Appello analisi II, Ingegneria informatica (frontale e online)
10–09–2016, A.A.2015-2016, (A)

Nome(stampatello) **Cognome**(stampatello) **matricola**

1) (6–punti) Si valuti l'integrale doppio della funzione $f(x,y)=\sqrt{|y-x^2|}$ esteso al quadrato $[-1,1]\times[0,2]$

R. $\dfrac{5}{3}+\dfrac{\pi}{2}$

Abbiamo (si poteva pure integrare per parti e usare $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x$)

$$\begin{aligned}&\int_{-1}^{1}dx\int_0^{x^2}dy\sqrt{x^2-y}+\int_{-1}^{1}dx\int_{x^2}^{2}dy\sqrt{y-x^2}=\\&=\int_{-1}^{1}dx\frac{2}{3}(x^2-y)^{\frac{3}{2}}\Big|_{x^2}^{0}+\int_{-1}^{1}dx\frac{2}{3}(y-x^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_{x^2}^{2}=\\&\frac{2}{3}\int_{-1}^{1}dx|x|^3+\frac{2}{3}\int_{-1}^{1}(2-x^2)^{\frac{3}{2}}dx=\frac{4}{3}\int_0^1x^3dx+\frac{4}{3}\int_0^1(2-x^2)^{\frac{3}{2}}dx\end{aligned}$$

Nel secondo integrale poniamo $x=\sqrt{2}\sin t$ ed otteniamo

$$\begin{aligned}&\int_0^{\arcsin(1/\sqrt{2})}2^{\frac{3}{2}}\cos^3t\cdot\underbrace{\sqrt{2}\cos t dt}_{dx}=4\int_0^{\pi/4}\cos^2tdt-4\int_0^{\pi/4}\cos^2t\sin^2tdt=\\&=4\frac{t+\cos t\sin t}{2}\Big|_0^{\pi/4}-\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\sin^2ydy=2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right)-\frac{\pi}{8}=\frac{3}{8}\pi+1\end{aligned}$$

ed alla fine si ottiene

$$\frac{1}{3}+\frac{4}{3}\left(\frac{3}{8}\pi+1\right)=\frac{5}{3}+\frac{\pi}{2}$$

2) (6–punti) Sia V il volume definito da $V=\{\underline{x}\in\mathbf{R}^3\colon 0\le z\le x^2+2y^2, x^2+y^2\ge1, x^2+y^2/4\le1\}$. Si calcoli $|V|$

R. $\dfrac{15}{4}\pi$

$$\begin{aligned}&|V|=\int\int_{x^2+\frac{y^2}{4}\le1}(x^2+2y^2)dx\,dy-\int\int_{x^2+y^2\le1}(x^2+2y^2)dx\,dy=\\&=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\underbrace{2r}_{iacob.}(r^2\cos^2t+r^28\sin^2t)-\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\underbrace{r}_{iacob.}r^2(\cos^2t+2\sin^2t)=\frac{15}{4}\pi\end{aligned}$$

3) (6–punti) Per $p=5,6,7,8,9$ si calcoli l'integrale $\displaystyle\oint_Q\frac{z^p}{z(z^3-1)(z^2-4)}dz$ dove Q è il rettangolo che collega i punti $(3,-2)$, $(3,2)$, $(-3/2,2)$, $(-3/2,-2)$ e percorso in senso antiorario.

R.

L'unica radice del denominatore che rimane fuori dal rettangolo è quella a $z=-2$. Si possono seguire due strade. La prima è quella di applicare il teorema dei residui all'interno del rettangolo. Un'altra consiste nell'applicare il Teorema a pag.27 del "Giornale delle lezioni".

• **Teorema** *Sia* $f\colon \mathbf{C}\to\mathbf{C}$ *una funzione olomorfa tranne un numero finito di singolarità polari* $z_1,z_2,\ldots z_n$. *Allora* $\displaystyle\sum_{k=1}^n Resf(z_k)+Resf(\infty)=0$

$$\sum_{k=1}^n Resf(z_k)+Resf(\infty)=\sum_{\substack{radici\ dentro\\ il\ rettangolo}} Resf(z_k)+Resf(-2)+Resf(\infty)=0$$

per cui

$$\sum_{\substack{radici\ dentro\\ il\ rettangolo}} Resf(z_k)=-Resf(-2)-Resf(\infty)$$

