_0) + \delta(t - 2t_0)$, $x(0) = a$, $x'(0) = b$ e $t_0 > 0$.

♠ $\begin{cases} y''(t) - y'(t) + y(t) = \delta(t - t_0) \\ y(0) = a, \quad y'(0) = b \end{cases}$

$\mathcal{L}(y) \stackrel{\rm def}{=} Y(p)$. In base alle regole ben note abbiamo $\mathcal{L}(y'') = p\mathcal{L}(y') - y'(0) = p(p\mathcal{L}(y) - y(0)) - y'(0) = p^2\mathcal{L}(y) - py(0) - y'(0)$ e quindi $p^2 Y(p) - pa - b - p\mathcal{L}(y) + a + \mathcal{L}(y) = \mathcal{L}(\delta(t - t_0)) = e^{-pt_0}$. Si ottiene $Y(p) = \dfrac{e^{-pt_0} + pa + b - a}{p^2 - p + 1}$ e quindi $y(t) = V.P. \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_{a_0 - i\infty}^{a_0 + i\infty} dp e^{pt} Y(p)$ con $a_0 > 1$.

Si ottiene $y(t) = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_{a_0 - i\infty}^{a_0 + i\infty} dp \dfrac{e^{p(t - t_0)}}{p^2 - p + 1} + \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_{a_0 - i\infty}^{a_0 + i\infty} dp e^{pt} \dfrac{pa + b - a}{p^2 - p + 1} \stackrel{\rm def}{=} y_1(t) + y_2(t)$.

$y_1(t) = \Big(\dfrac{e^{p_1(t - t_0)}}{p_1 - p_2} - \dfrac{e^{p_2(t - t_0)}}{p_1 - p_2}\Big) H(t - t_0) = \dfrac{2}{\sqrt{3}} e^{\frac12 (t - t_0)} \sin(\dfrac{\sqrt{3}}{2}(t - t_0)) H(t - t_0)$.

$y_2(t) = ae^{p_1 t} \dfrac{p_1}{p_1 - p_2} - ae^{p_2 t}\dfrac{p_2}{p_1 - p_2} + (b - a)\dfrac{e^{p_1 t}}{p_1 - p_2} - (b - a)\dfrac{e^{p_2 t}}{p_1 - p_2} = ae^{\frac12 t}(\cos \dfrac{\sqrt{3}}{2} t + \dfrac{1}{\sqrt{3}} \sin \dfrac{\sqrt{3}}{2} t) + (b - a)\dfrac{2}{\sqrt{3}} e^{\frac12 t} \sin(\dfrac{\sqrt{3}}{2} t)$. La soluzione è $y(t) = ae^{\frac12 t}(\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2} t + \dfrac{1}{\sqrt{3}} \sin \dfrac{\sqrt{3}}{2} t) + (b - a)\dfrac{2}{\sqrt{3}} e^{\frac12 t} \sin(\dfrac{\sqrt{3}}{2} t) + \dfrac{2}{\sqrt{3}} e^{\frac12 (t - t_0)} \sin(\dfrac{\sqrt{3}}{2}(t - t_0)) H(t - t_0)$. Si può notare come la presenza di $H(t - t_0)$ sia essenziale per tenere conto della $\delta(t - t_0)$. Infatti per tempi $0 < t < t_0$ l'equazione ha termine forzante nullo e quindi la soluzione deve essere quella di una equazione omogenea.

Verifichiamo le condizini iniziali. Chiaramente $y(0) = a$ in quanto $H(0 - t_0) = 0$.

$$
\begin{aligned}
y'(t) = & \left[\frac12 a e^{\frac12 t}(\cos \frac{\sqrt{3}}{2} t + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} t)\right] + \left[a e^{\frac12 t}(-\frac{\sqrt{3}}{2} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} t + \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} t)\right] + \\
& + \left[(b - a)\frac{1}{\sqrt{3}} e^{\frac12 t} \sin(\frac{\sqrt{3}}{2} t)\right] + \left[(b - a)\frac{2}{\sqrt{3}} e^{\frac12 t} \frac{\sqrt{3}}{2} \cos(\frac{\sqrt{3}}{2} t)\right] + \\
& + \left[(t - t_0)\frac{2}{\sqrt{3}} e^{\frac12 (t - t_0)} \sin(\frac{\sqrt{3}}{2}(t - t_0)) H(t - t_0)\right] + \left[\frac{2}{\sqrt{3}} e^{\frac12 (t - t_0)} \frac{\sqrt{3}}{2} \cos(\frac{\sqrt{3}}{2}(t - t_0)) H(t - t_0)\right] + \\
& + \left[\frac{2}{\sqrt{3}} e^{\frac12 (t - t_0)} \sin(\frac{\sqrt{3}}{2}(t - t_0)) \delta(t - t_0)\right].
\end{aligned}
$$

