

Ingegneria informatica analisi–II, A.A. 2015–2016.

Ogni risposta vale da -0.4 a 0.4

Errori più comuni sanzionati negativamente:

- 1) parametrizzare una curva e scrivere $t \in [4, -4]$ o $t \in [2, 0]$ o cose del genere
- 2) dopo avere effettutato le derivate, dire che la forma non è chiusa. Tre giorni per organizzare correttamente due derivate parziali dovrebbero essere più che sufficienti.

Errori di calcolo su conti impostati correttamente hanno inciso poco sul voto finale. Naturalmente tanti piccoli errori possono incidere parecchio.

Impostare un integrale non elementare ed esibire la primitiva senza neanche accennare alla dimostrazione ha comportato una diminuzione del voto finale.

Secondo minicompito per casa (A) Da AGOS....ER... a FRAB..... ANDREA

Sia data la forma differenziale

$$\omega = \frac{-8xy}{(x^2 + y^2 + 4x + 4)(x^2 + y^2 - 4x + 4)}dx + \frac{4(x^2 - y^2 - 4)}{(x^2 + y^2 + 4x + 4)(x^2 + y^2 - 4x + 4)}dy$$

- 1) esibendo i calcoli, si dica se ω è chiusa oppure no
- 2) Si calcoli l'integrale lungo la curva giacente nel primo e quarto quadrante il cui sostegno è dato dalla equazione $(x^2 + 16y^2)^{3/2} + 64y^2 = 4x^2$ e percorsa in senso antiorario.
- 3) Si calcoli l'integrale lungo la curva del punto il cui sostegno è dato dalla equazione $(x^2 + 16y^2)^{3/2} + 64y^2 = 4x^2$ e percorsa in senso antiorario.
- 4) Sia D lo spazio compreso fra il quadrato Q_1 di centro l'origine e lato 5 ed il quadrato Q_2 di centro $(3/2, 0)$ e lato 1. Si calcoli $\oint_{\partial^+ D} \omega$
- 5) Si calcoli $\int_{\underline{\gamma}} \omega$ dove $\underline{\gamma}$ è la curva, percorsa in senso antiorario e composta solo da tratti paralleli ad uno degli assi, che connette in ordine i quattro punti $(0, -1)$, $(5, -1)$, $(5, 1)$, $(0, 1)$.

Le risposte vanno adeguatamente dimostrate. Per "adeguatamente" si intende che si può omettere solo ciò che sta sulle dispense di Tauraso oppure sul "Giornale delle lezioni". Tutto il resto va scritto chiaramente. Scrivere solo cose sensate in quanto *il punteggio va da +2 a -2*.

La consegna deve avvenire giovedì 05/05/2016 alle ore 17.30 (dopo la lezione). Alternativamente entro le ore 14.00 di venerdì 06/05 si può lasciare l'elaborato nella mia buca delle lettere presso il Dipartimento di Matematica (zona Sogene; percorrere il corridoio alle spalle di "Focal Point" ed alla fine, dopo 15 metri circa, sulla destra ci sono le buche delle lettere. La mia è situata nella colonna più distante dalla porta di ingresso). Se l'elaborato è composto da più fogli staccati, questi ultimi debbono essere riuniti (usare attach, grappette o cartelline). In ogni caso su ciascun foglio ci sia nome, cognome e matricola. Non si consegnino elaborati composti da più fogli sparsi. La consegna di venerdì comporta una diminuzione dell'eventuale punteggio positivo del 20%.

Svolgimento

- 1) Dominio: $\{\underline{x} \in \mathbf{R} : \underline{x} \neq (\pm 2, 0)\}$. Detta $\omega = a(\underline{x})dx + b(\underline{x})dy$, la forma differenziale, osserviamo che

$$a(\underline{x}) = \frac{-8xy}{(x^2 + y^2 + 4x + 4)(x^2 + y^2 - 4x + 4)} = \frac{y}{(x+2)^2 + y^2} - \frac{y}{(x-2)^2 + y^2}$$

e che

$$b(\underline{x}) = \frac{4(x^2 - y^2 - 4)}{(x^2 + y^2 + 4x + 4)(x^2 + y^2 - 4x + 4)} = \frac{-x - 2}{(x + 2)^2 + y^2} + \frac{x - 2}{(x - 2)^2 + y^2}$$

per cui

$$\omega = \frac{ydx - (x + 2)dy}{(x + 2)^2 + y^2} + \frac{-ydx + (x - 2)dy}{(x - 2)^2 + y^2} = \quad (\text{A.1})$$

che possiamo riscrivere come

$$\omega = \left[dx \frac{\partial}{\partial x} + dy \frac{\partial}{\partial y} \right] \arctan \frac{x + 2}{y} - \left[dx \frac{\partial}{\partial x} + dy \frac{\partial}{\partial y} \right] \arctan \frac{x - 2}{y} dx \doteq \omega_1 + \omega_2$$

Quindi la forma è chiusa ma non è detto sia esatta in quanto il dominio non è semplicemente connesso.

2)

Sia γ la curva in questione. Introducendo coordinate polari (ellittiche) centrate nell'origine, $x = 4r \cos t$ $y = r \sin t$ si ottiene che la curva diventa $r(t) = \cos 2t$ e quindi $-\pi/4 \leq t \leq \pi/4$ se voglio stare nel primo e quarto quadrante. Dunque il sostegno della curva è (si veda pagina 4 del *giornale delle lezioni* e si sostituisca $x^2/4$ al posto di x^2).

$$x = 4 \cos(2t) \cos t, \quad y = \cos(2t) \sin t \quad (\text{A.2})$$

La funzione $r(t)$ è concava e per $t = 0$ vale 1. Il punto $(2, 0)$ in coordinate polari-ellittiche (r, t) corrisponde a $r = 1/2$, $t = 0$. Ne segue che esso si trova dentro la curva.

Si poteva pure ragionare nel seguente modo. L'interno della curva è dato da $(x^2 + 16y^2)^{3/2} + 64y^2 \leq 4x^2$ e quindi, sostituendo $(2, 0)$ si ha $8 \leq 16$ che è vera.

Per il Lemma di Gauss–Green,

$$\oint_{\gamma} \omega = \oint_{\|\underline{x} - (2,0)\| = 1/4} \omega$$

Ora

$$\oint_{\gamma} \omega_1 = 0 \quad (\text{forma esatta se } x \geq 0)$$

mentre

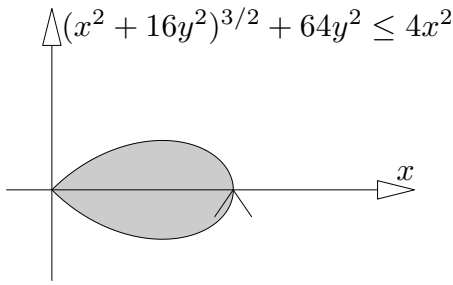
$$\oint_{\|\underline{x} - (2,0)\| = 1/4} \omega_2 = 2\pi \quad (\text{calcolo esplicito}) \quad (\text{A.2.1})$$

Osservazioni specifiche sugli elaborati. Dopo avere osservato la chiusura, alcuni hanno detto che l'integrale **A2.1** vale 2π senza corredare con nessuna evidenza scritta. Ciò non può non essere considerato errore.;

Alla fine il risultato è 2π . L'integrale **A.2.1** è immediato se si parametrizza $\underline{x} = (2, 0) + \varepsilon(\cos \varphi, \sin \varphi)$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Bisogna però dire che la scelta della circonferenza, per quanto riguarda il verso di percorrenza, è dettata dal verso di percorrenza della curva nel testo. Per capire se quest'ultima è percorsa in senso antiorario od orario, dopo avere osservato che $x(\pi/4) = y(\pi/4) = 0$, si studia

$$x'(t) = \sin t(4 \sin^2 t - 5) \geq 0 \iff \sin t \leq 0 \iff -\pi/4 \leq t \leq 0$$

per cui la curva è percorsa in senso antiorario.



