Appello analisi II, Ingegneria informatica (frontale e online)
08–07–2016, A.A.2015-2016, (A)

Nome(stampatello) **Cognome**(stampatello) **matricola**

1) (6–punti) Sia $D=\{(y,z)\in\mathbf{R}^2\colon 0\le y\le 1, y^2\le z\le y\}$. Sia V_y l'insieme ottenuto ruotando D di 360^0 gradi intorno all'asse z e sia S la superficie laterale di V_y. Si calcoli l'area di S.

Risposta Sia $D_1=\{(y,z)\in\mathbf{R}^2\colon 0\le y\le 1, z=y^2\}$ e $D_2=\{(y,z)\in\mathbf{R}^2\colon 0\le y\le 1, z=y\}$. L'area che cerchiamo è (si veda pag.12 del "Giornale delle lezioni")

$$2\pi\int_{D_1} yds+2\pi\int_{D_2} yds=2\pi\int_0^1 t\sqrt{1+4t^2}dt+2\pi\int_0^1 t\sqrt{1+1}dt=2\pi\left(\frac{5\sqrt5-1}{12}+\frac{\sqrt2}{2}\right)$$

• Si poteva pure procedere nel seguenye modo. La funzione $z=y^2$, una volta ruotata diventa la funzione $z=x^2+y^2$ e $x^2+y^2\le 1$. L'area che cerchiamo è

$$\int\int_{x^2+y^2\le1}\sqrt{1+4x^2+4y^2}dx\,dy=\int_0^1 drr\int_0^{2\pi}dt\sqrt{1+4r^2}=2\pi\int_0^1 drr\sqrt{1+4r^2}$$

ed abbiamo ottenuto lo stesso identico integrale di prima. La stessa cosa accade con il piano $z=y$ che diventa $z=\sqrt{x^2+y^2}$

2) (6–punti) Sia V_z l'insieme ottenuto ruotando D di 360^0 gradi intorno all'asse y. Si calcoli il volume di V_y definito sopra e V_z.

$$|V_y|=2\pi\int\int_D ydydz=2\pi\int_0^1 ydy\int_{y^2}^y dz=2\pi\int_0^1(y^2-y^3)=\frac{\pi}{6}$$

$$|V_z|=2\pi\int\int_D zdydz=2\pi\int_0^1 dy\int_{y^2}^y zdz=2\pi\int_0^1\frac12(y^2-y^4)dy=\pi\frac{2}{15}$$

(si veda pag.6 del "Giornale delle lezioni").

• Anche qui, per quanto riguarda V_y, si può partire dalle funzioni $z=x^2+y^2$ e $z=\sqrt{x^2+y^2}$ e calcolare i volumi. Si possono seguire due direzioni.

Integrazione per fili

$$\int\int_{x^2+y^2\le1}dx\,dy\int_0^{\sqrt{x^2+y^2}}dz-\int\int_{x^2+y^2\le1}dx\,dy\int_0^{x^2+y^2}dz=\int_0^1 drr\int_0^{2\pi}dt(r-r^2)=|V_y|$$

Per quanto riguarda V_z, le due funzioni che ci interessano sono $y=\sqrt{z^2+x^2}$ e $y=(z^2+x^2)^{\frac14}$. Abbiamo

$$\int\int_{z^2+x^2\le1}dz\,dx\int_0^{(z^2+x^2)^{\frac14}}dy-\int\int_{z^2+x^2\le1}dz\,dx\int_0^{\sqrt{z^2+x^2}}dy=$$
$$=\int_0^1 drr\int_0^{2\pi}dt(r^{\frac12}-r)=2\pi(\frac25-\frac13)=\frac{2}{15}\pi=|V_z|$$

Integrazione per strati

Tagliamo le funzioni $z=\sqrt{x^2+y^2}$ e $z=x^2+y^2$ con un piano orizzontale ed integriamo sulla quota del piano. Sia D_z l'area della figura trovata con il taglio

$$|V_y|=\int_0^1 |D_z|dz=\int_0^1 dz\pi(z-z^2)=\frac{\pi}{6}$$

Per calcolare $|V_z|$ per strati, tagliamo V_z con un piano ortogonale all'asse y e sia D_y la figura trovata. L'area di D_y è $\pi(y^2-y^4)$ e quindi l'integrale è

$$|V_z|=\pi\int_0^1 (y^2-y^4)dy=\pi\frac{2}{15}$$

Uso delle coordinate polari sferiche

Si poteva pure integrare in coordinate polari sferiche parametrizzando direttamente l'insieme di cui cerchiamo il volume.