La somma dei sette pezzi dà $\dfrac12 a + \dfrac12 a + 0 + (b - a) + 0 + 0 + 0 = b$.

• Risolvere $\begin{cases} y''(t) - x'(t) + x(t) = t \quad x(0) = a \\ x'(t) + y'(t) = t \quad y(0) = b, \; y'(0) = c \end{cases}$

♠ Per gli esercizi sui sistemi di equazioni e variabile complessa si veda qui http://www.mat.uniroma2.it/ perfetti/didattica/elettronicaII-II%2005-06/recup%20del%2025-02-06.pdf e pagine analoghe del 2005/2006, 2006/2007

♠ Risolvere l'equazione differenziale $x'(t) = 1 - H(t-1)$, $x(0) = a$. $\mathcal{L}(x) = F(p)$ e quindi $pF(p) = a + \frac{1}{p} - \frac{e^{-p}}{p}$ e quindi $F(p) = \frac{a}{p} + \frac{1}{p^2} - \frac{e^{-p}}{p^2}$. Ne segue $x(t) = a + t - (t-1)H(t-1)$. Verifichiamo la condizione iniziale. $x(0) = a$ chiaramente in quanto $H(-1) = 0$. Se ora deriviamo otteniamo

$$x'(t) = 1 - H(t-1) - (t-1)H'(t-1) = 1 - H(t-1) - (t-1)\delta(t-1) = 1 - H(t-1)$$

♠ Svolgimento del seguente compito
http://www.mat.uniroma2.it/ tauraso/aa1314/testo16-02-2015.pdf

Esercizio 1 Intersechiamo il piano $y = z + 1$ con la sfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ed otteniamo $x^2 + y^2 + (y-1)^2 = 1$ ossia $x^2 + 2y^2 - 2y = 0$ ossia $x^2 + 2(y-1/2)^2 = 1/2$ ed è un'ellisse. Tale ellisse rappresenta la proiezione sul piano (x, y) dell'intersezione del piano $y = z + 1$, con la sfera data. L'integrale che cerchiamo è (gli studenti, di cui non so il nome, avevano ragione)

$$\int\int_{\substack{x^2+2(y-1/2)^2\le 1/2\\ x,y\ge 0}} dx\,dy\,x\int_{y-1}^{0} dz + \int\int_{\substack{x^2+y^2\le 1\\ x,y\ge 0}} dx\,dy\,x\int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} dz$$

Secondo integrale.

$$\int_0^1 dy\int_0^{\sqrt{1-y^2}} dx x\sqrt{1-x^2-y^2} = \int_0^1 dy(1-x^2-y^2)^{\frac{3}{2}}\frac{1}{3}\Big|_{\sqrt{1-y^2}}^{0} =$$
$$= \int_0^1 dy\frac{1}{3}(1-y^2)^{\frac{3}{2}} \underbrace{=}_{y=\sin t} \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt\frac{\cos^4 t}{3} = \frac{\pi}{16}$$

Primo integrale. L'ellisse è centrata in $(0, 1/2)$ ed i semiassi sono rispettivamente $1/\sqrt{2}$, $1/2$.

$$\int\int_{\substack{x^2+2(y-1/2)^2\le 1/2\\ x,y\ge 0}} dx\,dy\,x\int_{y-1}^{0} dz = \int\int_{\substack{x^2+2(y-1/2)^2\le 1/2\\ x,y\ge 0}} dx\,dy(1-y)x =$$
$$= \int_0^1 dy\int_0^{\sqrt{2y-2y^2}} x(1-y)dx = \int_0^1 \frac{(1-y)}{2}(2y-2y^2) = \frac{1}{6}$$