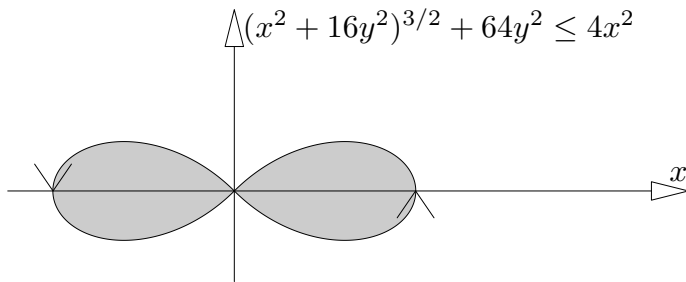
3) Dovrebbe essere chiaro che l'integrale della nuova curva, detta γ_1 , è zero. Stavolta $-\pi/4 \leq t \leq \pi/4$ e $3\pi/4 \leq t \leq 5\pi/4$ e

$$\oint_{\gamma_1} \omega_1 = -2\pi, \quad \oint_{\gamma_2} \omega_2 = 2\pi$$

Anche qui, per dire se il primo integrale è -2π oppure 2π , bisogna sapere come "gira" la curva del testo nel secondo e terzo quadrante. Ora

$$x'(t) = \sin t(4 \sin^2 t - 5) \geq 0 \iff \sin t \leq 0 \iff -\pi/4 \leq t \leq 0 \vee \pi \leq t \leq 5\pi/4$$

e quindi per $3\pi/4 \leq t \leq \pi$ la $x(t)$ è decrescente da cui la curva percorsa in senso antiorario.



4)

Purtroppo la curva di integrazione passa per la singolarità $(2,0)$. Se il lato fosse stato 2, come era nelle intenzioni, la correzione sarebbe la seguente. Coloro che giustamente sono rimasti "bloccati" dall'errore del testo, verranno "indennizzati" durante la correzione.

Sia γ il bordo del quadrato Q_1 percorso in senso antiorario. L'integrale della forma omega è zero per le stesse ragioni del punto precedente. Il bordo del quadrato Q_2 è percorso in senso orario, lo identifichiamo con ∂Q_2 , ed abbiamo

$$\oint_{\partial Q_2} \omega_1 = 0, \quad \oint_{\partial Q_2} \omega_2 = -2\pi$$

per cui il risultato è -2π .

L'integrale sul quadrato grande può dedursi anche usando Gauss-Green e scegliendo la curva $\gamma(t) = (x = r \cos t, y = r \sin t)$ $r > 2$ ed ottenendo

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma} \omega &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{4r(r^2 - 4) \cos t}{(r^4 + 8r^2 - 16r^2 \cos^2 t + 16)} dt = \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{4r(r^2 - 4) \cos t}{(r^4 + 8r^2 - 16r^2 \cos^2 t + 16)} dt + \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{4r(r^2 - 4) \cos t}{(r^4 + 8r^2 - 16r^2 \cos^2 t + 16)} dt = 0 \end{aligned}$$

5)

Si tratta di un rettangolo al quale manca il tratto verticale fra i punti $(0, -1)$ e $(0, 1)$ percorso nel verso discendente. Certamente potremmo calcolare l'integrale della forma lungo i tre lati ma sconsiglio. Conviene osservare che, detta $\underline{\gamma}$ la curva il cui sostegno è dato dai tre lati desumibili dal testo e detta $\underline{\sigma}$ la curva discendente il cui sostegno è il quarto lato mancante, si ha

$$\oint_{\underline{\gamma} \cup \underline{\sigma}} \omega = 2\pi \implies \oint_{\underline{\gamma}} \omega = 2\pi - \oint_{\underline{\sigma}} \omega$$

per cui calcoliamo ora solo l'ultimo integrale. Parametizziamo in modo ascendente $x = 0, y = t, -1 \leq t \leq 1$ ed otteniamo

$$\int_{-1}^1 dt \frac{-16 - 4t^2}{(4 + t^2)^2} = \int_{-1}^1 dt \frac{-4}{4 + t^2} = -4 \cdot \frac{1}{2} 2 \arctan \frac{1}{2} = -4 \arctan \frac{1}{2}$$

per cui il risultato è $2\pi - 4 \arctan \frac{1}{2}$

Nel tentativo di individuare qualche punto della curva, qualcuno potrebbe aver pensato di porre $x = 0$ e di risolvere la equazione $(16y^2)^{3/2} + 64y^2 = 0$ e quindi di scrivere $y^3 + y^2 = 0$ le cui soluzioni sono $y = 0$ e $y = 1$. Ciò è sbagliato in quanto la quantità $(y^2)^{3/2}$ essendo una radice quadrata non può che essere non negativa. Infatti si ha $(y^2)^{3/2} = (y^6)^{1/2} = |y|^3 \geq 0$. Si poteva pure operare $(y^2)^{3/2} = \left((y^2)^{\frac{1}{2}}\right)^3 = |y|^3$.

Rispondo ora alle domande 1)–5) nell'ipotesi in cui lo studente o studentessa non abbia notato la decomposizione in A.1 e men che meno la formula dopo. In tal caso la forma ω viene vista come un tutt'uno. Alcuni hanno infatti verificato la chiusura della forma differenziale ma non la decomposizione. Altri non hanno neppure verificato la chiusura pregiudicandosi di fatto la possibilità di rispondere alle domande 2) e 3) data la parametrizzazione delle curve ("Lemniscata di Bernoulli" dilatata sull'asse delle x .)

1)

Semplicemente si eseguono le derivate miste e si constata la chiusura (calcolo laborioso).

2)

Il dominio della forma è tutto il piano complesso tranne due punti $(\pm 2, 0)$. Dalla chiusura, grazie al lemma di Gauss–Green, ne segue che l'integrale è pari all'integrale lungo la circonferenza, detta C , e pari a $x = 2 + \varepsilon \cos t, y = \varepsilon \sin t$ dove ε è tale che la circonferenza **non** giri intorno al punto $(-2, 0)$. L'integrale è

$$\int_0^{2\pi} \frac{16 + 4\varepsilon \cos t}{16 + \varepsilon^2 + 8\varepsilon \cos t} dt = 2\pi \quad (\text{A.2.2})$$

Infatti il denominatore $(x^2 + y^2 + 4x + 4)(x^2 + y^2 - 4x + 4)$ diventa $(C = \cos t, S = \sin t)$ $\varepsilon^2(4 + \varepsilon^2 C^2 + 4\varepsilon C + \varepsilon^2 S^2 + 8 + 4\varepsilon C + 4) = \varepsilon^2(4 + \varepsilon C)^2$. Il numeratore $-8xydx + 4(x^2 - y^2 - 4)dy$ diventa $-8(2 + \varepsilon C)\varepsilon S(-\varepsilon S) + 4(4 + \varepsilon^2 C^2 + 4\varepsilon C - \varepsilon^2 S^2 - 4)\varepsilon C = 16\varepsilon^2 + 4\varepsilon^3 C$. Si calcoli l'integrale oppure si veda alla fine ma solo dopo averci provato (qualcosa del genere potrebbe uscire al compito)

È chiaro che rispondere alla domanda 2) senza passare dalla chiusura della forma appare arduo in quanto bisognerebbe calcolare l'integrale della forma con la parametrizzazione (A.2). Se qualche studente/ssa volesse cimentarsi, ben venga!

Risposta alla domanda 2) senza avere prima dimostrato la chiusura della forma

Si perviene all'integrale

$$\int_{-\pi/4}^{\pi/4} -4 \frac{\cos t (360 \cos^8 t - 892 \cos^6 t + 730 \cos^4 t - 217 \cos^2 t + 7)}{25 + 3600 \cos^{12} t - 6720 \cos^{10} t + 585 \cos^8 t - 1656 \cos^6 t - 146 \cos^4 t + 4456 \cos^2 t} dt$$

Fine della risposta alla domanda 2) senza avere prima dimostrato la chiusura della forma

Osservazioni specifiche sugli elaborati Alcuni hanno dimostrato la chiusura della forma ω ed hanno osservato che l'integrale è lo stesso se eseguito su di una qualsiasi curva che giri in senso antiorario intorno al punto $(2, 0)$ (ma non intorno al punto $(-2, 0)$) per poi concludere che $\oint \omega = 2\pi$. **Domanda:** Chi dice loro che il valore dell'integrale è esattamente 2π ?

