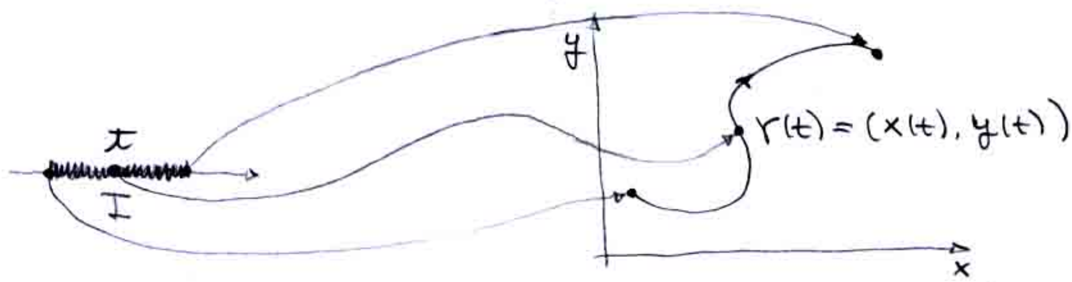
INTEGRALI CURVILINEI

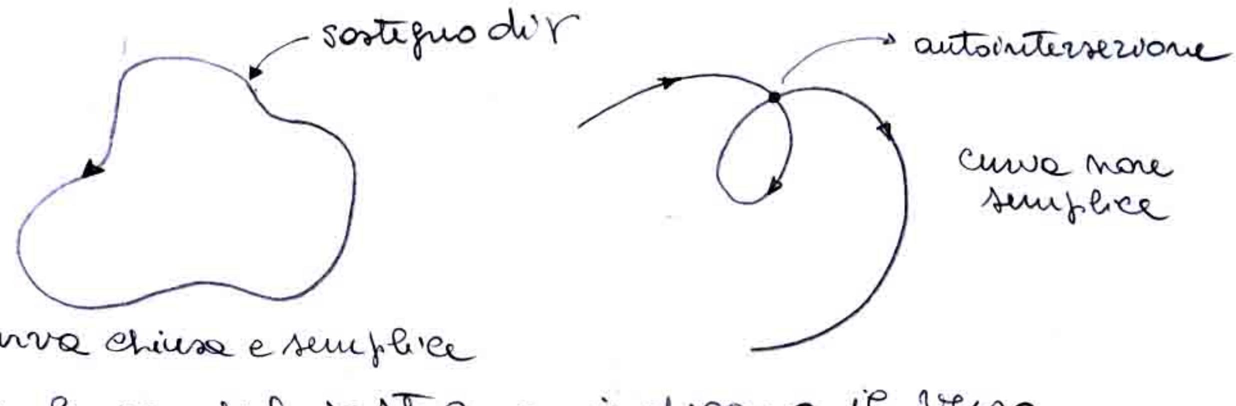
1. Curve nel piano

Una CURVA PIANA è una funzione $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ dove I è un intervallo di $\mathbb{R}$.

$$I \ni t \xrightarrow{\gamma} (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$$



Una curva si dice CHIUSA se $I = [a, b]$ e $\gamma(a) = \gamma(b)$, mentre si dice SEMPLICE se γ è iniettiva. Il SOSTEGNO della curva γ è l'insieme $\{ (x(t), y(t)) : t \in I \}$.



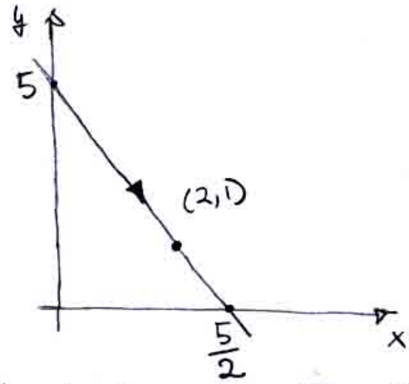
curva chiusa e semplice

Le frecce sul sostegno indicano il verso di percorrenza della curva al variare del parametro $t \in I$.

