Problema 1. da "Putnam Competition" 2006, problema A1 (vedi http://kskedlaya.org/putnam-archive/)

Prima soluzione Abbiamo $x^2+y^2+z^2+8\leq 6\sqrt{x^2+y^2}$ e quindi siamo in presenza di una superficie di rotazione (se (x,y) cambia ma x^2+y^2 è costante, la disuguaglianza continua a valere). Detto $r=\sqrt{x^2+y^2}$, si ha $z^2\leq 6r-8-r^2=1-(3-r)^2$ ossia $-\sqrt{1-(3-r)^2}\leq z\leq \sqrt{1-(3-u)^2}$ ed inoltre otteniamo $1-(3-r)^2\geq 0$ ossia $2\leq r\leq 4$. Se quindi passiamo a variabili cilindriche (r,t,z) abbiamo $2\leq r\leq 4$, $0\leq t\leq 2\pi$, $-\sqrt{1-(3-r)^2}\leq z\leq \sqrt{1-(3-u)^2}$ ed il cambio di coordinate è $x=r\cos t$, $y=r\sin t$, $z=v$. Lo iacobiano è r.

Ne segue che l'integrale è

$$\int_0^{2\pi}dt\int_2^4 drr\int_{-\sqrt{(1-(3-r)^2)}}^{\sqrt{1-(3-r)^2}}dv=\int_0^{2\pi}\int_2^4 2r\sqrt{1-(3-r)^2}dr=4\pi\int_2^4 r\sqrt{6r-8-r^2}dr$$

ossia, a parte 4π

$$\int_2^4 r\sqrt{6r-8-r^2}dr=-\frac{1}{2}\int_2^4(-2r+6)\sqrt{6r-8-r^2}dr+3\int_2^4\sqrt{6r-8-r^2}dr=$$
$$=-\frac{1}{2}(6r-8-r^2)^{\frac{3}{2}}\frac{2}{3}\Big|_2^4+3\int_2^4\sqrt{6r-8-r^2}dr=3\int_2^4\sqrt{6r-8-r^2}dr$$

$$\int\sqrt{(x-a)(b-x)}dx=\frac{1}{4}(b-a)|b-a|\arctan\sqrt{\frac{x-a}{b-x}}+\frac{1}{4}\frac{|b-a|}{b-a}\sqrt{(x-a)(b-x)}(2x-b-a)$$

per cui con $a=2$, $b=4$ si ha

$$\frac{1}{4}(b-a)|b-a|\arctan\sqrt{\frac{x-a}{b-x}}\Big|_2^4=\frac{\pi}{2}$$

e

$$\frac{1}{4}\frac{|b-a|}{b-a}\sqrt{(x-a)(b-x)}(2x-b-a)\Big|_2^4=0$$

da cui il risultato $4\pi\cdot 3\cdot\pi/2=6\pi^2$.

Calcolo dell'integrale $\mathcal{I}(\sqrt{(x-a)(b-x)}$ Con la sostituzione $\sqrt{\frac{x-a}{b-x}}=t$, $x=\frac{bt^2+a}{1+t^2}$, $dx=\frac{2(b-a)t}{(1+t^2)^2}$
$\sqrt{(x-a)(b-x)}=\frac{|b-a|t}{1+t^2}$ e l'integrale diventa $2(b-a)|b-a|\int\frac{t^2}{(1+t^2)^3}dt$. L'integrale è dato da $-\frac{t}{4(1+t^2)^2}+\frac{1}{4}\int\frac{dt}{(1+t^2)^2}$. Ora $\int\frac{dt}{1+t^2}=\frac{t}{1+t^2}+2\int\frac{dtt^2}{(1+t^2)^2}=\frac{t}{1+t^2}+2\int\frac{dt}{1+t^2}-2\int\frac{dt}{(1+t^2)^2}$ e quindi $\int\frac{dt}{(1+t^2)^2}=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{1+t^2}+\frac{1}{2}\frac{t}{1+t^2}$. Alla fine abbiamo ottenuto $\int\frac{t^2}{(1+t^2)^3}dt=-\frac{t}{4(1+t^2)^2}+\frac{1}{8}\arctan t+\frac{1}{8}\frac{t}{1+t^2}$. Sostituendo le varie grandezze si ottiene $\frac{1}{4}(b-a)|b-a|\arctan\sqrt{\frac{x-a}{b-x}}+\frac{1}{4}\frac{|b-a|}{b-a}\sqrt{(x-a)(b-x)}(2x-b-a)+C$ che è anche uguale a $\frac{1}{8}(b-a)|b-a|\arcsin\frac{2x-b-a}{b-a}+\frac{1}{4}\sqrt{(x-a)(b-x)}(2x-b-a)+C$.

