Appello analisi II, Ingegneria informatica (frontale e online)
22–06–2016, A.A.2015-2016, (A)

1) (6–punti) Sia data la superficie S definita da $\{\underline{x} \in \mathbf{R}^3\colon \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1, 0 \le z \le xy,\ x, y \ge 0\}$. Se ne calcoli l'area.

R.: (A) 38/5, (B) 28/5

Prima soluzione La superficie giace sul bordo del cilindro ellittico $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. Parametrizzando il bordo come $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, l'area che cerchiamo è

$$\int_{\substack{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \\ x,y\ge 0}} xyds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\frac{ab}{2}\sin(2t)}_{xy}\underbrace{\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}dt}_{ds} =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 + (b^2 - a^2)\cos^2 t}\frac{ab}{2}\sin(2t)dt = \frac{ab}{2}\frac{2}{3}\frac{b^3 - a^3}{b^2 - a^2} = \frac{ab}{3}\frac{b^2 + ab + a^2}{b + a}$$

Abbiamo applicato il contenuto della formula a pag.4 delle dispense di Tauraso sugli integrali curvilinei. Si veda pure l'esercizio risolto a pag.30 del "Giornale delle lezioni".

Seconda soluzione Parametrizziamo la superficie cilindrica come

$$x = a\cos t, \quad y = b\sin t, \quad z = u, \qquad 0 \le t \le 2\pi, \quad 0 \le u \le ab\sin t\cos t = \frac{ab}{2}\sin(2t)$$

$\|\underline{\varphi}_t \wedge \underline{\varphi}_u\| = \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}$ per cui l'integrale è

$$\int_0^{2\pi} dt\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}\int_0^{\frac{ab\sin(2t)}{2}} du$$

ed ovviamente otteniamo lo steso risultato.

Terza soluzione La superficie viene vista come cartesiana $y = b\sqrt{1 - \dfrac{x^2}{a^2}}$ e quindi la parametrizziamo come

$$x = t, \quad z = v, \quad y = b\sqrt{1 - \frac{t^2}{a^2}}, \qquad 0 \le t \le a, \quad v \le yt \implies v \le b\sqrt{t^2 - \frac{t^4}{a^2}}$$

per cui l'area è

$$\int_0^a dt\int_0^{b\sqrt{t^2-\frac{t^4}{a^2}}} dv\sqrt{1 + \frac{b^2}{1 - \frac{t^2}{a^2}}\frac{t^2}{a^4}} = \int_0^a dt\int_0^{b\sqrt{t^2-\frac{t^4}{a^2}}} dv\sqrt{\frac{a^4 + t^2(b^2 - a^2)}{a^2 - t^2}} =$$

$$= \int_0^a dt\frac{bt}{a^2}\sqrt{a^4 + t^2(b^2 - a^2)} = \frac{b}{a^2}\frac{1}{3(b^2 - a^2)}\left[a^4 + t^2(b^2 - a^2)\right]^{\frac{3}{2}}\Big|_0^a = \frac{ab}{3}\frac{b^3 - a^3}{b^2 - a^2}$$

• Val la pena ribadire ancora una volta quanto già detto ampiamente a lezione: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ NON definisce una superficie cartesiana del tipo $z = f(x, y)$. È quindi assurdo impostare il seguente calcolo

$$\int_0^1 dx\int_0^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} dy\sqrt{1 + \frac{4x^2}{a^4} + \frac{4y^2}{b^4}}xy$$

che peraltro somiglierebbe più ad un integrale di volume se non vi fosse la presenza di $\sqrt{1+\frac{4x^2}{a^4}+\frac{4y^2}{b^4}}$ che è il tipico fattore metrico nel calcolo di aree per superfici del tipo appunto $z=f(x,y)$. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ definisce sì due superfici cartesiane ma del tipo $x=\pm h(y,z)$ oppure $y=\pm g(x,z)$ dove z non è in realtà presente ma l'integrale da calcolare diventa più complicato.

2) (6–punti) Sia dato l'insieme, detto V, definito da $\{\underline{x}\in\mathbf{R}^3\colon \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}\le 1, 2+x+y\ge z\ge xy,\ x,y\ge 0\}$. Se ne calcoli il volume.