$$Resf(-2)=\frac{(-2)^p}{-2(-8-1)(-4)}=\frac{(-1)^{p+1}2^{p-3}}{9}$$

Per avere $Resf(\infty)$ scriviamo

$$f(z)=\frac{z^{p-6}}{(1-\frac{1}{z^3})(1-\frac{4}{z^2})}=z^{p-6}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{z^{3k}}\sum_{q=0}^{+\infty}\frac{4^q}{z^{2q}}=\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{q=0}^{+\infty}4^q z^{p-6-3k-2q}$$

e cerchiamo il termine $1/z$. Se $p=5$ abbiamo $k=q=0$ da cui il coefficiente è 1 e quindi $Resf(\infty)=-1$. Se quindi $p=5$ abbiamo che l'integrale è pari a

$$p:=5\qquad \left(-\frac{4}{9}+1\right)2\pi i=\frac{10}{9}\pi i$$

Eseguiamo ora il calcolo tentato dalla totalità degli studenti ossia calcoliamo tutti i residui delle singolarità dentro il quadrato. $z^3-1=(z-1)(z^2+z+1)=(z-1)(z-e^{i\frac{2}{3}\pi})(z-e^{i\frac{4}{3}\pi})$ ed osserviamo che $z_2\doteq e^{i\frac{4}{3}\pi}=e^{-i\frac{2}{3}\pi}\doteq\overline{z}_1$ ossia è il complesso coniugato.

$$Resf(1)=\frac{-1}{9},\quad Resf(2)=\frac{4}{7},\quad Resf(z_1)=\frac{z_1^4}{(z_1-1)(z_1-z_2)(z_1^2-4)},$$
$$Resf(z_2)=\frac{z_2^4}{(z_2-1)(z_2-z_1)(z_2^2-4)}=\frac{\overline{z}_1^4}{(\overline{z}_1-1)(\overline{z}_1-\overline{z}_2)(\overline{z}_1^2-4)}=\overline{Resf(z_1)}$$

Quindi abbiamo

$$\left(-\frac{1}{9}+\frac{4}{7}+2Re\frac{z_1^4}{(z_1-1)(z_1-z_2)(z_1^2-4)}\right)2\pi i=\left(\frac{29}{63}+Re\frac{2z_1^3\cdot z_1}{(z_1-1)i\sqrt{3}(\frac{1}{z_1}-4)}\right)2\pi i=$$
$$=\left(\frac{29}{63}+\frac{1}{\sqrt{3}}Im\frac{2z_1^2}{(z_1-1)(1-4z_1)}\right)2\pi i$$

Calcoliamo ora

$$Im\frac{z_1^2}{(z_1-1)(1-4z_1)}=Im\frac{-1-i\sqrt{3}}{(-3+i\sqrt{3})(3-2i\sqrt{3})}=Im\frac{(1+i\sqrt{3})(3+i\sqrt{3})(3+2i\sqrt{3})}{21\cdot 12}=\frac{\sqrt{3}}{21}$$

per cui l'integrale diventa

$$\left(\frac{29}{63}+\frac{2}{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{3}}{21}\right)2\pi i=\frac{10}{9}\pi i$$

Come si vede, conviene l'altra strada.

Se $p=6$ $Resf(-2)=-8/9$, $\quad Resf(\infty)=0$ e quindi l'integrale è $\dfrac{16}{9}\pi i.$

Se $p=7$ $Resf(-2)=16/9$, $\quad Resf(\infty)=-4$ ($k=0$ e $q=1$). Il risultato è $\left(-\dfrac{16}{9}+4\right)2\pi i=\pi i\dfrac{40}{9}$

Se $p=8$ si ha $Resf(-2)=\dfrac{-32}{9}$, $Resf(\infty)=-1$ ($k=1$, $q=0$) e quindi l'integrale è $2\pi i\left(\dfrac{32}{9}+1\right)=\dfrac{82}{9}\pi i$

Se $p=9$ si ha $Resf(-2)=\dfrac{-64}{9}$, $Resf(\infty)=-16$ ($k=0$, $q=2$) e quindi l'integrale è $2\pi i\left(-\dfrac{64}{9}+16\right)=\dfrac{160}{9}\pi i$

4) (6–punti) Si risolva l'equazione differenziale $x'''(t)+x(t)=F(t)$, $x(0)=0$, $x'(0)=0$, $x''(0)=0$, $F(t)$ è il prodotto di convoluzione $\displaystyle\int_0^t f(x-t)g(x)dx$ e $f(t)=H(t-1)$, $g(t)=H(t-3)$.