Cominciamo con V_y. $x=r\sin\vartheta\cos\varphi$, $y=r\sin\vartheta\sin\varphi$, $z=r\cos\vartheta$. Chiaramente $0\le\varphi\le 2\pi$ essendo il volume di rotazione. La condizione $x^2+y^2\le z\le\sqrt{x^2+y^2}$ ci dà

$$r^2\sin^2\vartheta\le r\cos\vartheta\le r|\sin\vartheta|,$$

Il fatto che $z\ge 0$ implica $0\le\vartheta\le\pi/2$. A destra abbiamo $\cos\vartheta\le|\sin\vartheta|$ ossia $\pi/4\le\vartheta\le\pi/2$. La parte sinistra produce $r\le\cos\vartheta/\sin^2\vartheta$. Il volume che cerchiamo è

$$|V_y|=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}d\vartheta\int_0^{\frac{\cos\vartheta}{\sin^2\vartheta}}r^2\sin\vartheta dr=2\pi\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\sin\vartheta\frac{1}{3}\frac{\cos^3\vartheta}{\sin^6\vartheta}d\vartheta=$$
$$=\frac{2}{3}\pi\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{\cos\vartheta}{\sin^5\vartheta}-\frac{\cos\vartheta}{\sin^3\vartheta}\right]d\vartheta=\frac{2}{3}\pi\left[\frac{-1}{4\sin^4\vartheta}+\frac{1}{2\sin^2\vartheta}\right]\Bigg|_{\pi/4}^{\pi/2}=\frac{\pi}{6}$$

Passiamo ora a V_z. Una delle superfici di rotazione è $y=(z^2+x^2)^{\frac{1}{4}}$ e l'altra è $y=\sqrt{x^2+z^2}$. Le coordinate sono $z=r\sin\vartheta\cos\varphi$, $x=r\sin\vartheta\sin\varphi$, $y=r\cos\vartheta$, $0\le\vartheta\le\pi/2$ essendo $y\ge 0$. La z soddisfa alle relazioni

$$\sqrt{x^2+z^2}\le y\le(z^2+x^2)^{\frac{1}{4}}\quad\Longrightarrow\quad r|\sin\vartheta|\le r\cos\vartheta\le(r^2\sin^2\vartheta)^{\frac{1}{4}},$$

A destra otteniamo come prima $0\le\vartheta\le\pi/4$. A sinistra si ha $r\ge\sin\vartheta/\cos^2\vartheta$. Abbiamo

$$|V_z|=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\vartheta\int_0^{\frac{\sin\vartheta}{\cos^2\vartheta}}r^2\sin\vartheta dr=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\vartheta\frac{1}{3}\frac{\sin^3\vartheta}{\cos^6\vartheta}d\vartheta=\frac{2}{3}\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{5}\left((\tan\vartheta)^5\right)'d\vartheta=$$
$$=\frac{2}{3}\pi\frac{1}{5}$$

Uso delle coordinate clindriche In tal caso $x=r\cos\vartheta$, $y=r\sin\vartheta$, $z=u$, e lascio agli studenti tale facile calcolo.

3) (6–punti) Si calcoli l'integrale $\oint_{|z|=2}\frac{z^3}{\mathrm{Re}(z^2)+5}dz$ (la circonferenza percorsa in senso antiorario).