R.: (A) $11/2+3\pi$, (B) $14/3+2\pi$

Stavolta parametrizziamo $x^2/a^2+y^2/b^2\le 1$ come $x=ar\cos t$, $y=br\sin t$ e l'integrale diventa

$$\int_0^1 \underbrace{abr}_{iacobiano}\, dr\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-\underbrace{abr^2\cos t\sin t}_{xy}+\underbrace{(ar\cos t+br\sin t+2)}_{x+y+2})=\frac{-(ab)^2}{8}+\frac{a^2b+ab^2}{3}+\frac{ab\pi}{2}$$

(Compito A) In realtà si sarebbe dovuto prima dimostrare che se $x^2/4+y^2/9\le 1$ allora $xy\le x+y+2$ perché altrimenti si deve scrivere l'integrando con il segno cambiato. Una maniera, certamente non l'unica, è la seguente. La media aritmetica è certamente maggiore della media geometrica per cui $1\ge x^2/4+y^2/9\ge 2\sqrt{x^2y^2/36}=xy/3$ per cui se $2+x+y\ge 3$ allora certamente $2+x+y\ge xy$. Dunque per $x+y\ge 1$ siamo a posto. Sia $x+y<1$. Definiamo $s=x/2$ e $t=y/3$. Dobbiamo dimostrare che se $2s+3t<1$ e $t^2+s^2\le 1$, allora $2+2s+3t\ge 6st$.

$$2+2s+3t\ge 2+2(s+t)\ge 2+2(s+t)^2>\frac{3}{2}(s+t)^2\ge\frac{3}{2}4st=6st$$

(Compito B) Come prima $1\ge x^2+y^2/16\ge 2\sqrt{x^2y^2/16}=xy/2$ e quindi $xy\le 2$. Quindi $2+x+y\ge 2\ge xy$

3) (6–punti) Si calcoli l'integrale $\oint_{|z|=2}\frac{z\mathrm{Re}(z^2)}{z^2-1}dz$ (la circonferenza percorsa in senso antiorario).

R.: (A) πi, (B) $4\pi i$

Abbiamo gli integrali scrivibili come $\oint_{|z|=a+1}\frac{z\mathrm{Re}(z^2)}{z^2-a^2}dz$, $a>0$. La funzione non è olomorfa e non possiamo applicare il teorema dei residui. Sia $z=(a+1)e^{it}$. $\mathrm{Re}(z^2)=(a+1)^2\cos(2t)=(e^{2it}+e^{-i2t})/2$

$$I=\int_0^{2\pi}\frac{(a+1)e^{it}(a+1)^2\cos(2t)}{(a+1)^2e^{2it}-a^2}(a+1)ie^{it}dt=\int_0^{2\pi}\frac{(a+1)e^{it}(a+1)^2\frac{e^{2it}+e^{-2it}}{2}}{(a+1)^2e^{2it}-a^2}(a+1)ie^{it}dt$$

e quindi

$$I=\frac{1}{2}(a+1)^4 i\int_0^{2\pi}\frac{e^{4it}+1}{(a+1)^2e^{2it}-a^2}dt$$

Ora poniamo $w=e^{it}$ ed otteniamo

$$I=\frac{1}{2}(a+1)^4 i\oint_{|w|=1}\frac{w^4+1}{(a+1)^2w^2-a^2}\frac{dw}{iw}=$$
$$=i\pi(a+1)^4\Big[\mathrm{Res}f(w=0)+\mathrm{Res}f(w=a/(a+1))+\mathrm{Res}f(w=-a/(a+1))\Big]$$

$$\mathrm{Res}f(0)=\frac{-1}{a^2},\quad \mathrm{Res}f(w=a/(a+1))=\mathrm{Res}f(w=-a/(a+1))=\frac{1}{2a^2}\left(\frac{a^4}{(a+1)^4}+1\right)$$

quindi

$$I=\pi i(a+1)^4\left(-\frac{1}{a^2}+2\left(\frac{a^4}{(a+1)^4}+1\right)\frac{1}{2a^2}\right)=\pi i a^2$$

• Supponiamo di non essersi resi conto che la funzione integranda NON è olomorfa ed applichiamo quindi il teorema dei residui. Otterremmo

$$2\pi i\left(\frac{a\cdot a^2}{2a}+\frac{-a\cdot a^2}{-2a}\right)=2\pi i a^2$$

Una volta arrivati a

$$I=\frac{1}{2}(a+1)^4 i\int_0^{2\pi}\frac{e^{4it}+1}{(a+1)^2e^{2it}-a^2}dt$$

possiamo pure sostituire $e^{2it}=w$ ed ottenere (il 2 a fattore c'è in quanto si percorre la circonferenza unitaria 2 volte)