Si calcoli: $x(4^+),x'(4^+),x''(4^+),\ x(4^-),x'(4^-),x''(4^-)$,

R.

$$\mathcal{L}\left[x'''(t)+x(t)\right]=\mathcal{L}(F)\iff p^3X(p)+X(p)=\frac{e^{-p}}{p}\frac{e^{-3p}}{p}$$

da cui

$$x(t)=H(t-4)\sum Res\frac{e^{p(t-4)}}{p^2(p+1)(p^2-p+1)}=H(t-4)\sum Res\frac{e^{p(t-4)}}{p^2(p+1)(p-p_1)(p-p_2)}$$

$p_1 + p_2 = 1$, $p_1 p_2 = 1$, $p_2 = \overline{p}_1$.

$$
\begin{aligned}
x(t) = &\left[\underbrace{(t-4)}_{res.\,p=0} + \underbrace{\frac{e^{-(t-4)}}{3}}_{res\,p=-1} + \underbrace{\frac{e^{p_1(t-4)}}{p_1^2(p_1+1)(p_1-p_2)}}_{res.\,p=p_1} + \underbrace{\frac{e^{p_2(t-4)}}{p_2^2(p_2+1)(p_2-p_1)}}_{res.\,p=p_2} \right] H(t-4) = \\
&= \left[(t-4) + \frac{e^{-(t-4)}}{3} + \frac{e^{p_1(t-4)}}{p_1^2(p_1+1)(p_1-p_2)} + \frac{e^{\overline{p}_1(t-4)}}{(\overline{p}_1)^2(\overline{p}_1+1)(\overline{p}_1-\overline{p}_2)} \right] H(t-4) = \\
&= \left[(t-4) + \frac{e^{-(t-4)}}{3} + 2Re\left(\frac{e^{p_1(t-4)}}{p_1^2(p_1+1)(p_1-p_2)} \right) \right] H(t-4) = \\
&= \left[(t-4) + \frac{e^{-(t-4)}}{3} + 2Re\left(\frac{1}{i\sqrt{3}} \frac{-p_1 e^{p_1(t-4)}}{p_1+1} \right) \right] H(t-4) = \\
&= \left[(t-4) + \frac{e^{-(t-4)}}{3} - \frac{2}{\sqrt{3}} Im\left(\frac{p_1 e^{p_1(t-4)}}{p_1+1} \right) \right] H(t-4) = \\
&= \left[(t-4) + \frac{e^{-(t-4)}}{3} + \frac{2}{\sqrt{3}} Im\left(\frac{e^{p_1(t-4)}}{p_1+1} \right) - \frac{2}{\sqrt{3}} Im\left(e^{p_1(t-4)} \right) \right] H(t-4) = \\
&= \left[(t-4) + \frac{e^{-(t-4)}}{3} + \frac{2}{\sqrt{3}} Im\left(\frac{2e^{p_1(t-4)}}{3+i\sqrt{3}} \right) - \frac{2}{\sqrt{3}} Im\left(e^{p_1(t-4)} \right) \right] H(t-4) = \\
&= \Bigg[(t-4) + \frac{e^{-(t-4)}}{3} + e^{\frac{1}{2}(t-4)} \Big(\frac{1}{\sqrt{3}} \sin\frac{\sqrt{3}}{2}(t-4) - \frac{1}{3}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}(t-4) \Big) + \\
&- \frac{2e^{\frac{1}{2}(t-4)}}{\sqrt{3}} \sin\frac{\sqrt{3}}{2}(t-4) \Bigg] H(t-4)
\end{aligned}
$$

che implicfa $x(4^+) = 0$. Per calcolare le 6 quantità scriviamo la soluzione come $x(t) = f(t) \cdot H(t-4)$.

$$x'(t) = f'(t)H(t-4) + f(t)H'(t-4) = f'(t)H(t-4) + f(t)\delta(t-4) = f'(t)H(t-4) + f(4)$$

da cui

$$x'(4^+) = f'(4^+)H(0^+) + f(4)$$

$$
\begin{aligned}
f'(t) = 1 &- \frac{e^{-(t-4)}}{3} + \frac{e^{\frac{1}{2}(t-4)}}{2\sqrt{3}} \sin\frac{\sqrt{3}}{2}(t-4) + \frac{e^{\frac{1}{2}(t-4)}}{2} \cos\frac{\sqrt{3}}{2}(t-4) - \frac{e^{\frac{1}{2}(t-4)}}{6} \cos\frac{\sqrt{3}}{2}(t-4) + \\
&+ \frac{1}{2\sqrt{3}} e^{\frac{1}{2}(t-4)} \sin\frac{\sqrt{3}}{2}(t-4) - \frac{e^{\frac{1}{2}(t-4)}}{\sqrt{3}} \sin\frac{\sqrt{3}}{2}(t-4) - e^{\frac{1}{2}(t-4)} \cos\frac{\sqrt{3}}{2}(t-4)
\end{aligned}
$$