Ponendo $z=2e^{it}$ e poi $w=e^{it}$ l'integrale diventa

$$\int_0^{2\pi}\frac{16ie^{4it}}{4\cos(2t)+5}dt=\oint_{|w|=1}\frac{16w^5}{2w^4+5w^2+2}dw=\frac{1}{2}\oint_{|w|=1}\frac{16w^5}{(w^2+2)(w-\frac{i}{\sqrt{2}})(w+\frac{i}{\sqrt{2}})}dw=$$

$$=32\pi i\frac{1}{2}\left(\frac{(\frac{i}{\sqrt{2}})^5}{2(2-\frac{1}{2})\frac{2i}{\sqrt{2}}}+\frac{(\frac{-i}{\sqrt{2}})^5}{2(2-\frac{1}{2})\frac{-2i}{\sqrt{2}}}\right)=\frac{8}{3}\pi i$$

4) (6–punti) Si risolva l'equazione differenziale $x''(t)+x(t)=F(t)$, $x(0)=1$, $x'(0)=0$. $F(t)$ è il prodotto di convoluzione $\displaystyle\int_0^t f(x-t)g(x)dx$ e $f(t)=H(t-1)$, $g(t)=H(t-3)$.

Dobbiamo scrivere

$$\mathcal{L}\left[x''(t)+x(t)\right]=\mathcal{L}(F)\quad\Longleftrightarrow\quad p^2X(p)-p+X(p)=\frac{e^{-p}}{p}\frac{e^{-3p}}{p}$$

Notare che a noi non interessa sapere quanto vale $F(t)$ ma la sua trasformata di Laplace. Quindi

$$X(p)=\frac{p}{p^2+1}+\frac{e^{-4p}}{p^2(p^2+1)}\quad\Longrightarrow\quad x(t)=\sum\mathrm{Res}\left(\frac{pe^{pt}}{p^2+1}+H(t-4)\frac{e^{pt}e^{-4p}}{p^2(p^2+1)}\right)$$

da cui

$$x(t)=\cos t+H(t-4)\left((t-4)-\sin(t-4)\right)$$

$$x'(t)=-\sin t+\delta(t-4)((t-4)-\sin(t-4))+H(t-4)(1-\cos(t-4))=-\sin t+H(t-4)(1-\cos(t-4))$$

$$x(2)=\cos 2,\ x'(2)=-\sin 2,\quad x'(4^-)=-\sin 4,\quad x'(4^+)=-\sin 4$$

5) (6–punti) Sia $D=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2\colon 0\le x\le 1, y=e^{x-1}\}$. Si parametrizzi D tramite una curva detta $\underline{\gamma}$ e si calcoli $\displaystyle\int_{\underline{\gamma}}\omega$ dove $\omega=\dfrac{4xy+2x^2y^2+1}{(1+xy)^2}dx+\dfrac{x^2}{(1+xy)^2}dy$

Si verifica che la forma è chiusa ed essendo definita per $xy\neq-1$, è anche esatta. Infatti la curva $\underline{\gamma}$ non interseca l'insieme $xy=-1$.

• Prima maniera. Essendo esatta cerchiamo la primitiva $F(x,y)$.

$$F_y=\frac{x^2}{(1+xy)^2}\quad\Longrightarrow\quad F(x,y)=\frac{-x}{1+xy}+h(x)\quad\Longrightarrow\quad F_x=\frac{-1}{(1+xy)^2}+h'(x)=\frac{4xy+2x^2y^2+1}{(1+xy)^2}$$

quindi $h'(x)=2$ e $h(x)=2x$.

$$F(x,y)=\frac{-x}{1+xy}+2x=\frac{x^2y}{1+xy}+x\quad\Longrightarrow\quad\int_{\underline{\gamma}}\omega=F(1,1)-F(0,\frac{1}{e})=\frac{3}{2}$$

Si poteva pure scrivere

$$\omega=\left(2-\frac{1}{(1+xy)^2}\right)dx+\frac{x^2}{(1+xy)^2}dy=2dx+\left[\frac{-1}{(1+xy)^2}dx+\frac{x^2}{(1+xy)^2}dy\right]\doteq\omega_1+\omega_2$$

Chiaramente sia ω_1 che ω_2 sono esatte. La primitiva di ω_1 è x^2. Per la primitiva di ω_2 procediamo come sopra solo che stavolta verrà $h\equiv 0$.