$$I=\frac{1}{2}(a+1)^4 i2\oint_{|w|=1}\frac{w^2+1}{(a+1)^2w-a^2}\frac{dw}{2iw}=\pi i(a+1)^4\big(\mathrm{Res}f(w=0)+\mathrm{Res}f(w=a^2/(1+a^2))\big)$$

$$\mathrm{Res}f(w=0)=\lim_{w\to 0}w\frac{w^2+1}{((a+1)^2w-a^2)w}=-1/a^2$$

$$\mathrm{Res}f(w=\frac{-a^2}{(1+a)^2})=\lim_{w\to\frac{-a^2}{(1+a)^2}}(w-\frac{a^2}{(1+a)^2})\frac{w^2+1}{(a+1)^2(w-\frac{a^2}{(1+a)^2})w}=\frac{a^4+(1+a)^4}{a^2(1+a)^2}$$

ed abbiamo ottenuto il risultato di prima. Il passaggio da $\dfrac{w^2+1}{((a+1)^2w-a^2)w}$ a $\dfrac{w^2+1}{(a+1)^2(w-\frac{a^2}{(1+a)^2})w}$ **viene spesso dimenticato dagli studenti che commettono quindi un errore**

4) (6–punti) Si risolva l'equazione differenziale $x''(t)-4x'(t)+x(t)=1-H(t-1)$, $x(0)=x'(0)=0$

R.:

Si dica quanto valgono $x(1)$, $x'(1^+)$, $x'(1^-)$, $x(2)$ e $x'(2)$.

R.:

La trasformata di Laplace $\mathcal{L}(x)=X(p)$ per cui l'equazione diventa $(p^2-4p+1)X(p)=\dfrac{1}{p}-\dfrac{e^{-p}}{p}$ da cui

$$x(t)=\sum\mathrm{Res}\left[\frac{e^{pt}}{p(p^2-4p+1)}-\frac{e^{pt}e^{-p}}{p(p^2-4p+1)}\right]$$

Le singolartità sono a $p=0$, $p=(2\pm\sqrt{3})\doteq p_{1,2,}$ da cui

$$
\begin{aligned}
x(t) &= 1+\frac{e^{p_1 t}}{p_1(p_1-p_2)}-\frac{e^{p_2 t}}{p_2(p_1-p_2)}-H(t-1)\left(1+\frac{e^{p_1(t-1)}}{p_1(p_1-p_2)}-\frac{e^{p_2(t-1)}}{p_2(p_1-p_2)}\right)= \\
&= 1+\frac{(2-\sqrt{3})e^{(2+\sqrt{3})t}}{2\sqrt{3}}-\frac{(2+\sqrt{3})e^{(2-\sqrt{3})t}}{2\sqrt{3}}+ \\
&- H(t-1)\left(1+\frac{(2-\sqrt{3})e^{(2+\sqrt{3})(t-1)}}{2\sqrt{3}}-\frac{(2+\sqrt{3})e^{(2-\sqrt{3})(t-1)}}{2\sqrt{3}}\right)= \\
&= 1+\frac{e^{2t}}{\sqrt{3}}\left(2\sinh\sqrt{3}t-\sqrt{3}\cosh\sqrt{3}t\right)+ \\
&- H(t-1)\left[1+\frac{e^{2(t-1)}}{\sqrt{3}}\left(2\sinh\sqrt{3}(t-1)-\sqrt{3}\cosh\sqrt{3}(t-1)\right)\right]
\end{aligned}
$$

La presenza della funzione $H(t-1)$ in $x(t)$ viene dal fatto che (basta scrivere gli integrali) $X(p)\doteq\mathcal{L}(x(t))=\mathcal{L}(H(t)\cdot x(t))$ e quindi $\mathcal{L}^{-1}(X(p))=H(t)\cdot x(t)$. È quindi un errore scrivere, ad esempio,

$$
\text{Res}\left[\frac{e^{pt}}{p(p^2-4p+1)}-\frac{e^{pt}e^{-p}}{p(p^2-4p+1)}\right]\Bigg|_{p=0}=0
$$

A scanso di equivoci si può scrivere

$$
x(t)=\sum\text{Res}\left[\frac{e^{pt}}{p(p^2-4p+1)}-\frac{e^{pt}e^{-p}}{p(p^2-4p+1)}H(t-1)\right]
$$

Pag.39 del "Giornale delle lezioni" sarebbe stato un valido esercizio.