e quindi

$$x'(4^+) = f'(4^+)H(0^+) + f(4) = 0 + 0$$

$$x''(t) = f''(t)H(t-4) + f'(t)\delta(t-4) \implies x''(4^+) = f''(4^+)H(0^+) + f'(4) = f''(4^+)$$

$$
\begin{aligned}
f''(t) &= \frac{e^{-(t-4)}}{3} + \frac{e^{\frac{1}{2}(t-4)}}{4\sqrt{3}} \sin\frac{\sqrt{3}}{2}(t-4) + \frac{e^{\frac{1}{2}(t-4)}}{4} \cos\frac{\sqrt{3}}{2}(t-4) + \frac{e^{\frac{1}{2}(t-4)}}{4} \cos\frac{\sqrt{3}}{2}(t-4) + \\
&- \frac{\sqrt{3}e^{\frac{1}{2}(t-4)}}{4} \sin\frac{\sqrt{3}}{2}(t-4) + \\
&- \frac{e^{\frac{1}{2}(t-4)}}{12} \cos\frac{\sqrt{3}}{2}(t-4) + \frac{\sqrt{3}e^{\frac{1}{2}(t-4)}}{12} \sin\frac{\sqrt{3}}{2}(t-4) + \frac{1}{4\sqrt{3}} e^{\frac{1}{2}(t-4)} \sin\frac{\sqrt{3}}{2}(t-4) + \\
&+ \frac{1}{4} e^{\frac{1}{2}(t-4)} \cos\frac{\sqrt{3}}{2}(t-4) - \frac{e^{\frac{1}{2}(t-4)}}{2\sqrt{3}} \sin\frac{\sqrt{3}}{2}(t-4) - \frac{e^{\frac{1}{2}(t-4)}}{2} \cos\frac{\sqrt{3}}{2}(t-4) + \\
&- \frac{1}{2} e^{\frac{1}{2}(t-4)} \cos\frac{\sqrt{3}}{2}(t-4) + \frac{\sqrt{3}}{2} e^{\frac{1}{2}(t-4)} \sin\frac{\sqrt{3}}{2}(t-4)
\end{aligned}
$$

Ne segue $f''(4) = 0$ e quindi $x''(4^+) = 0$

5) (6–punti) Sia data la forma differenziale $\omega = \dfrac{xdx}{\sqrt{|y-x^2|}} - \dfrac{dy}{2\sqrt{|y-x^2|}}$. Si calcoli $\displaystyle\int_{\underline{\gamma}} \omega$ dove $\underline{\gamma}$ è una qualsiasi curva regolare abbastanza che connette i punti $(0,0)$, $(1/2, 1/8)$ ed il cui sostegno giace sul grafico della funzione $y = x^3$.

R.$1/(2\sqrt{2})$

La forma è esatta. La curva $y = x^3$ giace sotto la parabola $y = x^2$ nell'intervallo che ci interessa e quindi la forma è $\omega = \dfrac{xdx}{\sqrt{x^2-y}} - \dfrac{dy}{2\sqrt{x^2-y}}$ il cui potenziale è $U(x,y) = \sqrt{x^2-y}$ e quindi il risultato. Essendo ω esatta, si poteva pure integrare lungo le due curve $\underline{\gamma}_1(t) = (t,0)$, $0 \le t \le 1/2$ e $\underline{\gamma}_2(t) = (1/2, t)$, $0 \le t \le 1/8$.

Appello analisi II, Ingegneria informatica (frontale e online)
10–09–2016, A.A.2015-2016, (B)

Nome(stampatello) **Cognome**(stampatello) **matricola**

1) (6–punti) Si valuti l'integrale doppio della funzione $f(x,y)=\sqrt{|2y-x^2|}$ esteso al quadrato $[-1,1]\times[0,4]$

R. $4+\dfrac{56}{3}\arcsin\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$

Abbiamo (si poteva pure integrare per parti usare $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x$)

$$\int_{-1}^{1}dx\int_0^{x^2/2}dy\sqrt{x^2-2y}+\int_{-1}^{1}dx\int_{x^2/2}^{4}dy\sqrt{2y-x^2}=$$
$$=\int_{-1}^{1}dx\frac{1}{3}(x^2-2y)^{\frac32}\Big|_{x^2/2}^{0}+\int_{-1}^{1}dx\frac{1}{3}(2y-x^2)^{\frac32}\Big|_{x^2/2}^{4}=$$
$$\frac13\int_{-1}^{1}dx|x|^3+\frac13\int_{-1}^{1}(8-x^2)^{\frac32}dx=\frac23\int_0^1x^3dx+\frac23\int_0^1(8-x^2)^{\frac32}dx$$