3)

Ora la curva ammette $-\pi/4 \leq t \leq \pi/4$, e $3\pi/3 \leq t \leq 5\pi/4$. La parte $-\pi/4 \leq t \leq \pi/4$, è come al punto 2) ossia uso Gauss-Green e scelgo la circonferenza già usata. La parte $3\pi/3 \leq t \leq 5\pi/4$ è analoga. Per Gauss-Green eseguo l'integrale su $x = -2 + \varepsilon \cos t$, $y = \varepsilon \sin t$. La quantità $-8xydx + 4(x^2 - y^2 - 4)dy$ dà

$$-8(-2 + \varepsilon C)\varepsilon S(-\varepsilon S) + 4(4 + \varepsilon^2 C^2 - 4\varepsilon C - \varepsilon^2 S^2 - 4)\varepsilon C = -16\varepsilon^2 + 4\varepsilon^3 C$$

e

$$(x^2 + y^2 + 4x + 4)(x^2 + y^2 - 4x + 4) = \varepsilon^2(16 - 8\varepsilon C + \varepsilon^2 C^2) + \varepsilon^2 C^2 = \varepsilon^2(16 + \varepsilon^2 - 8\varepsilon C)$$

ed inoltre

$$\int_0^{2\pi} \frac{-16 + 4\varepsilon \cos t}{16 + \varepsilon^2 - 8\varepsilon \cos t} dt = -2\pi$$

La somma dà zero.

Osservazioni specifiche sugli elaborati Alcuni hanno dimostrato la chiusura della forma ω ed hanno affermato che a destra la curva gira in senso antiorario ed a sinistra in senso orario per poi concludere che $\oint \omega = 0$. **Osservazione:** Anche a sinistra si gira in senso antiorario!

4)

L'integrale lungo il quadrato grande fa zero. Si pensi a due quadrati di centro $(-2, 0)$ e $(2, 0)$ rispettivamente e che in comune hanno un lato posto lungo l'asse delle ordinate. La somma degli integrali dà zero e la somma dei due integrali lungo il lato comune pure dà zero in quanto tale lato viene percorso due volte con versi opposti.

Per l'integrale sul quadrato piccolo si usa come al solito Gauss-Green.

Risposta alla domanda 4) senza avere prima dimostrato la chiusura della forma

Il calcolo per rispondere alla domanda 4) poteva essere effettuato anche **senza passare attraverso la chiusura della forma** ma chiaramente a prezzo di una fatica notevole. Seguo la parametrizzazione dello studente avente matricola "0205940".

Quadrato esterno.

Cominciamo dal lato verticale sinistro percorso dall'alto verso il basso. Abbiamo $\underline{\gamma}_1(t) = (-\frac{5}{2}, \frac{5}{2} - t)$ e $0 \leq t \leq 5$. Abbiamo

$$4 \int_{\underline{\gamma}_1} \omega = 4 \int_0^5 \frac{-t^2 + 5t - 4}{(t^2 - 5t + \frac{33}{2})^2 - 100} (-dt) \quad (\mathbf{A4.0.9})$$

Sia ora $y = 5t - t^2$, da cui

$$\begin{aligned} \frac{-t^2 + 5t - 4}{(t^2 - 5t + \frac{33}{2})^2 - 100} &= \frac{1}{8} \frac{1}{y + \frac{13}{2}} - \frac{9}{8} \frac{1}{y + \frac{53}{2}} = \frac{1}{8} \frac{1}{t^2 - 5t + \frac{13}{2}} - \frac{9}{8} \frac{1}{t^2 - 5t + \frac{53}{2}} = \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{1 + 4(t - \frac{5}{2})^2} - \frac{1}{18} \frac{1}{1 + \frac{4}{81}(t - \frac{5}{2})^2} \end{aligned}$$

e quindi

$$4 \int_{\underline{\gamma}_1} \omega = -\arctan(2t - 5) \Big|_0^5 + \arctan \frac{2t - 5}{9} \Big|_0^5 = -2 \arctan 5 + 2 \arctan \frac{5}{9} = -2 \arctan \frac{20}{17}$$

A4.1

Personalmente avrei usato la parametrizzazione $x = -5/2$, $y = -\tau$, $-5/2 \leq \tau \leq 5/2$ ma è chiaro che la traslazione $\tau = t - 5/2$ ci riconduce al calcolo precedente.

Osservazioni specifiche sugli elaborati Arrivati alla formula **A4.0.9**, alcuni hanno trovato direttamente la primitiva $\frac{1}{4} \arctan \frac{8t - 20}{2t^2 - 10t + 17}$ ma senza scrivere come ci sono arrivati. Sono maghi dell'integrazione o hanno trovato aiuto in rete?

Lato orizzontale basso percorso da sinistra verso destra: se usiamo $\underline{\gamma}_2(t) = (\frac{5}{2} - t, -\frac{5}{2})$, $0 \leq t \leq 5$, (sempre la parametrizzazione dello studente con matricola "0205940") allora devo moltiplicare l'integrale per -1 in quanto $\underline{\gamma}_2$ va da destra a sinistra ed abbiamo

$$\begin{aligned} \int_{\underline{\gamma}_2} \omega &= -40 \int_0^5 \frac{2t - 5}{(53 - 18t + 2t^2)(13 - 2t + 2t^2)} dt = 5 \int_0^5 \left(-\frac{1}{53 - 18t + 2t^2} + \frac{1}{13 - 2t + 2t^2} \right) dt = \\ &= \left[-\arctan \left(\frac{2t - 1}{5} \right) + \arctan \left(\frac{2t - 9}{5} \right) \right] \Big|_0^5 = 0 \end{aligned}$$

(A4.2)

Lato verticale destro da percorrere verso l'alto: se usiamo $\underline{\gamma}_3(t) = (\frac{5}{2}, \frac{5}{2} - t)$, $0 \leq t \leq 5$, (sempre la parametrizzazione dello studente con matricola "0205940") allora devo moltiplicare l'integrale per -1 in quanto $\underline{\gamma}_2$ va dall'alto verso il basso ed abbiamo

$$\begin{aligned} - \int_{\underline{\gamma}_3} \omega &= - \int_0^4 \frac{16(t^2 - 5t + 4)}{(53 - 10t + 2t^2)(13 - 10t + 2t^2)} dt = \\ &= -16 \frac{1}{8} \int_0^5 \left(\frac{-1}{1 + (2t - 5)^2} + \frac{1}{1 + (\frac{2}{9}t - \frac{5}{9})^2} \right) dt = 2 \arctan 5 - 2 \arctan \frac{5}{9} \end{aligned}$$

(A4.3)

Poi bisogna cambiare segno ed otteniamo $+2 \arctan 5 - 2 \arctan \frac{5}{9}$.

Da ultimo è rimasto l'integrale lungo il lato alto verso destra. Se usiamo $\underline{\gamma}_4(t) = (\frac{5}{2} - t, \frac{5}{2})$, $0 \leq t \leq 5$, (sempre la parametrizzazione dello studente con matricola "0205940") allora l'integrale è come **A4.2** ossia pari a zero. Sommando **A4.1** + **A4.3** otteniamo zero come sapevamo già.

Quadrato interno. Purtroppo l'errore descritto nella precedente soluzione (quella che fa uso della chiusura della forma) impedisce di portare fino in fondo il calcolo. Si può solamente eseguirlo su tre lati del triangolo. Usiamo sempre le parametrizzazioni dello studente con matricola "0205940". Il quadrato ha vertici in $E \equiv (1, 1/2) \rightarrow H \equiv (2, 1/2) \rightarrow G \equiv (2, -1/2) \rightarrow F \equiv (1, -1/2)$ (percorso in senso orario).

Cominciamo dal tratto $\overline{FG}$ ($G \rightarrow F$). La parametrizzazione dello studente "0205940" è $\gamma_1(t) = (2 - t, -1/2,)$ $0 \leq t \leq 1$.