Se rimettiamo dentro il 12π lasciato prima e tenendo conto che $a=2$, $b=4$, l'integrale che abbiamo calcolato è

$$12\pi 2(b-a)|b-a|\int\frac{t^2}{(1+t^2)^3}dt$$

Abbiamo trovato la primitiva in t e poi l'abbiamo "riconvertita" in x. Avremmo potuto anche scrivere

$$12\pi 2(b-a)|b-a|\int_0^{+\infty}\frac{t^2}{(1+t^2)^3}dt = 96\pi\int_0^{+\infty}\frac{t^2}{(1+t^2)^3}dt = \frac{96\pi^2}{16} = 6\pi^2$$

Ci saremmo risparmiati la "riconversione". Gli integrali in t sono presenti nel calcolo.

Seconda soluzione Usiamo coordinate sferiche $x = r\sin\vartheta\cos\varphi$, $y = r\sin\vartheta\sin\varphi$, $x = r\cos\vartheta$. $x^2+y^2+z^2+8 \le 6\sqrt{x^2+y^2}$ diventa $r^2+8 \le 6r\sin\vartheta$ ossia $\sin\vartheta \ge /(r^2+8)/(6r)$. Il valore massimo di $\sin\vartheta$ è $+1$ e l'equazione $(r^2+8) \le (6r)$ dà $2 \le r \le 4$. In generale $\sin\vartheta \ge /(r^2+8)/(6r)$ dà $\arcsin\dfrac{r^2+8}{6r} \le \vartheta \le \pi - \arcsin\dfrac{r^2+8}{6r}$. Il volume che cerchiamo è quindi

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_2^4 dr \int_{\arcsin\frac{r^2+8}{6r}}^{\pi-\arcsin\frac{r^2+8}{6r}} d\vartheta\, r^2\sin\vartheta = 2\pi\int_2^4 dr\, r^2\cos\vartheta\Big|_{\pi-\arcsin\frac{r^2+8}{6r}}^{\arcsin\frac{r^2+8}{6r}} =$$

$$= 4\pi\int_2^4 dr\, r^2\cos\left(\arcsin\frac{r^2+8}{6r}\right) = 4\pi\int_2^4 dr\, r^2\sqrt{1-\frac{(r^2+8)^2}{36r^2}} =$$

$$= \frac{4\pi}{6}\int_2^4 r\sqrt{-r^4+20r^2-64}$$

La sostituzione $y^2 = \dfrac{r^2-16}{4-r^2}$ trasforma l'integrale in

$$144\int_0^{\infty}\frac{y^2}{(1+y^2)^3}dy = 144\frac{\pi}{16} = 9\pi$$

Il risultato è quindi $6\pi^2$.

Problema 1. Terza soluzione (presa da uno dei compiti ed usata da diversi studenti; *la più elegante*).

La relazione $x^2+y^2+z^2+8 \le 6\sqrt{x^2+y^2}$ può essere scritta come $(R-\sqrt{x^2+y^2}))^2+z^2 \le r^2$ e quindi, confrontando le due relazioni si perviene a $r=1$, $R=3$. L'equazione $(R-\sqrt{x^2+y^2}))^2 + z^2 = r^2$ rappresenta un toro (ciambella) https://it.wikipedia.org/wiki/Toro_(geometria) ed è una superficie di rivoluzione intorno all'asse z come si evince osservando che se il punto (x_1,y_1,z_1) appartiene al toro, anche il punto (x,y,z), se $x_1^2+y_1^2 = x^2+y^2$ e $z=z_1$. La superficie si ottiene prendendo una circonferenza di raggio $r=1$ e facendola ruotare di 360 gradi mantenendo il centro della circonferenza sul piano (x,y) ad una distanza $R=3$ dall'origine degli assi (una ciambella appunto). Il calcolo dell'area della superficie non necessita neppure dell'integrale ed è $\pi r^2\cdot 2\pi R = 6\pi^2$.

Per capire meglio la geometria del prblema, dopo avere osservato che è una superficie di rivoluzione intorno all'asse z, si può fissare $x=0$ e prendere $y>0$. Si ottiene $z^2+(R-y)^2 = r^2$ ed a questo punto dovrebbe essere chiaro riguardando la lezione sulle superfici di rivoluzione (o rotazione)

Problema 2. Prima soluzione

Calcoliamo il volume per strati. Fissato z, l'area dello strato è pari all'area di una figura planare definita da $y \ge z-x$ e $x^2+y^2 \le z^2$. e le cui intersezioni con gli assi (x,y) sono $(z,0)$ e $(0,z)$. L'area della figura è $\dfrac{\pi}{4}z^2 - \dfrac{z^2}{2}$ che integrata fra $z=0$ e $z=1$ dà $\dfrac{\pi}{12} - \dfrac{1}{6}$

Seconda soluzione Certamente deve essere $x+y \geq 0$ per cui quadrando si ha $\sqrt{x^2+y^2} \leq x+y$ se e solo se $xy \geq 0$. Siccome anche $x+y \geq 0$, ne segue che $x, y \geq 0$ e quindi siamo nel primo quadrante sul piano (x, y).
La proiezione sul piano (x, y) dell'insieme $\sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq x+y$, $0 \leq z \leq 1$ è data dall'unione dei sue insiemi $V_1 = \{\underline{x} \in \mathbf{R}^3\colon x+y \leq 1,\ \sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq x+y$, e $V_2 = \{\underline{x} \in \mathbf{R}^3\colon x+y \geq 1, x^2+y^2 \leq 1, \sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 1$. Integriamo quindi per fili.