• Seconda maniera. Non calcoliamo la primitiva. Dalla esattezza possiamo dire che l'integrale è lo stesso se partendo da $(0, 1/e)$ andiamo prima in $(0, 1)$ e poi in $(1, 1)$. Sul segmento orizzontale è $(t, 1/e), 0 \leq t \leq 1$ e abbiamo

$$\int_0^1 \frac{2\left(1+\frac{t}{e}\right)^2 - 1}{(1+\frac{t}{e})^2} dt = \int_0^1 \left(2 - \frac{1}{(1+\frac{t}{e})^2}\right) dt = 2 + \frac{e^2}{1+e} - e$$

Sul segmento verticale abbiamo $(1, t)$, $1/e \leq t \leq 1$.

$$\int_{1/e}^1 \frac{1}{(1+t)^2} dt = \frac{e}{1+e} - \frac{1}{2}$$

e sommando si ha $3/2$.

Appello analisi II, Ingegneria informatica (frontale e online)
22–06–2016, A.A.2015-2016, (B)

Nome(stampatello) **Cognome**(stampatello) **matricola**

1) (6–punti) Sia $D = \{(y,z) \in \mathbf{R}^2 \colon 0 \le y \le 2, y^2/2 \le z \le y$. Sia V_y l'insieme ottenuto ruotando D di 360^0 gradi intorno all'asse z e sia S la superficie laterale di V_y. Si calcoli l'area di S.

Sia $D_1 = \{(y,z) \in \mathbf{R}^2 \colon 0 \le y \le 2, z = y^2/2\}$ e $D_2 = \{(y,z) \in \mathbf{R}^2 \colon 0 \le y \le 2, z = y\}$. L'area che cerchiamo è

$$2\pi \int_{D_1} y ds + 2\pi \int_{D_2} y ds = 2\pi \int_0^2 y\sqrt{1+y^2} dt + 2\pi \int_0^2 y\sqrt{1+1} dt = 2\pi \left(\frac{5\sqrt{5}-1}{3} + 2\sqrt{2} \right)$$

• Vedi sopra per considerazioni alternative

2) (6–punti) Sia V_z l'insieme ottenuto ruotando D di 360^0 gradi intorno all'asse y. Si calcoli il volume di V_y definito sopra e V_z.

$$|V_y| = 2\pi \int\int_D y dy dz = 2\pi \int_0^2 y dy \int_{y^2/2}^y dz = 2\pi \int_0^2 (y^2 - \frac{y^3}{2}) = \frac{4\pi}{3}$$

$$|V_z| = 2\pi \int\int_D z dy dz = 2\pi \int_0^2 dy \int_{y^2/2}^y z dz = 2\pi \int_0^2 (\frac{y^2}{2} - \frac{y^4}{16}) dy = \pi \frac{16}{15}$$

(si veda pag.6 del "Giornale delle lezioni").

• Vedi sopra per considerazioni alternative

3) (6–punti) Si calcoli l'integrale $\displaystyle\oint_{|z|=4} \frac{z^3}{\mathrm{Re}(z^2) - 20} dz$ (la circonferenza percorsa in senso antiorario).

Ponendo $z = 4e^{it}$ e poi $w = e^{it}$ l'integrale diventa

$$\int_0^{2\pi} \frac{256ie^{4it}}{16\cos(2t) - 20} dt = \oint_{|w|=1} \frac{64w^5\, dw}{2w^4 - 5w^2 + 2} = \frac{1}{2} \oint_{|w|=1} \frac{64w^5\, dw}{(w^2-2)(w - \frac{1}{\sqrt{2}})(w + \frac{1}{\sqrt{2}})} =$$

$$= 64\pi i \left(\frac{(\frac{1}{\sqrt{2}})^5}{(\frac{1}{2} - 2)\frac{2}{\sqrt{2}}} + \frac{(\frac{-1}{\sqrt{2}})^5}{2(\frac{1}{2} - 2)\frac{-2}{\sqrt{2}}} \right) = -\frac{32}{3}\pi i$$

4) (6–punti) Si risolva l'equazione differenziale $x''(t) + x(t) = F(t)$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$. $F(t)$ è il prodotto di convoluzione $\displaystyle\int_0^t f(x-t)g(x)dx$ e $f(t) = H(t-2)$, $g(t) = H(t-4)$.