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_1} \omega &= 64 \int_0^1 dt \frac{-2+t}{(65-32t+4t^2)(1+4t^2)} = -2 \int_0^1 \left(\frac{1}{1+4t^2} - \frac{1}{(2t-8)^2+1} \right) dt = \\ &= -\arctan 2t \Big|_0^1 - \arctan(2t-8) \Big|_0^1 = -\arctan 2 - \arctan(-6) + \arctan(-8) \end{aligned} \quad (\text{A4.4})$$

Lato $\overline{FE}$, $F \rightarrow E$. La parametrizzazione è $\gamma_2(t) = (1, t - 1/2)$

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_2} \omega &= -16 \int_0^1 \frac{13-4t+4t^2}{(37-4t+4t^2)(5-4t+4t^2)} dt = \\ &= \int_0^1 \left(\frac{-1}{(1+(\frac{2t-1}{2})^2)} - \frac{1}{3(1+(\frac{2t-1}{6})^2)} \right) dt = -2 \arctan \frac{1}{2} - 2 \arctan \frac{1}{6} = -2 \arctan \frac{8}{11} \end{aligned} \quad (\text{A4.5})$$

Lato $\overline{EH}$, $E \rightarrow H$. La parametrizzazione è $\gamma_3(t) = (1+t, 1/2)$

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_3} \omega &= \int_0^1 -\frac{8(1+2t)}{(13+10t+2t^2)(5-6t+2t^2)} dt = \int_0^1 dt \left(\frac{1}{2t^2+10t+13} - \frac{1}{2t^2-6t+5} \right) \\ &= \int_0^1 \left(\frac{2}{(1+(2t+5)^2)} - \frac{2}{(1+(2t-3)^2)} \right) dt = \arctan(2t+5) - \arctan(2t-3) \Big|_0^1 \\ &= \frac{\pi}{4} + \arctan 7 - \arctan 5 - \arctan 3 \end{aligned} \quad (\text{A4.6})$$

Poi bisogna sommare **A4.4** + **A4.4** + **A4.6**

Fine della risposta alla domanda 4) senza avere prima dimostrato la chiusura della forma

5)

Come nella soluzione precedente. L'integrale sul rettangolo "completato" è pari all'integrale su di una opportuna circonferenza, ormai questo lo abbiamo capito ed è pari a 2π . Poi sottraggo il contributo sul tratto verticale esattamente come nella precedente soluzione.

Calcolo dell'integrale A.2.2

$$\int_0^{2\pi} \frac{16+4\varepsilon \cos t}{16+\varepsilon^2+8\varepsilon \cos t} dt = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{16+4\varepsilon \cos t}{16+\varepsilon^2+8\varepsilon \cos t} dt$$

Poniamo $t = 2 \arctan x$ ed usando $\cos(\arctan x) = 1/\sqrt{1+x^2}$, $\sin(\arctan x) = x/\sqrt{1+x^2}$ si ha

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2(16-4\varepsilon) + 16+4\varepsilon}{x^2(4-\varepsilon)^2 + (4+\varepsilon)^2} \frac{2}{1+x^2} dt \quad (\text{A5.1})$$

Ora fratti semplici

$$8 \frac{x^2 a + b}{x^2 a^2 + b^2} \frac{1}{1+x^2} = \frac{8}{a+b} \left(\frac{1}{1+x^2} + \frac{ab}{x^2 a^2 + b^2} \right)$$

da cui ($a = 4 - \varepsilon$, $b = 4 + \varepsilon$)

$$\frac{8}{a+b} \arctan x \Big|_{-\infty}^{+\infty} + \frac{8}{a+b} \arctan \frac{xa}{b} \Big|_{-\infty}^{+\infty} = 2\pi$$

Osservare come essenziale sia $a > 0$ ossia $\varepsilon < 4$. Altrimenti l'integrale sarebbe zero come nel punto 3)

Risposta alla domanda 5) senza avere prima dimostrato la chiusura della forma

Ormai abbiamo capito la procedura. Lato orizzontale basso. $\underline{\gamma}_1(t) = (t, -1)$, $0 \leq t \leq 5$ da cui

$$\begin{aligned} \int_{\underline{\gamma}_1} \omega &= \int_0^5 \frac{8t}{(5+t^2+4t)(5+t^2-4t)} dt = \int_0^5 \left(\frac{1}{t^2-4t+5} - \frac{1}{t^2+4t+5} \right) dt = \\ &= [\arctan(t-2) - \arctan(t+2)] \Big|_0^5 = \arctan 3 + \arctan 2 - \arctan 7 + \arctan 2 \end{aligned}$$

Osservazioni specifiche sugli elaborati Alcuni hanno $\arctan \frac{11}{2} + \arctan \frac{3}{4}$ il che va bene (si veda qui https://it.wikipedia.org/wiki/Funzione_trigonometrica_inversa)

Lato verticale destro. $\underline{\gamma}_2(t) = (5, -1+t)$, $0 \leq t \leq 2$. Si ha

$$\int_{\underline{\gamma}_2} \omega = \int_0^2 \frac{4(20+2t-t^2)}{(50-2t+t^2)(10-2t+t^2)} dt = -2 \arctan 3 + 2 \arctan 7$$

Lato orizzontale alto. $\underline{\gamma}_3(t) = (5-t, 1)$, $0 \leq t \leq 5$. Si ha

$$\int_{\underline{\gamma}_3} \omega = \int_0^5 \frac{-8(-5+t)}{(50-14t+t^2)(10-6t+t^2)} dt = 2 \arctan(2) - \arctan(7) + \arctan(3)$$

La somma dà $4 \arctan 2 = 4 \frac{\pi}{2} - 4 \arctan \frac{1}{2}$

Osservazioni specifiche sugli elaborati Alcuni hanno parametrizzato il tratto orizzontale alto *nel seguente modo*: $(t, 1)$, $t \in [5, 0]$ (**Sconvolgente!**)

Ingegneria informatica analisi–II, A.A. 2015–2016.

Secondo minicompito per casa (B). Da FRED.....ARIANNA a PERR....GIUSEPPE

Sia data la forma differenziale

$$\omega = \frac{2(y^2 - x^2 - 1)}{(y^2 + x^2 + 2y + 1)(y^2 + x^2 - 2y + 1)} dx + \frac{-4xy}{(y^2 + x^2 + 2y + 1)(y^2 + x^2 - 2y + 1)} dy$$

1) esibendo i calcoli, si dica se ω è chiusa oppure no

2) Si calcoli l'integrale lungo la curva giacente nel primo e quarto quadrante il cui sostegno è dato dalla equazione $(4x^2 + y^2)^{3/2} + 8x^2 = 2y^2$ e percorsa in senso antiorario.

3) Si calcoli l'integrale lungo la curva del punto il cui sostegno è dato dalla equazione $(4x^2 + y^2)^{3/2} + 8x^2 = 2y^2$ e percorsa in senso antiorario.

4) Sia D lo spazio compreso fra le seguenti tre figure: (1) il quadrato Q_1 di centro l'origine e lato 4, (2) il quadrato Q_2 di centro $(3/4, 0)$ e lato $1/2$, (3) il quadrato Q_3 di centro $(-3/4, 0)$ e lato $1/2$. Si calcoli $\oint_{\partial^+ D} \omega$

5) Si calcoli $\int_{\gamma} \omega$ dove γ è la curva, percorsa in senso antiorario e composta solo da tratti paralleli ad uno degli assi, che connette in ordine i quattro punti $(4, 0)$, $(4, 2)$, $(-4, 2)$, $(-4, 0)$.

Le risposte vanno adeguatamente dimostrate. Per "adeguatamente" si intende che si può omettere solo ciò che sta sulle dispense di Tauraso oppure sul "Giornale delle lezioni". Tutto il resto va scritto chiaramente. Scrivere solo cose sensate in quanto *il punteggio va da +2 a -2*.

La consegna deve avvenire giovedì 05/05/2016 alle ore 17.30 (dopo la lezione). Alternativamente entro le ore 14.00 di venerdì 06/05 si può lasciare l'elaborato nella mia buca delle lettere presso il Dipartimento di Matematica (zona Sogene; percorrere il corridoio alle spalle di "Focal Point" ed alla fine, dopo 15 metri circa, sulla destra ci sono le buche delle lettere. La mia è situata nella colonna più distante dalla porta di ingresso). Se l'elaborato è composto da più fogli staccati, questi ultimi debbono essere riuniti (usare attach, grappette o cartelline). In ogni caso su ciascun foglio ci sia nome, cognome e matricola. Non si consegnino elaborati composti da più fogli sparsi. La consegna di venerdì comporta una diminuzione dell'eventuale punteggio positivo del 20%.

Svolgimento

1)

Dominio: $\{\underline{x} \in \mathbf{R} : \underline{x} \neq (0, \pm 1)\}$. Detta $\omega = a(\underline{x})dx + b(\underline{x})dy$, la forma differenziale, osserviamo che

$$b(\underline{x}) = \frac{-4xy}{(x^2 + y^2 + 2x + 1)(x^2 + y^2 - 2x + 1)} = \frac{x}{(y + 1)^2 + x^2} - \frac{x}{(y - 1)^2 + x^2}$$

e che

$$a(\underline{x}) = \frac{2(y^2 - x^2 - 1)}{(y^2 + x^2 + 2y + 1)(y^2 + x^2 - 2y + 1)} = \frac{-y - 1}{(y + 1)^2 + x^2} + \frac{y - 1}{(y - 1)^2 + x^2}$$

per cui

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{-(y + 1)dx + xdy}{(y + 1)^2 + x^2} + \frac{(y - 1)dx - xdy}{(y - 1)^2 + x^2} = \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\arctan \frac{y + 1}{x} - \arctan \frac{y - 1}{x} \right] dx + \frac{\partial}{\partial y} \left[\arctan \frac{y + 1}{x} - \arctan \frac{y - 1}{x} \right] dy \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

$$= \left[dx \frac{\partial}{\partial x} + dy \frac{\partial}{\partial y} \right] \arctan \frac{y+1}{x} - \left[dx \frac{\partial}{\partial x} + dy \frac{\partial}{\partial y} \right] \arctan \frac{y-1}{x} \doteq \omega_1 + \omega_2$$

Quindi la forma è chiusa.