Se $\sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq x+y$ l'integrale della relativa parte di volume è

$$V_1 = \int\int_{x+y\leq 1} dxdy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{x+y} dz$$

Usiamo coordinate polari per cui $x+y=1$ diventa $\rho = 1/(\cos t + \sin t)$ e qundi

$$V_1 = \int_0^{\pi/2} dt \int_0^{\frac{1}{\cos t+\sin t}} d\rho\rho(\rho\cos t + \rho\sin t - \rho) = \int_0^{\pi/2} dt(\cos t + \sin t - 1)\frac{1}{3}\frac{1}{(\cos t+\sin t)^3}$$

Se $\sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 1$ allora abbiamo

$$V_2 = \int\int_{x+y\geq 1, x^2+y^2\leq 1} dxdy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1} dz = \int_0^{\pi/2} dt \int_{\frac{1}{\cos t+\sin t}}^{1} d\rho\rho(1-\rho) =$$
$$\int_0^{\pi/2} dt\Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{1}{(\cos t+\sin t)^2} + \frac{1}{3}\frac{1}{(\cos t+\sin t)^3} - \frac{1}{3}\Big) =$$

$$V_1 + V_2 = \frac{\pi}{12} - \frac{1}{6}\int_0^{\pi/2} \frac{1}{(\cos t+\sin t)^2} = \frac{\pi}{12} - \frac{1}{6}\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+\sin(2t)}dt =$$
$$= \frac{\pi}{12} - \frac{1}{12}\int_0^{\pi} \frac{1}{1+\sin x}dx = \frac{\pi}{12} - \frac{1}{6}$$

Problema 3. (da https://www.math.purdue.edu/pow/fall2013/pdf/problem3.pdf)
Prima soluzione Detta $\rho(\underline{x}, b)$ la distanza di un punto di un punto dalla bisettrice $y = x$, detta b, il volume è $2\pi \int\int_{0\leq x\leq 1, 3^x-x-1\leq y\leq x} \rho(\underline{x}, b)dx\,dy = 2\pi \int_0^1 dx \int_{3^x-x-1}^{x} \rho(\underline{x}, b)dy$. La distanza $\rho(\underline{x}, b)$ è pari a $\sqrt{2}(x-y)/2$ da cui $V = \frac{2\pi}{\sqrt{2}}\int_0^1 dx \int_{3^x-x-1}^{x}(x-y)dy$ e svolgendo i calcoli si arriva a $\frac{\pi}{3\sqrt{2}}\frac{13\ln^2 3 + 24 - 36\ln 3}{\ln^2 3}$. Questo tipo di integrazione lo possiamo identificare come "per fili" in quanto "si sommano" le lunghezze delle circonferenze generate dai punti di D intorno alla bisettrice.

Per convincersi del fatto che $\rho(\underline{x}, b)$ è pari a $\sqrt{2}(x-y)/2$, si disegni la bisettrice e poi da un punto $P \equiv (x, y)$ ad esempio con $x > y$, si disegni la perpendicolare alla bisettrice e si chiami P_1 il piede della perpendicolare. Poi si conduca la parallela all'asse x da P fino ad incontrare in P_2 la bisettrice. La lunghezza di PP_2 è $x-y$ ed il triangolo P, P_1, P_2 è rettangolo isoscele......

Seconda soluzione Un altro modo di procedere è il seguente, per "strati". Sia S_c l'area della sezione circolare ottenuta intersecando R con il piano in $\mathbf{R}^3$ di equazione $x+y = c$, $0 \leq c \leq 2$. Sia inoltre s la coordinata che corre lungo la bisettrice tra il punto $(0, 0)$ ed il punto $(1, 1)$. Il volume che stiamo cercando è $\int_0^{\sqrt{2}} S_c\,ds = \int_0^2 S_c \frac{dc}{\sqrt{2}}$ in quanto $s = c/\sqrt{2}$. Il punto $C = (c/2, c/2, 0)$

appartiene ad ambedue le linee $y = x$, and $y = -x + c$ e l'intersezione fra $y = -x + c$ e $y = 3^x - x - 1$ ha coordinata $(\ln_3(1+c), c - \ln_3(1+c))$. La rotazione intorno alla bisettrice fa si che l'area di S_c sia

$$\pi \left[\left(\frac{c}{2} - \log_3(1+c) \right)^2 + \left(\frac{c}{2} - c + \log_3(1+c) \right)^2 \right] = 2\pi \left(\frac{c}{2} - c + \log_3(1+c) \right)^2$$

Semplici integrazioni danno

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^2 S_c \, dc = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^2 2\pi \left(\frac{c^2}{4} + \log_3^2(1+c) - c \log_3(1+c) \right) dc = \frac{\pi}{3\sqrt{2}} \frac{13 \ln^2 3 + 24 - 36 \ln 3}{\ln^2 3}$$

Terza soluzione Consultare https://www.math.purdue.edu/pow/fall2013/pdf/problem3.pdf