Vediamo qualche esempio esplicito

1) $\begin{cases} x(t) = 2 + t \\ y(t) = 1 - 2t \end{cases}$ con $t \in \mathbb{R}$

sono le equazioni parametriche della retta



"eliminando" il parametro t si trova l'equazione cartesiana:

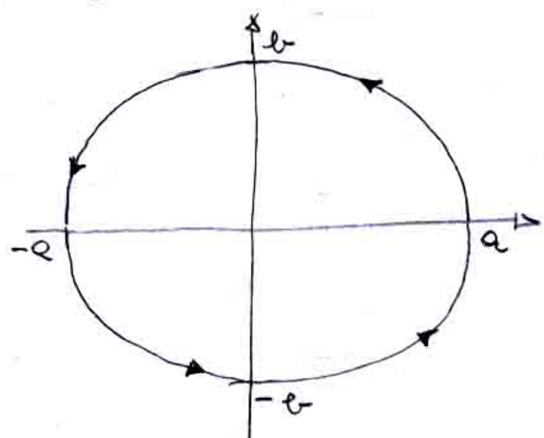
$$t = x-2, \quad y = 1-2(x-2) = 5-2x.$$

Se si fa variare il parametro t nell'intervallo $[0, \frac{1}{2}]$ il sostegno corrispondente è dato dal segmento che unisce i punti $(2,1)$ e $(\frac{5}{2}, 0)$.

2) $\begin{cases} x(t) = a\cos(t) \\ y(t) = b\,\mathrm{sen}(t) \end{cases}$ con $t \in [0, 2\pi)$

dove a e b sono numeri ≥ 0 sono le equazioni parametriche dell'ellisse con equazione cartesiana

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



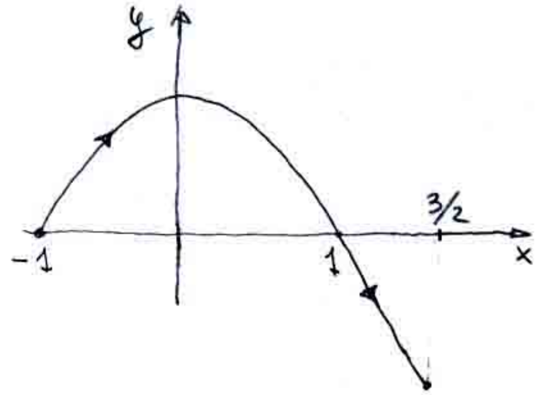
3) $\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = f(t) \end{cases}$ con $t \in [a, b]$ per $a < b$

sono le equazioni parametriche del grafico della funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.

Ad esempio se $f(x) = 1 - x^2$ allora

$$x(t) = t, \; y(t) = 1 - t^2 \text{ per } t \in [-1, \tfrac{3}{2}]$$

ha come sostegno



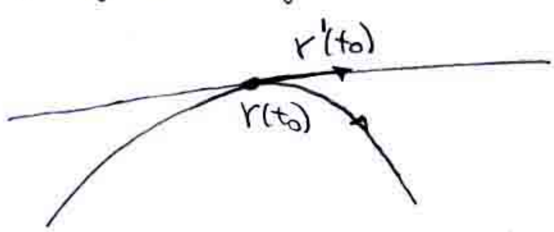
Una curva γ si dice REGOLARE se le componenti $x(t)$ e $y(t)$ sono derivabili con le derivate continue in I e

$$\gamma'(t) := (x'(t), y'(t)) \neq (0,0) \quad \forall t \in I.$$

Il vettore $\gamma'(t)$ si dice VETTORE TANGENTE.

Se $\gamma'(t_0) \neq 0$ allora la retta tangente (parametrica) alla curva nel punto $\gamma(t_0)$ è data da

$$\begin{cases} x = x(t_0) + x'(t_0)(t - t_0) \\ y = y(t_0) + y'(t_0)(t - t_0) \end{cases} \quad \text{per } t \in \mathbb{R}$$



2. Integrali curvilinei del primo tipo

Sia $f:\Omega \to \mathbb{R}$ una funzione continua in Ω insieme aperto di $\mathbb{R}^2$.