2)

Per calcolare l'integrale usiamo il fatto che il cammino si trova in un sottoinsieme semplicemente connesso del piano (figura B2). Il cammino, detto $\underline{\gamma}$, è quello che parte dal punto $(0, -2)$ ed arriva a $(0, 2)$ seguendo la curva. Chiudiamo tale cammino con la semicirconferenza $\underline{\sigma}$, $x = 2 \cos t, y = 2 \sin t, -\pi/2 \leq t \leq \pi/2$. Si ha $\int_{\underline{\sigma}} \omega = 0$ in quanto nel passaggio dal quarto al primo quadrante la funzione $a(\underline{x})$ non cambia segno mentre lo cambia dx e la funzione $b(\underline{x})$ cambia segno ma non lo cambia dy . Più dettagliatamente

$$\omega = \frac{2(y^2 - x^2 - 1)}{(y^2 + x^2 + 2y + 1)(y^2 + x^2 - 2y + 1)} dx + \frac{-4xy}{(y^2 + x^2 + 2y + 1)(y^2 + x^2 - 2y + 1)} dy$$

Il denominatore è invariante nel passaggio da y a $-y$. La quantità $2(y^2 - x^2 - 1)dx$ cambia segno nel passaggio da y positivo a y negativo in quanto dx prima cresce e poi decresce. La quantità $4xydy$ cambia segno in quanto $4xdy$ è sempre negativa mentre y chiaramente cambia segno.

$$\oint_{\underline{\gamma} \cup \underline{\sigma}} \omega \underbrace{=}_{\text{semp. conn.}} 0 \implies \oint_{\underline{\gamma}} \omega = - \oint_{\underline{\sigma}} \omega = 0$$

Si poteva pure usare il cammino che parte dal punto $(0, -2)$ e torna allo stesso punto seguendo i due segmenti orizzontali ed uno verticale. Sia $\underline{\gamma}$ la porzione di curva su cui dobbiamo integrare e sia $\underline{\sigma}$ la curva che connette i quattro punti $(0, 2)$, $(2, 2)$, $(2, -2)$, $(0, -2)$.

$$\begin{aligned} \oint_{\underline{\gamma} \cup \underline{\sigma}} \omega = 0 &\implies \oint_{\underline{\gamma}} \omega = - \oint_{\underline{\sigma}} \omega = \int_{-2}^0 \frac{2(-3+t^2)}{(t^2+1)(t^2+9)} dt + \int_{-2}^2 \frac{-8t}{(5+t^2-2t)(5+t^2+2t)} dt + \\ &+ \int_0^2 \frac{-2(-3+t^2)}{(t^2+9)(t^2+1)} dt = 0 \end{aligned}$$

essendo $I_2 = 0$ (funzione dispari) e $I_1 + I_2 = 0$.

Ciò che non si può scrivere, come molti invece hanno fatto, è che l'integrale vale zero o un qualsiasi altro valore in quanto la curva giace su di un sottoinsieme semplicemente connesso del piano. Se la curva fosse chiusa l'integrale sarebbe zero ma la curva non è chiusa e quindi, in linea di principio, l'integrale potrebbe assumere qualsiasi valore. L'unica "scorciatoia", per non calcolare integrali definiti sarebbe stata trovare il potenziale e calcolare la differenza fra il punto iniziale e finale.

In realtà l'intenzione era quella di scrivere "primo e secondo quadrante". Per chi avesse interpretato in tale modo il problema la soluzione è la seguente.

Sia $\underline{\gamma}$ la curva nella figura B2 che contorna la parte superiore della Lemniscata. Introducendo coordinate polari (ellittiche) centrate nell'origine, $x = (r \cos t)/2$ $y = r \sin t$ si ottiene che la curva diventa $r(t) = -2 \cos 2t$ e quindi $\pi/4 \leq t \leq 3\pi/4$ se voglio stare nel primo e secondo quadrante. Dunque il sostegno della curva è (si veda pagina 4 del *giornale delle lezioni* e si sostituisca $4x^2$ al posto di x^2 e si ruoti di novanta gradi o si scambi x con y).

$$x = -\cos(2t) \cos t, \quad y = -2 \cos(2t) \sin t \quad (\text{B.2})$$

La funzione $r(t)$ è concava e per $t = \pi/2$ vale 2. Il punto $(0, 1)$ in coordinate polari-ellittiche (r, t) corrisponde a $r = 1$, $t = \pi/2$. Ne segue che esso si trova dentro la curva.

Si poteva pure ragionare nel seguente modo. L'interno della curva è dato da $(4x^2 + y^2)^{3/2} + 8x^2 \leq 2y^2$ e quindi, sostituendo $(0, 1)$ si ha $1 \leq 2$ che è vera.

Per il Lemma di Gauss–Green,

$$\oint_{\underline{\gamma}} \omega = \oint_{\|\underline{x} - (0,1)\|=1/4} \omega$$

Ora

$$\oint_{\underline{\gamma}} \omega_1 = 0 \text{ (forma esatta se } y \geq 0 \text{)}$$

mentre

$$\oint_{\|\underline{x} - (0,1)\|=1/4} \omega_2 = -2\pi$$

Alla fine il risultato è -2π .

3)

Dovrebbe essere chiaro che l'integrale della nuova curva, detta $\underline{\gamma}_1 \cup \underline{\gamma}_2$, è zero. Stavolta $\pi/4 \leq t \leq 3\pi/4$ (su $\underline{\gamma}_1$) e $5\pi/4 \leq t \leq 7\pi/4$ (su $\underline{\gamma}_2$)

$$\oint_{\underline{\gamma}_1 \cup \underline{\gamma}_2} \omega_1 = 2\pi, \quad \oint_{\underline{\gamma}_1 \cup \underline{\gamma}_2} \omega_2 = -2\pi$$

Guardando la figura B2, si evince che

$$\int_{\underline{\gamma}_1} \omega_1 = 0, \quad \int_{\underline{\gamma}_1} \omega_2 = -2\pi$$

in quanto $\underline{\gamma}_1$ giace su di un semplicemente connesso rispetto a ω_1 mentre il secondo integrale si può calcolare usando, grazie a Gauss-Green, la circonferenza $(\varepsilon \cos t, 1 + \varepsilon \sin t)$ $0 \leq t \leq 2\pi$ e ε tale da non includere il punto $(0, -1)$.

Per le stesse ragioni, stavolta usiamo $(\varepsilon \cos t, -1 + \varepsilon \sin t)$ $0 \leq t \leq 2\pi$

$$\int_{\underline{\gamma}_1} \omega_1 = 2\pi, \quad \int_{\underline{\gamma}_1} \omega_2 = 0$$

4)

La frontiera, detta $\partial^+ Q_1$ del quadrato più esterno è percorsa in senso antiorario e l'integrale fa zero in quanto si sommano a zero i due contributi ossia

$$\oint_{\partial^+ Q_1} \omega_1 = 2\pi, \quad \oint_{\partial^+ Q_1} \omega_2 = -2\pi$$

Le frontiere dei due quadrati più interni vanno percorse in senso orario ma entrambe i quadrati tengono fuori i punti $(0, 1)$ e $(0, -1)$ per cui gli integrali curvilinei su tali quadrati danno zero. Alla fine il risultato è zero.