Esercizio 4 Al solito $e^{it} = z$, da cui

$$\oint_{|z|=1} \frac{2 + \frac{z^2}{2i} - \frac{1}{z^2 2i}}{2 + \left(\frac{z^3}{2} + \frac{1}{2z^3}\right)^2}\frac{dz}{iz} = \oint_{|z|=1} \frac{2z^3(1 - 4iz^2 - z^4)}{z^{12} + 10z^6 + 1}dz$$

$z^{12} + 10z^6 + 1 = 0$ se e solo se $z^6 = -5 \pm \sqrt{24}$. Col segno meno stanno fuori dalla circonferenza ma col segno più stanno dentro e sono 6 su cui trovare i relativi residui e poi sommare i contributi. Brutta faccenda! Conviene osservare $\cos 6x = -1 + 2\cos^2 3x$ da cui l'integrale

$$2\int_0^{2\pi} \frac{2 + \sin(2x)}{5 + \cos(6x)}dx \underbrace{=}_{2x=y} \int_0^{4\pi} \frac{2 + \sin y}{5 + \cos 3y}dy = 2\int_0^{2\pi} \frac{2 + \sin y}{5 + \cos 3y}dy$$

Ora
$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin y}{5+\cos 3y}dy \underbrace{=}_{t=y-\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{-\sin t}{5-\cos 3t}dt = 0 \text{ (funzione dispari)}$$

Rimane
$$2\int_0^{2\pi} \frac{2}{5+\cos 3y}dy \underbrace{=}_{\cos 3x\ ha\ periodo\ \frac{2\pi}{3}} \int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{12}{5+\cos 3y}dy = 4\int_0^{2\pi} \frac{dt}{5+\cos t} = \frac{4\pi}{\sqrt{6}}$$

Lezione del 09/06/2016 Esercizi vari

Esercizio 2 del compito del 13/7/2013.
Esercizio 6 qui
http://www.mat.uniroma2.it/ perfetti/didattica/analisiII_elettronica_11-12-9cfu/09-02-2012-AN-II-Elettr_e_Telec_2011-2012.pdf.

♠ Svolgimento del seguente compito
http://www.mat.uniroma2.it/ tauraso/aa1112/testo10-07-2012.pdf

Esercizio 2. Prima soluzione La forma è scrivibile come

$$\left[\frac{(x^2+y^2)dx}{x^2+y^2} + \frac{(x^2+y^2)dy}{x^2+y^2}\right] + \left[\frac{2xdx}{x^2+y^2} + \frac{2ydy}{x^2+y^2}\right] + \left[\frac{3ydx}{x^2+y^2} + \frac{-3xdy}{x^2+y^2}\right] =$$
$$= [dx+dy] + \left[\frac{2xdx}{x^2+y^2} + \frac{2ydy}{x^2+y^2}\right] + 3\left[\frac{ydx}{x^2+y^2} + \frac{-xdy}{x^2+y^2}\right] \doteq \omega_1+\omega_2+\omega_3$$

ω_1 e ω_2 sono esatte e quindi l'integrale fa zero per qualsiasi valore di R. ω_3 è chiusa. Se $R < 5 = \sqrt{16+9}$ allora è pure esatta e l'integrale fa zero. Se invece $R > 5$, allora non è più esatta e quindi l'integrale va calcolato. Grazie al Lemma di Gauss–Green, scelgo una circonferenza centrata nell'origine di raggio qualsiasi ed ottengo -6π da cui il risultato.

Seconda soluzione Si verifica che è chiusa, impresa non da poco, e quindi si dice che se $R < 5$, è pure esatta da cui l'integrale nullo. Se $R > 5$ si procede come nella precedente soluzione ma si hanno molti integrali nulli e bisogna stare attenti a non "farli diventare" non nulli.

♠ Svolgimento del seguente compito

http://www.mat.uniroma2.it/ tauraso/aa1112/testo11-09-2012.pdf

Esercizio 1 Conviene disegnare la piramide per capire che l'integrale cercato è

$$\int_0^2 dze^z \int\int_{D_z} dx\,dy = \int_0^2 dze^z|D_z|$$

dove D_z è il quadrato ottenuto tagliando la piramide con il piano di ordinata z. Il quadrato D_z è centrato in $(1,1,z)$ per cui troviamo la sua diagonale d_z e da essa ricaviamo $|D_z| = d_z^2/2$. Per trovare la diagonale del quadrato scriviamo $(x,y,z) = (t,t,2t)$ che è la retta passante per i punti $(0,0,0)$ e $(1,1,2)$. Se $2t = z_0$, il punto della retta con ordinata z_0 ha coordinate $(z_0/2, z_0/2, z_0)$.