Sia $\gamma:[a,b]\to\Omega$ una curva regolare e semplice

$$\gamma(t) = (x(t), y(t)) \text{ per } t\in[a,b]$$

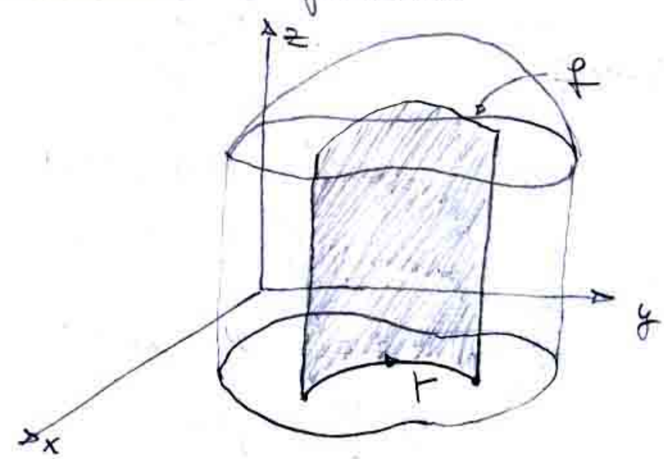
Allora l'INTEGRALE CURVILINEO di f lungo γ è definito come

$$\int_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt$$

I simboli usati per indicarlo possono essere

$$\int_\gamma f\, ds \qquad \text{oppure} \qquad \int_a^b f(\gamma(t))\,\|\gamma'(t)\|\, dt$$

f si dice INTEGRABILE lungo γ se l'integrale curvilineo corrispondente è finito



Se $f(x,y)\geq 0$ lungo γ allora $\int_\gamma f\,ds$ rappresenta l'area della superficie

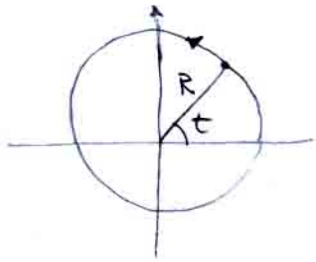
$$\left\{ (x,y,z):\ x=x(t),\ y=y(t),\ z\in[0, f(x(t), y(t))],\ t\in[a,b] \right\}$$

Inoltre $\int_\gamma ds$ (ossia se $f=1$) rappresenta la LUNGHEZZA della curva γ e si indica con $|\gamma|$.

ESEMPIO 1.

Calcolare la lunghezza della circonferenza di raggio $R \geq 0$. Le coordinate parametriche sono:

$$\begin{cases} x(t) = R\cos t \\ y(t) = R\,\text{sen}\,t \end{cases} \quad \text{con } t \in [0, 2\pi)$$



il vettore tangente ha componenti

$$x'(t) = -R\,\text{sen}\,t \,, \quad y'(t) = R\cos t$$

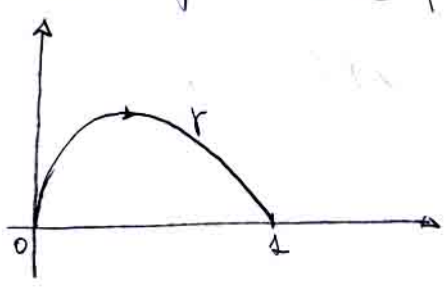
Quindi la lunghezza vale

$$|\gamma| = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-R\,\text{sen}\,t)^2 + (R\cos t)^2}\, dt = R\int_0^{2\pi} dt = 2\pi R$$

Si noti che il calcolo della lunghezza di un'ellisse non porta ad una formula "chiusa" perché la funzione da integrare non ammette una primitiva "semplice".

ESEMPIO 2.

Calcolare la lunghezza della curva γ data da dal grafico della funzione $f(x) = \sqrt{\frac{x}{3}}(1-x)$ in $[0,1]$



Le equazioni parametriche sono

$$x(t) = t \quad , \quad y(t) = f(t) = \sqrt{\frac{t}{3}}(1-t)$$

e quindi

$$x'(t) = 1 \, , \quad y'(t) = f'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}\,\frac{(1-t)}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{3}} = \frac{1-3t}{2\sqrt{3}\sqrt{t}}$$

Così

$$|\gamma| = \int_0^1 \sqrt{1+(f'(t))^2}\, dt = \int_0^1 \frac{\sqrt{12t+(1-6t+t^2)}}{2\sqrt{3}\sqrt{t}}\, dt$$

$$= \int_0^1 \frac{1+3t}{2\sqrt{3}\sqrt{t}}\, dt = \frac{1}{2\sqrt{3}}\left(\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\, dt + 3\int_0^1 \sqrt{t}\, dt\right)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{3}}\left(\Big[2\sqrt{t}\Big]_0^1 + 3\left[\frac{t^{3/2}}{3/2}\right]_0^1\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

ESEMPIO 3.