Per calcolare le quantità richieste, operiamo

$$
\begin{aligned}
x'(t) &= \frac{e^{p_1 t}}{p_1-p_2}-\frac{e^{p_2 t}}{p_1-p_2}-\delta(t-1)\left(1+\frac{e^{p_1(t-1)}}{p_1(p_1-p_2)}-\frac{e^{p_2(t-1)}}{p_2(p_1-p_2)}\right)+ \\
&- H(t-1)\left(\frac{e^{p_1(t-1)}}{p_1-p_2}-\frac{e^{p_2(t-1)}}{p_1-p_2}\right)= \\
&= +\frac{e^{p_1 t}}{p_1-p_2}-\frac{e^{p_2 t}}{p_1-p_2}-\left(1+\frac{e^{p_1(t-1)}}{p_1(p_1-p_2)}-\frac{e^{p_2(t-1)}}{p_2(p_1-p_2)}\right)\Bigg|_{t=1}+ \\
&- H(t-1)\left(1+\frac{e^{p_1(t-1)}}{p_1-p_2}-\frac{e^{p_2(t-1)}}{p_1-p_2}\right)= \\
&= \frac{e^{p_1 t}}{p_1-p_2}-\frac{e^{p_2 t}}{p_1-p_2}-H(t-1)\left(1+\frac{e^{p_1(t-1)}}{p_1-p_2}-\frac{e^{p_2(t-1)}}{p_1-p_2}\right)= \\
&= \frac{e^{2t}}{\sqrt{3}}\sinh\sqrt{3}t-H(t-1)\left(1+\frac{e^{2(t-1)}}{\sqrt{3}}\sinh\sqrt{3}(t-1)\right)
\end{aligned}
$$

Già che ci siamo, calcoliamo pure

$$
\begin{aligned}
x''(t) &= \frac{p_1e^{p_1 t}}{p_1-p_2}-\frac{p_2e^{p_2 t}}{p_1-p_2}-\delta(t-1)\left(1+\frac{e^{p_1(t-1)}}{p_1-p_2}-\frac{e^{p_2(t-1)}}{p_1-p_2}\right)+ \\
&- H(t-1)\left(1+\frac{p_1e^{p_1(t-1)}}{p_1-p_2}-\frac{p_2e^{p_2(t-1)}}{p_1-p_2}\right)= \\
&= \frac{p_1e^{p_1 t}}{p_1-p_2}-\frac{p_2e^{p_2 t}}{p_1-p_2}-1-H(t-1)\left(1+\frac{p_1e^{p_1(t-1)}}{p_1-p_2}-\frac{p_2e^{p_2(t-1)}}{p_1-p_2}\right)
\end{aligned}
$$

Come si vede $x(0)=x'(0)=0$. Inoltre

$$x(1)=1+\frac{p_2e^{p_1}}{p_1-p_2}-\frac{p_1e^{p_2}}{p_1-p_2}-H(0)\left(1+\frac{1}{p_1(p_1-p_2)}-\frac{1}{p_2(p_1-p_2)}\right)=$$
$$=1+(2-\sqrt{3})\frac{e^{2+\sqrt{3}}}{2\sqrt{3}}-(2+\sqrt{3})\frac{e^{2-\sqrt{3}}}{2\sqrt{3}}=1+e^2\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\sinh\sqrt{3}-\cosh\sqrt{3}\right)$$

$$x'(1^-)=\frac{e^{p_1}}{p_1-p_2}-\frac{e^{p_2}}{p_1-p_2},=\frac{e^2}{\sqrt{3}}\sinh\sqrt{3}\qquad x'(1^+)=\frac{e^{p_1}}{p_1-p_2}-\frac{e^{p_2}}{p_1-p_2}-1=\frac{e^2}{\sqrt{3}}\sinh\sqrt{3}-1$$

$$x(2)=1+\frac{e^{2p_1}}{p_1(p_1-p_2)}-\frac{e^{2p_2}}{p_2(p_1-p_2)}-\left(1+\frac{e^{p_1}}{p_1(p_1-p_2)}-\frac{e^{p_2}}{p_2(p_1-p_2)}\right)=$$
$$=(2-\sqrt{3})\frac{e^{4+2\sqrt{3}}}{2\sqrt{3}}-(2+\sqrt{3})\frac{e^{4-2\sqrt{3}}}{2\sqrt{3}}-(2-\sqrt{3})\frac{e^{2+\sqrt{3}}}{2\sqrt{3}}+(2+\sqrt{3})\frac{e^{2-\sqrt{3}}}{2\sqrt{3}}$$

$$x'(2)=\frac{e^{2p_1}}{p_1-p_2}-\frac{e^{2p_2}}{p_1-p_2}-\left(1+\frac{e^{p_1}}{p_1-p_2}-\frac{e^{p_2}}{p_1-p_2}\right)$$

5) (6–punti) Si calcoli $\displaystyle\int_{\underline{\gamma}}\omega$ dove $\underline{\gamma}$ è il bordo superiore dell'ellisse percorso in senso antiorario $\displaystyle\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ e $\displaystyle\omega=\frac{-(y-1)dx+xdy}{x^2+(y-1)^2}$

R.: $2\pi-2\arctan 2$

Ci sono molte maniere di risolvere il problema.