La sua distanza dal punto $(1,1,z_0)$ è $\sqrt{2}(1-\frac{z_0}{2})$ ed è metà della diagonale di cui sopra. La diagonale è quindi $\sqrt{2}(2-z_0)$ e l'area di D_{z_0} è finalmente $(2-z_0)^2$. L'integrale diventa

$$\int_0^2 e^z(2-z)^2dz = \int_0^2 e^{2-z}z^2dz = 2e^2-10$$

Esercizio 4 Sapendo che $x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$, l'integrale è

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(x^3+1)x^2}{(x^6-x^3+1)^2}dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{6}\frac{6x^5-3x^2}{(x^6-x^3+1)^2}dx + \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{3}{2}\frac{x^2}{(x^6-x^3+1)^2}dx$$

Il primo integrale è chiaramente nullo. Il secondo potrebbe essere risolto direttamente coi residui ma avremmo tre radici doppie ad esempio nel semipiano superiore (fattibile ma laborioso). Procediamo nel seguente modo. Scriviamo

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{3}{2}\frac{x^2}{(x^6-x^3+1)^2}dx \underbrace{=}_{x^3=t} \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2}\frac{dt}{(t^2-t+1)^2}dx \underbrace{=}_{residui} \frac{1}{2}\frac{4}{9}\pi\sqrt{3} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$$

♠ Sia data la piramide (storta) la cui base è data dal rettangolo $A\equiv(1,-1,0)$, $B\equiv(1,2,-3)$, $C\equiv(-1,2,-1)$, $D\equiv(-1,-1,2)$, ed il vertice nel punto $E\equiv(0,0,3)$. Sia D l'interno della piramide. Calcolare $\int\int\int_D(x+y)dx\,dy\,dz$

♠ Svolgimento del seguente compito

http://www.mat.uniroma2.it/ tauraso/aa1112/testo18-09-2012.pdf

Esercizio 1 Scambiamo y con z ed otteniamo $x^2+y^2\le 1$, $|x|+|z|\le 1$. Tutto è simmetrico rispetto ad una qualsiasi trasformazione che inverta una qualsiasi delle coordinate e quindi il risultato finale sarà 8 volte quello che calcoleremo. La componente laterale della superficie cercata è

$$\int_{\substack{x^2+y^2\le 1,\\ x,y,z\ge 0,}} ds(1-x) \underbrace{=}_{x=\cos t,\,y=\sin t} \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt(1-\cos t) = \frac{\pi}{2}-1$$

$(1-x)$ è la lunghezza del segmento che, giacente sulla superficie laterale del cilindro, va dal piano (x,y) al piano $z=1-x$. Poi c'è la superficie della parte di piano interessata. Essa è

$$\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\sqrt{2}dy = \sqrt{2}\frac{\pi}{4}$$

e moltiplicando per 8 arriviamo al risultato.

♠ Svolgimento del seguente compito

http://www.mat.uniroma2.it/ tauraso/aa1213/testo19-09-2013.pdf

Esercizio 1. Il cambio di coordinate produce $u^2+v^2\le w^2$, $|u|\le 1$, $|v|\le 1$, $0\le w\le 1$. Integrando per strati, l'integrale è

$$\int\int\int_D dx\,dy\,dz = \underbrace{\frac{1}{2}}_{iacobiano}\int_0^1 dw\int_{-1}^1 du\int_{-\sqrt{w^2-u^2}}^{\sqrt{w^2-u^2}} dv = \frac{\pi}{6}$$

Ad un certo punto si cambi variabile $u=w\cos t$.