Nel secondo integrale poniamo $x=2\sqrt{2}\sin t$ ed otteniamo

$$\int_0^{\arcsin(\frac{1}{2\sqrt2})}2^{\frac92}\cos^3t\cdot\underbrace{2\sqrt2\cos t dt}_{dx}=64\int_0^{\arcsin(\frac{1}{2\sqrt2})}\cos^2tdt-64\int_0^{\arcsin(\frac{1}{2\sqrt2})}\cos^2t\sin^2tdt=$$
$$=64\frac{t+\cos t\sin t}{2}\Big|_0^{\arcsin(\frac{1}{2\sqrt2})}-8\int_0^{\arcsin(\frac{1}{2\sqrt2})}\sin^2ydy=$$
$$=64\frac{t+\cos t\sin t}{2}\Big|_0^{\arcsin(\frac{1}{2\sqrt2})}-8\frac{t-\cos t\sin t}{2}\Big|_0^{\arcsin(\frac{1}{2\sqrt2})}=28\arcsin\frac{1}{2\sqrt2}+36\frac{1}{2\sqrt2}\frac{7}{2\sqrt2}=$$
$$=28\arcsin\frac{1}{2\sqrt2}+\frac{63}{4}$$

ed alla fine si ha $\dfrac16+\dfrac{21}{2}+\dfrac{56}{3}\arcsin\dfrac{1}{2\sqrt2}=4+\dfrac{56}{3}\arcsin\dfrac{1}{2\sqrt2}$

2) (6–punti) Sia V il volume definito da $V=\{\underline{x}\in\mathbf{R}^3\colon 0\le z\le 2x^2+y^2, x^2+y^2\ge1, x^2+y^2/4\le 1\}$. Si calcoli $|V|$

R.$\dfrac54\pi$

$$|V|=\int\int_{x^2+\frac{y^2}{4}\le1}(2x^2+y^2)dx\,dy-\int\int_{x^2+y^2\le1}(2x^2+y^2)dx\,dy=$$
$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\underbrace{2r}_{iacob.}(2r^2\cos^2t+4r^2\sin^2t)dt-\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\underbrace{r}_{iacob.}r^2(2\cos^2t+\sin^2t)dt=\frac94\pi$$

3) (6–punti) Per $p=5,6,7,8,9$ si calcoli l'integrale $\displaystyle\oint_Q\frac{z^p}{z(z^3-1)(z^2-4)}dz$ dove Q è il rettangolo che collega i punti $(3,-3)$, $(3,3)$, $(-3/2,3)$, $(-3/2,-3)$ e percorso in senso antiorario.

R. stesso risultato di prima

4) (6–punti) Si risolva l'equazione differenziale $x'''(t) + x(t) = F(t)$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$, $x''(0) = 0$. $F(t)$ è il prodotto di convoluzione $\displaystyle\int_0^t f(x-t)g(x)dx$ e $f(t) = H(t-1)$, $g(t) = H(t-4)$.

Si calcoli: $x(5^+), x'(5^+), x''(5^+)$, $x(5^-), x'(5^-), x''(5^-)$,
R. stesso risultato di prima con 5 al posto di 4

5) (6–punti) Sia data la forma differenziale $\omega = \dfrac{xdx}{\sqrt{|2y-x^2|}} - \dfrac{dy}{\sqrt{|2y-x^2|}}$. Si calcoli $\displaystyle\int_{\underline{\gamma}} \omega$ dove $\underline{\gamma}$ è una qualsiasi curva regolare abbastanza che connette i punti $(0,0)$, $(1/2, 1/16)$ ed il cui sostegno giace sul grafico della funzione $y = x^3/2$.

R. $1/(2\sqrt{2})$

Ragionando come prima la primitiva è $U(x,y) = \sqrt{x^2 - 2y}$ per cui il risultato è $1/(2\sqrt{2})$. Essendo ω esatta, si poteva pure integrare lungo le due curve $\underline{\gamma}_1(t) = (t, 0)$, $0 \le t \le 1/2$ e $\underline{\gamma}_2(t) = (1/2, t)$, $0 \le t \le 1/16$.