Prima soluzione Sia $\underline{\gamma}(t)=(2\cos t,3\sin t)$, $0\le t\le\pi$ la curva su cui dobbiamo integrare. Chiudiamo il cammino con la curva $\underline{\sigma}(t)=(t,0)$, $-2\le t\le 2$. La forma è chiusa e quindi (Lemma di Gauss–Green) $\displaystyle\oint_{\underline{\gamma}\cup\underline{\sigma}}\omega=\oint_{\underline{\gamma}_1}\omega=2\pi$ dove $\underline{\gamma}_1=(\frac{1}{2}\cos t,1+\frac{1}{2}\sin t)$, $0\le t\le 2\pi$. A questo punto $\displaystyle\int_{\underline{\gamma}}\omega=2\pi-\int_{\underline{\sigma}}\omega=2\pi-\int_{-2}^{2}\frac{dt}{t^2+1}=2\pi-2\arctan 2$

Seconda soluzione La forma è chiusa e la curva giace in un sottoinsieme semplicemente connesso del dominio della forma $\{\underline{x}\in\mathbf{R}^2\colon \underline{x}\neq(0,1)\}$. Una primitiva è

$$F(x,y)=\begin{cases}\arctan\dfrac{y-1}{x} & x>0\\[2mm] \arctan\dfrac{y-1}{x}+\pi & x<0\\[2mm] \pi/2 & x=0,\ y\ge 1\end{cases}$$

Ora non resta che calcolare

$$F(-2,0)-F(2,0)=\pi+\arctan\frac{1}{2}-\arctan\frac{-1}{2}=\pi+2\arctan\frac{1}{2}=\pi+2\left(\frac{\pi}{2}-\arctan 2\right)$$

ossia $2\pi-2\arctan 2$.

Verifichiamo che $F(x,y)$ è differenziabile. Questa parte non era necessaria nel compito. Gli unici punti su cui vale la pena fare i calcoli sono quelli sul semiasse positivo delle ordinate diversi da $(0,1)$. Infatti la curva su cui integrare non passa da $(0,1)$.

Sia $y_0>1$.

$$F_x(0^+,y_0)=\lim_{h\to 0^+}\frac{F(h,y_0)-F(0,y_0)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h}\left(\arctan\frac{y_0-1}{h}-\frac{\pi}{2}\right)=$$
$$=\lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h}\arctan\frac{h}{-y_0+1}=\frac{1}{1-y_0}$$

$$F_x(0^-,y_0)=\lim_{h\to 0^-}\frac{F(h,y_0)-F(0,y_0)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{1}{h}\left(\arctan\frac{y_0-1}{h}+\pi-\frac{\pi}{2}\right)=$$
$$=\lim_{h\to 0^-}\frac{1}{h}\left(-\frac{\pi}{2}+\arctan\frac{h}{-y_0+1}+\pi-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{1-y_0}$$

È immediato verificare che $F_y(0,y_0^+)=0=F_y(0,y_0^-)$.
Certamente quindi $F(x,y)$ è derivabile. È facile pure verificare che è continua sul semiasse in oggetto. Verifichiamo ora la differenziabilità . Dobbiamo far vedere che $(\underline{x}_0=(0,y_0)$, $y_0>1$.

$$\lim_{\|\underline{h}\|\to 0}\frac{1}{\|\underline{h}\|}\left(F(\underline{x}_0+\underline{h})-F(\underline{x}_0,\underline{h})-\underline{\partial}F(\underline{x}_0)\cdot\underline{h}\right)=0$$

Bisogna dividere in due parti. Nella prima si ha $h_1>0$, dobbiamo far vedere che

$$\lim_{\|\underline{h}\|\to 0}\frac{1}{\|\underline{h}\|}\left(\underbrace{\arctan\frac{y_0+h_2-1}{h_1}}_{F(\underline{x}_0+\underline{h})}-\underbrace{\frac{\pi}{2}}_{F(\underline{x}_0)}-\frac{h_1}{1-y_0}\right)=0$$