Si poteva pure scrivere (integriamo per fili)

$$\frac{1}{2}\int\int_{\sqrt{u^2+v^2}\le 1} du\,dv\int_{\sqrt{u^2+v^2}}^1 dw = \frac{\pi}{6}$$

Eserizio 4. $e^{ix}=z$ e l'integrale diventa (la funzione integranda è pari)

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-\cos(nx)}{1-\cos x}dx = \\
&\frac{1}{2}\oint\frac{(z^n-1)^2}{z^{n-1}(z-1)^2}\frac{dz}{iz} = \frac{1}{2}\oint\frac{(z-1)^2(z^{n-1}+z^{n-2}+\ldots+1)^2}{z^{n-1}(z-1)^2}\frac{dz}{iz} = \\
&= \frac{1}{2}\oint\frac{dz}{iz^n}\left(\sum_{k=0}^{n-1}z^k\right)^2 = \frac{1}{2}\oint\frac{dz}{iz^n}\sum_{k=0}^{n-1}z^k\sum_{q=0}^{n-1}z^q \underbrace{=}_{k+q=p} \frac{1}{2}\oint\frac{dz}{iz^n}\sum_{p=0}^{2n-2}z^p\sum_{k=0}^{\min\{p,n-1\}}1 = \\
&= \frac{1}{2}\oint\frac{dz}{iz^n}z^{n-1}n = \frac{1}{2}\frac{2\pi i}{i}n = n\pi \text{ solo p} = \text{n} - 1 \text{ contribuisce}
\end{aligned}$$

♠ Svolgimento del seguente compito

http://www.mat.uniroma2.it/ tauraso/aa1112/testo02-07-2012.pdf

Esercizio 1. Scambiamo x con z ed integriamo per strati. Si disegni l'insieme D e ci si convinca che conviene. Per sapere l'intervallo di variabilità della z si intersechino la sfera ed il cono eliminando sia x che y e si ottiene $\sqrt{3}/2\le z\le\sqrt{3}$. Quindi il volume è

$$\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\sqrt{3}} dz|D_z| = \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\sqrt{3}} dz\pi(1-(z-\sqrt{3})^2-\frac{z^2}{3}) = \sqrt{3}\pi/12$$

$1-(z-\sqrt{3})^2$ è il quadrato del raggio della circonferenza intersezione della sfera con il piano di ordinata z. $z/\sqrt{3}$ è il raggio della circonferenza intersezione del cono con il piano di ordinata z.

Volendo si possono introdurre coordinate cilindriche $x=r\cos t$, $y=r\sin t$, $z=v$ e l'integrale è

$$\int_0^{2\pi} dt\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\sqrt{3}} dv\int_{\frac{v}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{1-(v-\sqrt{3})^2}} r\,dr$$

e si ottiene l'integrale precedente.

Anche le coordinate sferiche $x = r\sin\vartheta\cos\varphi$, $y = r\sin\vartheta\sin\varphi$, $z = r\cos\vartheta$ con $0 \le \varphi \le 2\pi$, $0 \le \vartheta \le \pi$ vanno bene. La sfera diventa

$$r^2 - 2r\sqrt{3}\cos\vartheta + 2 \le 0 \iff \cos\vartheta \ge \frac{r^2+2}{2r\sqrt{3}} \iff \vartheta \le \arccos\frac{r^2+2}{2r\sqrt{3}}$$

Il volume è

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_1^2 dr \int_{\frac{\pi}{6}}^{\arccos\frac{r^2+2}{2r\sqrt{3}}} \underbrace{r^2\sin\vartheta}_{iacobiano}\, d\vartheta = \sqrt{3}\pi/12$$

Lezione del 16/06/2016 Esercizi vari

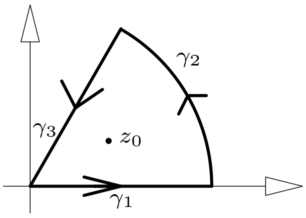
♠ **Esercizio 26** delle dispense di Tauraso. Lo risolviamo in tutta generalità in due modi.