5)

Si tratta di un rettangolo al quale manca il tratto orizzontale fra i punti $(-4, 0)$ e $(4, 0)$ percorso nel verso crescente. Certamente potremmo calcolare l'integrale della forma lungo i tre lati ma sconsiglio. Conviene osservare che, detta $\underline{\gamma}$ la curva il cui sostegno è dato dai tre lati desumibili dal testo e della $\underline{\sigma}$ il tratto orizzontale basso il cui sostegno è il quarto lato mancante, si ha

$$\oint_{\underline{\gamma} \cup \underline{\sigma}} \omega = -2\pi \implies \oint_{\underline{\gamma}} \omega = -2\pi - \oint_{\underline{\sigma}} \omega$$

per cui calcoliamo ora solo l'ultimo integrale. Parametizziamo in modo ascendente $y = 0, x = t, -4 \leq t \leq 4$ ed otteniamo

$$\int_{\underline{\sigma}} \omega = \int_{-4}^4 dt \frac{-2}{(1+t^2)^2} = -4 \arctan 4$$

per cui il risultato è $-2\pi + 4 \arctan 4$. Il -2π deriva dalla forma ω_2 . La forma ω_1 dà contributo nullo in quanto il rettangolo si trova in un sottoinsieme semplicemente connesso rispetto ad essa.

Rispondo ora alle domande 1)–5) nell'ipotesi in cui lo studente o studentessa non abbia notato la decomposizione A.1 e men che meno la seconda riga. In tal caso la forma ω viene vista come un tutt'uno. Alcuni hanno infatti verificato la chiusura della forma differenziale ma non la decomposizione. Altri non hanno neppure verificato la chiusura pregiudicandosi di fatto la possibilità di rispondere alle domande 2) e 3) data la parametrizzazione delle curve ("Lemniscata di Bernoulli" ruotata di 90 gradi.)

1)

Semplicemente si eseguono le derivate miste e si constata la chiusura (calcolo laborioso).

2)

La soluzione già data non tiene conto della decomposizione operata $\omega = \omega_1 + \omega_2$ per cui non cambia nulla.

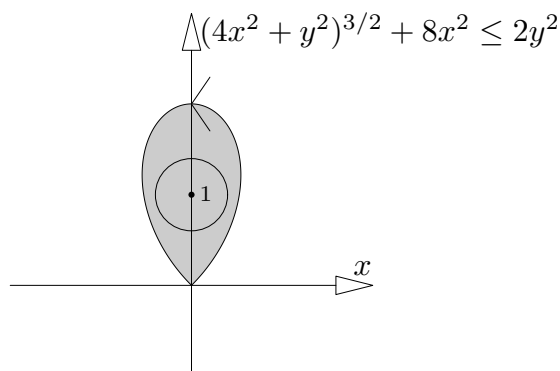
Risposta alla domanda 2) nel caso in cui si fosse considerata la curva fra primo e secondo quadrante e senza la decomposizione $\omega = \omega_1 + \omega_2$

Per chi avesse considerato la curva fra primo e secondo quadrante invece, si segua qui sotto. il dominio della forma è tutto il piano complesso tranne due punti $(0, \pm 1)$. Dalla chiusura, grazie al lemma di Gauss–Green, ne segue che l'integrale è pari all'integrale lungo la circonferenza, detta C , e pari a $x = \varepsilon \cos t, y = 1 + \varepsilon \sin t$ dove ε è tale che la circonferenza **non** giri intorno al punto $(0, -1)$. L'integrale è

$$\int_0^{2\pi} \frac{-4 - 2\varepsilon \sin x}{4 + 4\varepsilon \sin x + \varepsilon^2} dx = -2\pi.$$

Infatti $-4xydy + 2(y^2 - x^2 - 1)dx = -4\varepsilon C(1 + \varepsilon S)\varepsilon C + 2(1 + \varepsilon^2 S^2 + 2\varepsilon S - \varepsilon^2 C^2 - 1)(-\varepsilon S)$ che alla fine dà $-4\varepsilon^2 - 2\varepsilon^3 S$. Il denominatore $(y^2 + x^2 + 2y + 1)(y^2 + x^2 - 2y + 1)$ dà $\varepsilon^2(1 + 2\varepsilon S + \varepsilon^2 S^2 + \varepsilon^2 S^2 + \varepsilon^2 C^2 + 2 + 2\varepsilon S + 1) = \varepsilon^2(4 + 4\varepsilon S + \varepsilon^2)$. Si calcoli l'integrale oppure si veda alla fine ma solo dopo averci provato (qualcosa del genere potrebbe uscire al compito)

È chiaro che rispondere alla domanda 2) senza passare dalla chiusura della forma appare arduo se non impossibile in quanto bisognerebbe calcolare l'integrale della forma con la parametrizzazione **(B.2)**. Se qualche studente/ssa volesse cimentarsi, ben venga! Sono chiaramente disponibile a fornire aiuto qualora fosse necessario.



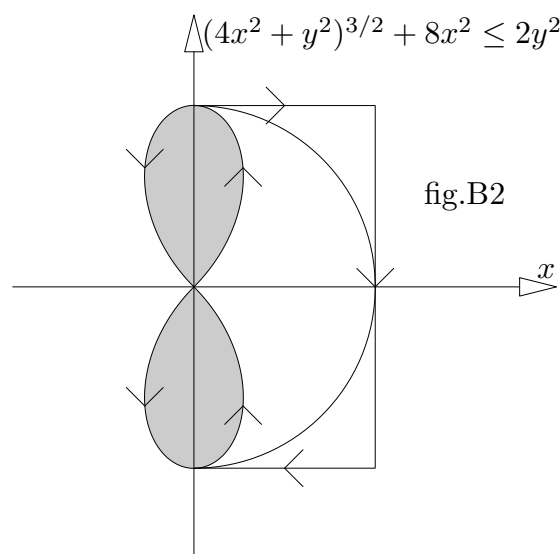
Fine della risposta alla domanda 2) nel caso in cui si fosse considerata la curva fra primo e secondo quadrante e senza la decomposizione $\omega = \omega_1 + \omega_2$

3)

Sempre per Gauss–Green possiamo considerare l’unione delle due circonferenze $x = \varepsilon \cos t$, $y = \pm 1 + \varepsilon \sin t$ ed eseguire i due integrali come al punto 2). L’integrale sul cammino superiore è come nel punto 2) mentre quello sul cammino inferiore dà

$$\int_0^{2\pi} \frac{4 - 2\varepsilon \sin x}{4 - 4\varepsilon \sin x + \varepsilon^2} dx = 2\pi.$$

La somma è zero.



4)

L’integrale lungo il quadrato grande fa zero. Si pensi a due quadrati di centro $(0, -1)$ e $(0, 1)$ rispettivamente e che in comune hanno un lato posto lungo l’asse delle ascisse. La somma degli integrali dà zero e la somma dei due integrali lungo il lato comune pure dà zero in quanto tale lato viene percorso due volte con versi opposti.

Per l’integrale sui due quadrati più piccoli, essi giacciono su porzioni semplicemente connesse del piano e quindi il loro integrale fa zero.

5)

L’idea è la stessa della precedente soluzione. Sapendo che ω è chiusa, eseguiamo l’integrale su di una curva γ_1 che giri in senso antiorario intorno al punto $(0, 1)$ ma non a $(0, -1)$ e poi sottraiamo il contributo della base. Per l’integrale su γ_1 prendiamo la circonferenza $x = \cos t$ $y = 1 + \sin t$,

$0 \leq t \leq 2\pi$. Otteniamo

$$\int_0^{2\pi} \frac{-2(a \sin t + 2)}{(4 + 4a \sin t + a^2)} dt = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{-2(a \sin t + 2)}{(4 + 4a \sin t + a^2)} dt =$$

Ora, si veda **A5.1**, si arriva a

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{-8(at + t^2 + 1)}{(4t^2 + 4 + 8at + a^2t^2 + a^2)(t^2 + 1)} dt = \\ & = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{8(t^2 + 1)} dt - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a^2 - 4}{8(4t^2 + 4 + 8at + a^2t^2 + a^2)} dt = -2\pi \end{aligned}$$

per ogni a tale che la circonferenza non giri intorno al punto $(0, -1)$.