Essendo $y_0-1>0$, ne segue

$$\lim_{\|\underline{h}\|\to 0}\frac{1}{\|\underline{h}\|}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan\frac{h_1}{y_0+h_2-1}-\frac{\pi}{2}-\frac{h_1}{1-y_0}\right)=$$
$$=\lim_{\|\underline{h}\|\to 0}\frac{1}{\|\underline{h}\|}\left(\frac{h_1}{1-y_0-h_2}+o(h_1)-\frac{h_1}{1-y_0}\right)=\lim_{\|\underline{h}\|\to 0}\frac{1}{\|\underline{h}\|}\left(\frac{h_1}{1-y_0-h_2}-\frac{h_1}{1-y_0}\right)=$$
$$\lim_{\|\underline{h}\|\to 0}\frac{1}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}\frac{-h_1h_2}{(1-y_0-h_2)(1-y_0)}=0$$

Seconda parte $h_1<0$ in

$$\lim_{\|\underline{h}\|\to 0}\frac{1}{\|\underline{h}\|}\left(F(\underline{x}_0+\underline{h})-F(\underline{x}_0,\underline{h})-\underline{\partial}F(\underline{x}_0)\cdot\underline{h}\right)=0$$

$$\lim_{\|\underline{h}\|\to 0}\frac{1}{\|\underline{h}\|}\left(\underbrace{\pi+\arctan\frac{y_0+h_2-1}{h_1}}_{F(\underline{x}_0+\underline{h})}-\frac{\pi}{2}-\frac{h_1}{1-y_0}\right)=0$$

Essendo $y_0-1>0$, ne segue

$$\lim_{\|\underline{h}\|\to 0}\frac{1}{\|\underline{h}\|}\left(\pi-\frac{\pi}{2}-\arctan\frac{h_1}{y_0+h_2-1}-\frac{\pi}{2}-\frac{h_1}{1-y_0}\right)$$

e ricadiamo nel caso precedente.

La semplice funzione $\arctan(y-1)/x$ non può essere la primitiva della forma su tutto il cammino di integrazione il quale passa per il punto $(0,3)$. Se avessimo preso come cammino di integrazione, ad esempio, quella parte che sta nella metà bassa del primo quadrante dove $0 < x < y$, allora sarebbe andata bene.

Terza soluzione Calcolo dell'integrale curvilineo (vivamente sconsigliato; integrali complicati).

Quarta soluzione La forma è chiusa e la curva giace in un sottoinsieme semplicemente connesso del dominio della forma $\{\underline{x} \in \mathbf{R}^2 \colon \underline{x} \neq (0,1)\}$. La forma è quindi esatta e calcoliamo l'integrale curvilineo ma usando il cammino che più ci aggrada. Ad esempio possiamo sommare gli integrali lungo le tre curve $\underline{\gamma}_1 = (2,t)$, $0 \le t \le 3$, $\underline{\gamma}_2 = (-t,3)$, $-2 \le t \le 2$, $\underline{\gamma}_3 = (-2,-t)$, $-3 \le t \le 0$.

Appello analisi II, Ingegneria informatica (frontale e online)
22–06–2016, A.A.2015-2016, (B)

1) (6–punti) Sia data la superficie S definita da $\{\underline{x} \in \mathbf{R}^3 \colon x^2 + \dfrac{y^2}{16} = 1, 0 \le z \le xy,\ x, y \ge 0\}$. Se ne calcoli l'area.

R.:

2) (6–punti) Sia dato l'insieme, detto V, definito da $\{\underline{x} \in \mathbf{R}^3 \colon x^2 + \dfrac{y^2}{16} \le 1, 2 + x + y \ge z \ge xy,\ x, y \ge 0\}$. Se ne calcoli il volume.

R.:

3) (6–punti) Si calcoli l'integrale $\displaystyle\oint_{|z|=3} \frac{z\mathrm{Re}(z^2)}{z^2-4} dz$ (la circonferenza percorsa in senso antiorario).