Prima soluzione

$I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^{2n}}$ Le radici del denominatore sono $2n$ ossia $z_k = e^{i\frac{\pi}{2n}+i\frac{k}{n}\pi}$ $0 \le k \le 2n-1$.
$2I_n = 2\pi i\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\lim_{z\to z_k}\frac{z-z_k}{z^{2n}-1} = 2\pi i\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2nz_k^{2n-1}} = -2\pi i\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2n}z_k$. Si verifichi che $z_k + z_{n-k-1} = 2i\sin\dfrac{(2k+1)\pi}{2n}$. Se n è pari si ha $-\dfrac{2i}{2n}\displaystyle\sum_{k=0}^{\frac{n}{2}-1}\frac{1}{2i}\left(e^{i\frac{\pi}{2n}+i\frac{\pi k}{n}} - e^{-i\frac{\pi}{2n}-i\frac{\pi k}{n}}\right) = -\frac{1}{2n}\frac{1-e^{i\frac{\pi}{2}}}{1-e^{i\frac{\pi}{n}}}e^{i\frac{\pi}{2n}} + \frac{1}{2n}\frac{1-e^{-i\frac{\pi}{2}}}{1-e^{-i\frac{\pi}{n}}}e^{-i\frac{\pi}{2n}} = \frac{1}{2n}\frac{1-i}{2i\sin\frac{\pi}{2n}} + \frac{1}{2n}\frac{1+i}{2i\sin\frac{\pi}{2n}} = \frac{1}{2ni\sin\frac{\pi}{2n}}$ e quindi $I_n = \dfrac{1}{2}\dfrac{2\pi i}{2ni}\dfrac{1}{\sin\frac{\pi}{2n}} = \dfrac{\pi}{2n}\dfrac{1}{\sin\frac{\pi}{2n}}$

Se n è dispari si ha $n = 2p+1$ e quindi si hanno z_k radici con $0 \le k \le 4p+1$. Di queste solamente $z_0, \dots z_{2p}$ appartengono al piano superiore ed inoltre $z_k + z_{n-k-1} = z_k + z_{2p-k} = 2i\sin\dfrac{(2k+1)\pi}{2n}$.
con $0 \le k \le p-1$. $z_p = e^{i(\frac{\pi}{2n}+\frac{p}{n}\pi)} = e^{i\frac{\pi}{2}} = i$. Si ha quindi $\displaystyle\sum_{k=0}^{p-1}\left(e^{i\frac{\pi}{2n}(2k+1)} - e^{-i\frac{\pi}{2n}(2k+1)}\right) + i = e^{i\frac{\pi}{2n}}\frac{1-e^{i\frac{\pi}{2n}2p}}{1-e^{i\frac{\pi}{2n}2}} - e^{-i\frac{\pi}{2n}}\frac{1-e^{-i\frac{\pi}{2n}2p}}{1-e^{-i\frac{\pi}{2n}2}} + i = \frac{1-e^{i\frac{\pi}{n}\frac{n-1}{2}}}{-2i\sin\frac{\pi}{2n}} - \frac{1-e^{-i\frac{\pi}{n}\frac{n-1}{2}}}{2i\sin\frac{\pi}{2n}} + i = -\frac{1}{i\sin\frac{\pi}{2n}} + \frac{1}{2\sin\frac{\pi}{2n}}\left(e^{-i\frac{\pi}{2n}} - e^{i\frac{\pi}{2n}}\right) + i = \frac{i}{\sin\frac{\pi}{2n}}$ ne segue $I_n = \dfrac{\pi}{2n\sin\frac{\pi}{2n}}$.

Seconda soluzione



$$\begin{cases} \gamma_1(t)=t,\ 0\le t\le R \\ \gamma_2(t)=Re^{i\vartheta}\ \ 0\le\vartheta\le\frac{\pi}{n} \\ \gamma_3(t)=-te^{i\frac{\pi}{n}},\ -R\le t\le 0 \qquad z_0=e^{i\frac{\pi}{2n}} \end{cases}$$

All'interno del settore vi è solo la singolarità z_0 per cui abbiamo
$\displaystyle\int_{\gamma_1}\frac{dt}{1+t^{2n}} + \int_{\gamma_2}\frac{dz}{1+z^{2n}} + \int_{\gamma_3}\frac{dz}{1+z^{2n}} = 2\pi i\lim_{z\to z_0}\frac{z-z_0}{1+z^{2n}}$. $\displaystyle\lim_{R\to+\infty}\int_{\gamma_2}\frac{dz}{1+z^{2n}} = 0$.
$\displaystyle\int_{\gamma_3}\frac{dz}{1+z^{2n}} = e^{i\frac{\pi}{n}}\int_0^R\frac{dt}{1+t^{2n}}$ e quindi $I(1-e^{i\frac{\pi}{n}}) = -\dfrac{1}{2n}e^{i\frac{\pi}{2n}}2\pi i$ da cui il risultato.