Completiamo il rettangolo con la base $\underline{\sigma} = (t, 0)$, $-4 \leq t \leq 4$. Il rettangolo è quindi unione delle due curve $\underline{\gamma} \cup \underline{\sigma}$

$$-2\pi = \oint_{\underline{\gamma}_1} \omega = \oint_{\underline{\gamma} \cup \underline{\sigma}} \omega \implies \oint_{\underline{\gamma}} \omega = -2\pi - \oint_{\underline{\sigma}} \omega = -2\pi - \int_{-4}^4 \frac{-2}{t^2 + 1} dt = -2\pi + 4 \arctan 4$$

Se volessimo calcolare la somma dei tre integrali lungo rispettivamente le tre curve $\underline{\gamma}_1(t) = (4, t)$, $0 \leq t \leq 2$, $\underline{\gamma}_2(t) = (-t, 2)$, $-4 \leq t \leq 4$, $\underline{\gamma}_3(t) = (-4, -t)$, $-2 \leq t \leq 0$, otterremmo

$$\begin{aligned} & \int_0^2 \frac{-16t dt}{((t+1)^2 + 16)((t-1)^2 + 16)} + \int_{-4}^4 \frac{2(t^2 + 4 - 1) dt}{(9 + t^2)(1 + t^2)} + \int_{-2}^0 \frac{16t dt}{((-t+1)^2 + 16)((-t-1)^2 + 16)} = \\ & = 2 \int_0^2 \frac{-16t dt}{((t+1)^2 + 16)((t-1)^2 + 16)} + \int_{-4}^4 \frac{2(3 - t^2) dt}{(9 + t^2)(1 + t^2)} = \\ & = 2 \left(\arctan \frac{3}{4} - 3 \arctan \frac{1}{4} \right) + \left(-2 \arctan 4 + 2 \arctan \frac{4}{3} \right) = -2\pi + 4 \arctan 4 \end{aligned}$$

Ingegneria informatica analisi–II, A.A. 2015–2016.

Secondo minicompito per casa (C). Da PEZ....LORENZO a ZOMP.... SIMONE

Sia data la forma differenziale

$$\omega = \frac{2(-y^2 - 2yx + 2 + x^2)}{(y^2 - 2y + 2 + x^2 - 2x)(y^2 + 2y + 2 + x^2 + 2x)}dx + \\ + \frac{2(2yx + x^2 - y^2 - 2)}{(y^2 - 2y + 2 + x^2 - 2x)(y^2 + 2y + 2 + x^2 + 2x)}dy$$

- 1) esibendo i calcoli, si dica se ω è chiusa oppure no
- 2) Si calcoli l'integrale lungo la curva giacente nel primo e quarto quadrante il cui sostegno è dato dalla equazione $(x^2 + y^2)^{3/2} + 2y^2 = 2x^2$ e percorsa in senso antiorario.
- 3) Si calcoli l'integrale lungo la curva del punto il cui sostegno è dato dalla equazione $(x^2 + y^2)^{3/2} + 2y^2 = 2x^2$ e percorsa in senso antiorario.
- 4) Sia D lo spazio compreso fra il quadrato Q_1 di centro l'origine e lato 4 e il quadrato Q_2 di centro $(1, 0)$ e lato $3/2$. Si calcoli $\oint_{\partial^+ D} \omega$
- 5) Si calcoli $\int_{\underline{\gamma}} \omega$ dove $\underline{\gamma}$ è la curva, percorsa in senso antiorario e composta solo da tratti paralleli ad uno degli assi, che connette in ordine i quattro punti $(4, 0)$, $(4, 2)$, $(-4, 2)$, $(-4, 0)$.

Le risposte vanno adeguatamente dimostrate. Per "adeguatamente" si intende che si può omettere solo ciò che sta sulle dispense di Tauraso oppure sul "Giornale delle lezioni". Tutto il resto va scritto chiaramente. Scrivere solo cose sensate in quanto *il punteggio va da +2 a -2*.

La consegna deve avvenire giovedì 05/05/2016 alle ore 17.30 (dopo la lezione). Alternativamente entro le ore 14.00 di venerdì 06/05 si può lasciare l'elaborato nella mia buca delle lettere presso il Dipartimento di Matematica (zona Sogene; percorrere il corridoio alle spalle di "Focal Point" ed alla fine, dopo 15 metri circa, sulla destra ci sono le buche delle lettere. La mia è situata nella colonna più distante dalla porta di ingresso). Se l'elaborato è composto da più fogli staccati, questi ultimi debbono essere riuniti (usare attach, grappette o cartelline). In ogni caso su ciascun foglio ci sia nome, cognome e matricola. Non si consegnino elaborati composti da più fogli sparsi. La consegna di venerdì comporta una diminuzione dell'eventuale punteggio positivo del 20%.

Svolgimento

- 1) Dominio: $\{\underline{x} \in \mathbf{R} : \underline{x} \neq (1, 1), (-1, -1)\}$. Detta $\omega = a(\underline{x})dx + b(\underline{x})dy$, la forma differenziale, osserviamo che

$$a(\underline{x}) = \frac{2(-y^2 - 2yx + 2 + x^2)}{(y^2 - 2y + 2 + x^2 - 2x)(y^2 + 2y + 2 + x^2 + 2x)}dx = \\ = \left(\frac{-(y-1)}{(x-1)^2 + (y-1)^2} + \frac{(y+1)}{(x+1)^2 + (y+1)^2} \right) dx$$

e che

$$b(\underline{x}) = \frac{2(2yx + x^2 - y^2 - 2)}{(y^2 - 2y + 2 + x^2 - 2x)(y^2 + 2y + 2 + x^2 + 2x)}dy = \\ = \left(\frac{x-1}{(x-1)^2 + (y-1)^2} - \frac{(x+1)}{(x+1)^2 + (y+1)^2} \right) dy$$

per cui

$$\omega = \frac{-(y-1)dx + (x-1)dy}{(x-1)^2 + (y-1)^2} + \frac{(y+1)dx - (x+1)dy}{(x+1)^2 + (y+1)^2} = \quad (1)$$

che possiamo riscrivere come

$$\omega = - \left[dx \frac{\partial}{\partial x} + dy \frac{\partial}{\partial y} \right] \arctan \frac{x-1}{y-1} + \left[dx \frac{\partial}{\partial x} + dy \frac{\partial}{\partial y} \right] \arctan \frac{x+1}{y+1} dx \doteq \omega_1 + \omega_2$$

Quindi la forma è chiusa.

2)

Sia $\underline{\gamma}$ la curva in questione. Introducendo coordinate polari (ellittiche) centrate nell'origine, $x = r \cos t$, $y = r \sin t$ si ottiene che la curva diventa $r(t) = 2 \cos 2t$ e quindi $-\pi/4 \leq t \leq \pi/4$ se voglio stare nel primo e quarto quadrante. Dunque il sostegno della curva è (si veda pagina 4 del *giornale delle lezioni*).

$$x = 2 \cos(2t) \cos t, \quad y = 2 \cos(2t) \sin t$$

La funzione $r(t)$ è concava e per $t = 0$ vale 2. Il punto $(1, 1)$ in coordinate polari-ellittiche (r, t) corrisponde a $r = 1/\sqrt{2}$, $t = \pi/4$. Ne segue che esso si trova fuori dalla curva.

Si poteva pure ragionare nel seguente modo. L'interno della curva è dato da $(x^2 + y^2)^{3/2} + 2y^2 \leq 2x^2$ e quindi, sostituendo $(1, 1)$ si dovrebbe avere $2^{3/2} + 2 \leq 2$ che è falsa.

La curva giace in un semplicemente connesso e quindi l'integrale è nullo.

3) Dovrebbe essere chiaro che l'integrale della nuova curva, detta $\underline{\gamma}_1$, è zero. Stavolta $-\pi/4 \leq t \leq \pi/4$ e $3\pi/4 \leq t \leq 5\pi/4$ e di nuovo, la curva non racchiude né $(-1, -1)$, né $(1, 1)$ da cui l'integrale è zero.

4)

Sia $\underline{\gamma}$ il bordo del quadrato Q_1 percorso in senso antiorario. L'integrale della forma omega è zero. Infatti

$$\oint_{\underline{\gamma}} \omega_1 = 2\pi$$

Per mostrare ciò prendiamo la circonferenza, detta C^+ , $x = 1 + \varepsilon \cos t$, $y = 1 + \varepsilon \sin t$ con ε tale che la circonferenza stia dentro il quadrato grande. La forma ω_1 è chiusa e quindi

$$\oint_{\underline{\gamma}} \omega_1 = \oint_{C^+} \omega_1 = 2\pi. \text{ Per le stesse ragioni}$$

$$\oint_{\underline{\gamma}} \omega_2 = -2\pi$$

Il bordo del quadrato Q_2 è percorso in senso orario, lo identifichiamo con ∂Q_2 , ed abbiamo

$$\oint_{\partial Q_2} \omega_1 = 0, \quad \oint_{\partial Q_2} \omega_2 = 0$$

in quanto i punti $(-1, -1)$ e $(1, 1)$ stanno fuori del quadrato per cui il risultato è 0.