R.:

4) (6–punti) Si risolva l'equazione differenziale $x''(t) + 4x'(t) + x(t) = H(t-2) - 1$, $x(0) = x'(0) = 0$

R.:

Si dica quanto valgono $x(1)$, $x'(1)$, $x(2)$ e $x'(2^+)$, $x'(2^-)$

R.:

La trasformata di Laplace $\mathcal{L}(x) = X(p)$ per cui l'equazione diventa $(p^2+4p+1)X(p) = \dfrac{e^{-2p}}{p} - \dfrac{1}{p}$ da cui

$$x(t) = \sum \mathrm{Res}\left[-\frac{e^{pt}}{p(p^2+4p+1)} + \frac{e^{pt}e^{-2p}}{p(p^2+4p+1)}\right]$$

Le singolartità sono a $p=0$, $p=(-2\pm\sqrt{3})\doteq p_{1,2}$, da cui

$$x(t)=-1-\frac{e^{p_1t}}{p_1(p_1-p_2)}+\frac{e^{p_2t}}{p_2(p_1-p_2)}+H(t-2)\left(1+\frac{e^{p_1(t-2)}}{p_1(p_1-p_2)}-\frac{e^{p_2(t-2)}}{p_2(p_1-p_2)}\right)=$$
$$=-1-\frac{(-2-\sqrt{3})e^{(-2+\sqrt{3})t}}{2\sqrt{3}}+\frac{(-2+\sqrt{3})e^{(-2-\sqrt{3})t}}{2\sqrt{3}}+$$
$$+H(t-2)\left(1+\frac{(-2-\sqrt{3})e^{(-2+\sqrt{3})(t-2)}}{2\sqrt{3}}-\frac{(-2+\sqrt{3})e^{(-2-\sqrt{3})(t-2)}}{2\sqrt{3}}\right)=$$
$$=-1+\frac{e^{-2t}}{\sqrt{3}}\left(2\sinh\sqrt{3}t+\sqrt{3}\cosh\sqrt{3}t\right)+$$
$$+H(t-2)\left[1+\frac{e^{-2(t-2)}}{\sqrt{3}}\left(-2\sinh\sqrt{3}(t-2)-\sqrt{3}\cosh\sqrt{3}(t-2)\right)\right]$$

Per calcolare le quantità richieste, operiamo

$$x'(t)=\frac{-e^{p_1t}}{p_1-p_2}+\frac{e^{p_2t}}{p_1-p_2}+\delta(t-2)\left(1+\frac{e^{p_1(t-2)}}{p_1(p_1-p_2)}-\frac{e^{p_2(t-2)}}{p_2(p_1-p_2)}\right)+$$
$$+H(t-2)\left(\frac{e^{p_1(t-2)}}{p_1-p_2}-\frac{e^{p_2(t-2)}}{p_1-p_2}\right)=$$
$$=\frac{-e^{p_1t}}{p_1-p_2}+\frac{e^{p_2t}}{p_1-p_2}+\left(1+\frac{e^{p_1(t-2)}}{p_1(p_1-p_2)}-\frac{e^{p_2(t-2)}}{p_2(p_1-p_2)}\right)\Bigg|_{t=2}+$$
$$+H(t-2)\left(1+\frac{e^{p_1(t-2)}}{p_1-p_2}-\frac{e^{p_2(t-2)}}{p_1-p_2}\right)=$$
$$=\frac{-e^{p_1t}}{p_1-p_2}+\frac{e^{p_2t}}{p_1-p_2}+H(t-2)\left(1+\frac{e^{p_1(t-2)}}{p_1-p_2}-\frac{e^{p_2(t-2)}}{p_1-p_2}\right)=$$
$$=\frac{-e^{-2t}}{\sqrt{3}}\sinh\sqrt{3}t+H(t-2)\left(1+\frac{e^{-2(t-2)}}{\sqrt{3}}\sinh\sqrt{3}(t-2)\right)$$

Già che ci siamo, calcoliamo pure

$$x''(t)=\frac{-p_1e^{p_1t}}{p_1-p_2}+\frac{p_2e^{p_2t}}{p_1-p_2}+\delta(t-2)\left(1+\frac{e^{p_1(t-2)}}{p_1-p_2}-\frac{e^{p_2(t-2)}}{p_1-p_2}\right)+$$
$$+H(t-2)\left(1+\frac{p_1e^{p_1(t-2)}}{p_1-p_2}-\frac{p_2e^{p_2(t-2)}}{p_1-p_2}\right)=$$
$$=\frac{-p_1e^{p_1t}}{p_1-p_2}+\frac{p_2e^{p_2t}}{p_1-p_2}+1+H(t-2)\left(1+\frac{p_1e^{p_1(t-2)}}{p_1-p_2}-\frac{p_2e^{p_2(t-2)}}{p_1-p_2}\right)$$