Dobbiamo scrivere

$$\mathcal{L}\left[x''(t)+x(t)\right]=\mathcal{L}(F) \iff p^2X(p)-p+X(p)=\frac{e^{-2p}}{p}\frac{e^{-4p}}{p}$$

Notare che a noi non interessa sapere quanto vale $F(t)$ ma la sua trasformata di Laplace. Quindi

$$X(p)=\frac{p}{p^2+1}+\frac{e^{-6p}}{p^2(p^2+1)} \implies x(t)=\sum \mathrm{Res}\left(\frac{pe^{pt}}{p^2+1}+H(t-6)\frac{e^{pt}e^{-4p}}{p^2(p^2+1)}\right)$$

da cui

$$x(t)=\cos t+H(t-6)\left((t-6)-\sin(t-6)\right)$$

$$x'(t)=-\sin t+\delta(t-6)((t-6)-\sin(t-6))+H(t-6)(1-\cos(t-6))=-\sin t+H(t-6)(1-\cos(t-6))$$

$$x(1)=\cos 1,\ x'(1)=-\sin 1,\quad x'(6^-)=-\sin 6,\quad x'(6^+)=-\sin 6$$

5) Sia $D=\{(x,y)\in \mathbf{R}^2 \colon 0\le x\le 1, y=e^{x-1}\}$. Si parametrizzi D tramite una curva detta $\underline{\gamma}$ e si calcoli calcoli $\int_{\underline{\gamma}}\omega$ dove $\omega=\dfrac{y^2+1+2xy+x^2y^2}{(1+xy)^2}dx+\dfrac{xy(2+xy)}{(1+xy)^2}dy$

Si verifica che la forma è chiusa ed essendo definita per $xy\neq -1$, è anche esatta. Infatti la curva $\underline{\gamma}$ non interseca l'insieme $xy=-1$.

• Prima maniera. Essendo esatta cerchiamo la primitiva $F(x,y)$.

$$F_x=1+\frac{y^2}{(1+xy)^2} \implies F(x,y)=x+\frac{-y}{1+xy}+h(y) \implies F_y=\frac{-1}{(1+xy)^2}+h'(y)=\frac{xy(2+xy)}{(1+xy)^2}$$

quindi $h'(y)=1$ e $h(y)=y$.

$$F(x,y)=x+\frac{-y}{1+xy}+y=\frac{xy^2}{1+xy}+x \implies \int_{\underline{\gamma}}\omega=F(1,1)-F(0,\frac{1}{e})=\frac{3}{2}$$

Si poteva pure procedere nel seguente modo. Scriviamo

$$\omega=dx+\frac{y^2}{(1+xy)^2}dx+dy-\frac{1}{(1+xy)^2}dy=(dx+dy)+\left[\frac{y^2}{(1+xy)^2}dx-\frac{1}{(1+xy)^2}dy\right]\doteq\omega_1+\omega_2$$

$dx+dy$ è chiaramente esatta e la primitiva è $F_1(x,y)=x+y$. Anche ω_2 è esatta e si procede come sopra solo che stavolta $h\equiv 0$.

• Seconda maniera. Non calcoliamo la primitiva. Dalla esattezza possiamo dire che l'integrale è lo stesso se partendo da $(0,1/e)$ andiamo prima in $(0,1)$ e poi in $(1,1)$. Sul segmento orizzontale è $(t,1/e), 0\le t\le 1$ e abbiamo

$$\int_0^1\left(1+\frac{1}{e^2}\frac{1}{(1+\frac{t}{e})^2}\right)dt=1+\frac{1}{e}-\frac{1}{1+e}$$

Sul segmento verticale abbiamo $(1,t)$, $1/e\le t\le 1$.

$$\int_{1/e}^1\left(\frac{t}{1+t}+\frac{t}{(1+t)^2}\right)dt=1-\frac{1}{e}-\frac{e}{1+e}+\frac{1}{2}$$

e sommando si ha $3/2$.