5)

Si tratta di un rettangolo al quale manca il tratto orizzontale fra i punti $(-4, 0)$ e $(4, 0)$ percorso nel verso crescente. Certamente potremmo calcolare l'integrale della forma lungo i tre lati ma sconsiglio. Conviene osservare che, detta $\underline{\gamma}$ la curva il cui sostegno è dato dai tre lati desumibili dal testo e detta $\underline{\sigma}$ la curva il cui sostegno è la base, si ha

$$\oint_{\underline{\gamma} \cup \underline{\sigma}} \omega = 2\pi \implies \oint_{\underline{\gamma}} \omega = 2\pi - \oint_{\underline{\sigma}} \omega$$

per cui calcoliamo ora solo l'ultimo integrale. Parametizziamo in modo ascendente $x = t, y = 0, -4 \leq t \leq 4$ ed otteniamo

$$\int_{-4}^4 dt \frac{2t^2 - 4}{(t^2 - 2t + 2)(t^2 + 2t + 2)} = 2 \arctan 3 + 2 \arctan 5$$

si usino i fratti semplici. Il risultato è $2\pi - 2 \arctan 3 - 2 \arctan 5$.

Nel tentativo di individuare qualche punto della curva, qualcuno potrebbe aver pensato di porre $x = 0$ e di risolvere la equazione $(y^2)^{3/2} + 2y^2 = 0$ e quindi di scrivere $y^3 + 2y^2 = 0$ le cui soluzioni sono $y = 0$ e $y = -2$. Ciò è sbagliato in quanto la quantità $(y^2)^{3/2}$ essendo una radice quadrata non può che essere non negativa. Infatti si ha $(y^2)^{3/2} = (y^6)^{1/2} = |y|^3 \geq 0$. Si poteva pure operare $(y^2)^{3/2} = \left((y^2)^{\frac{1}{2}}\right)^3 = |y|^3$.

Rispondo ora alle domande 1)–5) nell'ipotesi in cui lo studente o studentessa non abbia notato la decomposizione in (1) e men che meno la formula dopo. In tal caso la forma ω viene vista come un tutt'uno. Alcuni hanno infatti verificato la chiusura della forma differenziale ma non la decomposizione. Altri non hanno neppure verificato la chiusura pregiudicandosi di fatto la possibilità di rispondere alle domande 2) e 3) data la parametrizzazione delle curve ("Lemniscata di Bernoulli")

1)

Semplicemente si eseguono le derivate miste e si constata la chiusura (calcolo laborioso).

2)

Non c'è nulla da dire rispetto a quanto già detto nella precedente soluzione.

Risposta alla domanda 2) senza avere notato la chiusura della forma (e quindi la esattezza)

L'integrale da risolvere è

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} -2 \frac{34 \cos^3 t + 16 \cos^7 t - 40 \cos^5 t - 11 \cos t + \sin t + 16 \cos^6 t \sin t - 8 \cos^4 t \sin t + 2 \sin t \cos^2 t}{5 - 32 \sin t \cos^5 t + 32 \sin t \cos^3 t - 8 \sin t \cos t + 64 \cos^8 t - 128 \cos^6 t + 96 \cos^4 t - 32 \cos^2 t} dt$$

Non molto amichevole come integrale!

Fine della risposta alla domanda 2) senza avere notato la chiusura della forma (e quindi la esattezza)

3)

Stessa cosa

4)

Per calcolare l'integrale lungo il quadrato esterno usiamo il lemma di Gauss–Green ed eseguiamo l'integrale sulla curva $x = r \cos t, y = r \sin t, 0 \leq t \leq 2\pi$. Il raggio r deve essere abbastanza

grande da contenere i punti $(-1, -1)$ e $(1, 1)$.

$$\begin{aligned} & 2(-y^2 - 2yx + 2 + x^2)dx + 2(2yx + x^2 - y^2 - 2)dy = \\ & = 2r^3(-S^2 - 2SC + 2 + C^2)(-S) + (2CS + C^2 - S^2 - 2)C = 2r^3(C^2S + CS^2 + C^3 + S^3) = \\ & = 2r^3(S^2(C + S) + C^2(C + S)) = 2r^3(C + S) \end{aligned}$$

$$(y^2 - 2y + 2 + x^2 - 2x)(y^2 + 2y + 2 + x^2 + 2x) = (r^2 + 2)^2 - 4r^2(1 + CS)$$

e

$$\int_0^{2\pi} \frac{2r^3(\cos t + \sin t)}{(r^2 + 2)^2 - 4r^2(1 + \cos t \sin t)} dt = 0$$

(verificare).

Il quadrato Q_2 non contiene né $(1, 1)$ né $(-1, -1)$ e quindi $\oint_{\partial Q_2} \omega = 0$ e quindi il risultato è 0.

Integrale lungo il quadrato grande

Lato orizzontale basso.

$$\int_{-2}^2 \frac{2(-2 + 4t + t^2)}{(10 + t^2 - 2t)(2 + t^2 + 2t)} dt = \arctan \frac{1}{3} - \arctan 3$$

Lato verticale destro

$$\int_{-2}^2 \frac{-2(-4t - 2 + t^2)}{(t^2 - 2t + 2)(t^2 + 2t + 10)} dt = \arctan 3 - \arctan \frac{1}{3}$$

Lato orizzontale alto

$$\int_{-2}^2 \frac{-2(-2 + 4t + t^2)}{(10 + t^2 - 2t)(2 + t^2 + 2t)} dt = \arctan 3 - \arctan \frac{1}{3}$$

Lato vertical sinistro

$$\int_{-2}^2 \frac{2(-2 - 4t + t^2)}{(10 + t^2 + 2t)(2 + t^2 - 2t)} dt = \arctan \frac{1}{3} - \arctan 3$$

e la somma è zero.

Fine dell'integrale lungo il quadrato grande

Integrale lungo il quadrato piccolo

Lato orizzontale basso.

$$\int_{1/4}^{7/4} \frac{32(23 + 24t + 16t^2)}{(65 + 16t^2 - 32t)(17 + 16t^2 + 32t)} dt = 2 \arctan\left(\frac{3}{7}\right) + \arctan(11) - \arctan 5$$

Lato verticale destro

$$\int_{-3/4}^{3/4} \frac{-32(-17 - 56t + 16t^2)}{(25 + 16t^2 - 32t)(137 + 16t^2 + 32t)} dt = -\arctan \frac{1}{3} - \arctan \frac{7}{11} + \arctan \frac{7}{3} + \arctan \frac{1}{11}$$

Lato orizzontale alto

$$\int_{-7/4}^{-1/4} \frac{-32(23 + 24t + 16t^2)}{(17 + 16t^2 + 32t)(65 + 16t^2 - 32t)} dt = \arctan \frac{5}{7} - 2 \arctan 3 - \arctan \frac{11}{7}$$

Lato vertical sinistro

$$\int_{-3/4}^{3/4} \frac{32(31 + 8t + 16t^2)}{(25 + 16t^2 + 32t)(41 + 16t^2 - 32t)} dt = \arctan \frac{7}{3} - \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{3} + \arctan \frac{7}{5}$$

e la somma è zero Si usi ripetutamente $\arctan x + \arctan 1/x = \pi x/|x|$

Fine dell'integrale lungo il quadrato piccolo

5)

Come nella soluzione precedente

Integrale lungo i tre segmenti (per chi non ha utilizzato od osservato la chiusura della forma)

Lato verticale destro

$$\int_0^2 \frac{-2(-8t - 14 + t^2)}{(t^2 - 2t + 10)(t^2 + 2t + 26)} dt = 2 \arctan \frac{1}{3} - \arctan \frac{3}{5} + \arctan \frac{1}{5}$$

Lato orizzontale alto

$$\int_{-4}^4 \frac{-2(-2 + 4t + t^2)}{(2 + t^2 + 2t)(t^2 - 2t + 10)} dt = \arctan 5 - \frac{\pi}{4} + \arctan 3 - \arctan \frac{5}{3}$$

Lato vertical sinistro

$$\int_{-2}^0 \frac{2(-8t - 14 + t^2)}{(t^2 - 2t + 10)(t^2 + 2t + 26)} dt = \arctan \frac{1}{3} + 2 \arctan \frac{1}{5} - \frac{\pi}{4}$$

e la somma è $2\pi - 2 \arctan 3 - 2 \arctan 5$. Si usi ripetutamente $\arctan x + \arctan 1/x = \pi x/|x|$

Fine dell'integrale lungo i tre segmenti (per chi non ha utilizzato od osservato la chiusura della forma)