Come si vede $x(0)=x'(0)=0$. Inoltre

$$x(1)=-1-\frac{p_2e^{p_1}}{p_1-p_2}+\frac{p_1e^{p_2}}{p_1-p_2}+H(-2)\left(1+\frac{1}{p_1(p_1-p_2)}-\frac{1}{p_2(p_1-p_2)}\right)=$$
$$=-1+(2+\sqrt{3})\frac{e^{-2+\sqrt{3}}}{2\sqrt{3}}+(-2+\sqrt{3})\frac{e^{-2-\sqrt{3}}}{2\sqrt{3}}=-1+e^{-2}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\sinh\sqrt{3}+\cosh\sqrt{3}\right)$$

$$x'(1)=-\frac{e^{-2}}{\sqrt{3}}\sinh\sqrt{3}$$

$$x'(2^-) = \frac{-e^{2p_1}}{p_1-p_2} + \frac{e^{2p_2}}{p_1-p_2} = \frac{-e^{-4}}{\sqrt{3}}\sinh 2\sqrt{3}$$
$$x'(2^+) = \frac{-e^{2p_1}}{p_1-p_2} + \frac{e^{2p_2}}{p_1-p_2} - 1 = \frac{-e^{-4}}{\sqrt{3}}\sinh 2\sqrt{3} + 1$$
$$x(2) = -1 + \frac{e^{-4}}{\sqrt{3}}(2\sinh 2\sqrt{3} + \sqrt{3}\cosh 2\sqrt{3})$$

5) (6–punti) Si calcoli $\int_{\underline{\gamma}} \omega$ dove $\underline{\gamma}$ è il bordo superiore dell'ellisse $x^2 + \frac{y^2}{16} = 1$ percorso in senso antiorario e $\omega = \frac{-(y-2)dx + xdy}{x^2+(y-2)^2}$

R.: $\pi + 2\arctan 2$

Ci sono molte maniere di risolvere il problema.

Prima soluzione Sia $\underline{\gamma}(t) = (\cos t, 4\sin t)$, $0 \le t \le \pi$ la curva su cui dobbiamo integrare. Chiudiamo il cammino con la curva $\underline{\sigma}(t) = (t, 0)$, $-1 \le t \le 1$. La forma è chiusa e quindi (Lemma di Gauss–Green) $\oint_{\underline{\gamma}\cup\underline{\sigma}} \omega = \oint_{\underline{\gamma}_1} \omega = 2\pi$ dove $\underline{\gamma}_1 = (\frac{1}{2}\cos t, 2+\frac{1}{2}\sin t)$, $0 \le t \le 2\pi$. A questo punto

$$\int_{\underline{\gamma}} \omega = 2\pi - \int_{\underline{\sigma}} \omega = 2\pi - 2\int_{-1}^{1} \frac{dt}{t^2+4} = 2\pi - 2\arctan\frac{1}{2} = 2\pi - 2\left(\frac{\pi}{2} - \arctan 2\right) = \pi + 2\arctan 2$$

Seconda soluzione La forma è chiusa e la curva giace in un sottoinsieme semplicemente connesso del dominio della forma $\{\underline{x} \in \mathbf{R}^3, : \underline{x} \neq (0,1)\}$. Una primitiva è

$$F(x,y) = \begin{cases} \arctan\dfrac{y-2}{x} & x > 0 \\ \arctan\dfrac{y-2}{x} + \pi & x < 0 \\ \pi/2 & x = 0,\ y \ge 2 \\ 3\pi/2 & x = 0,\ y < 2 \end{cases}$$

Ora non resta che calcolare

$$F(-1,0) - F(1,0) = \pi + \arctan 2 - \arctan(-2) = \pi + 2\arctan 2$$

La semplice funzione $\arctan(y-1)/x$ non può essere la primitiva della forma su tutto il cammino di integrazione il quale passa per il punto $(0,4)$. Se avessimo preso come cammino di integrazione, ad esempio, quella parte che sta nella metà bassa del primo quadrante, allora sarebbe andata bene.

Verifichiamo che $F(x,y)$ è differenziabile (vedi esercizio precedente). Questa parte non era necessaria nel compito.

Quarta soluzione La forma è chiusa e la curva giace in un sottoinsieme semplicemente connesso del dominio della forma $\{\underline{x} \in \mathbf{R}^2 : \underline{x} \neq (0,1)\}$. La forma è quindi esatta e calcoliamo l'integrale curvilineo ma usando il cammino che più ci aggrada. Ad esempio possiamo sommare gli integrali lungo le tre curve $\underline{\gamma}_1 = (1,t)$, $0 \le t \le 4$, $\underline{\gamma}_2 = (-t,4)$, $-1 \le t \le 1$, $\underline{\gamma}_3 = (-1,-t)$, $-4 \le t \le 0$.