Calcolare $\int_\gamma f\, ds$ dove $f(x,y) = \dfrac{xy \operatorname{sen} y}{\sqrt{1+x^2}}$ e γ è il ramo di parabola $\gamma(t) = (t, t^2/2)$ per $t \in [0, \sqrt{2\pi}]$.

Il vettore tangente è $(1, t)$ e $\|(1,t)\| = \sqrt{1+t^2}$.

$$\int_\gamma f\, ds = \int_0^{\sqrt{2\pi}} \frac{t \cdot t^2/2 \cdot \operatorname{sen}(t^2/2)}{\cancel{\sqrt{1+t^2}}} \cdot \cancel{\sqrt{1+t^2}}\, dt$$

$$\underset{\substack{u = \frac{t^2}{2} \\ du = t\,dt}}{=} \int_0^{\pi} u \cdot \operatorname{sen}(u)\, du \underset{\text{per parti}}{=} \Big[\operatorname{sen}(u) - u\cos u\Big]_0^{\pi} = \pi$$

Due curve $\gamma_1 : I_1 \to \mathbb{R}^2$ e $\gamma_2 : I_2 \to \mathbb{R}^2$ si dicono EQUIVALENTI se $\exists\ \varphi : I_2 \to I_1$ biunivoca, derivabile con derivata continua in I_2 e tale che $\varphi'(t) \neq 0$ in I_2 per cui

$$\gamma_1(\varphi(t)) = \gamma_2(t) \quad \forall t \in I_2 .$$

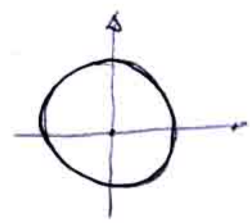
Due curve equivalenti hanno lo stesso sostegno. Inoltre hanno lo stesso verso di percorrenza se $\varphi' > 0$ in I_2 oppure hanno verso opposto se $\varphi' < 0$.

Ad esempio

$\gamma_1(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$ per $t \in [0, 2\pi]$

e

$\gamma_2(t) = (\cos 2t, -\operatorname{sen} 2t)$ per $t \in [0, \pi]$



sono equivalenti e sono due parametrizzazioni diverse della circonferenza di centro $(0,0)$ e raggio unitario. γ_1 e γ_2 hanno verso opposto.

TEOREMA 1.

Se γ_1 e γ_2 sono due curve equivalenti allora

$$\int_{\gamma_1} f\, ds = \int_{\gamma_2} f\, ds$$

ossia l'integrale curvilineo non dipende dalla parametrizzazione scelta per la curva ma solo dal suo sostegno.

Se $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ è una curva lungo la quale è distribuita delle masse con densità lineare $\delta(x,y)$ allora il CENTRO DI MASSA $(\bar{x}, \bar{y})$ è dato da:

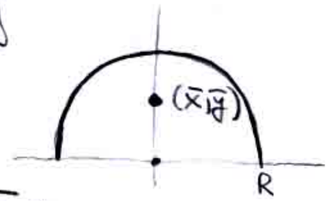
$$\bar{x} = \frac{\int_\gamma x \cdot \delta \, ds}{\int_\gamma \delta \, ds}, \qquad \bar{y} = \frac{\int_\gamma y \cdot \delta \, ds}{\int_\gamma \delta \, ds}.$$

ESEMPIO 4.

Calcolare il centro di massa di una semicirconferenza omogenea $(\delta = 1)$ di raggio R.

Svolgiamo il calcolo usando due parametrizzazioni:

1) $\gamma_1(t) = (R\cos t, R\sin t)$ con $t \in [0, \pi]$



$$\|\gamma_1'(t)\| = \sqrt{(-R\sin t)^2 + (R\cos t)^2} = R$$

Per simmetria $\bar{x} = 0$. Calcoliamo $\bar{y}$:

$$\bar{y} = \frac{1}{|\gamma|} \cdot \int_0^\pi (R\sin t) \cdot \|\gamma_1'(t)\| \, dt =$$

$$= \frac{1}{R\pi} \cdot R^2 \left[-\cos t\right]_0^\pi = \frac{2R}{\pi}.$$

2) $\gamma_2(t) = (Rt, R \cdot \sqrt{1-t^2})$ con $t \in [-1, 1]$

$$\|\gamma_2'(t)\| = R \cdot \sqrt{(1)^2 + \left(\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\right)^2} = \frac{R}{\sqrt{1-t^2}}$$

Così $\bar{x} = 0$ e

$$\bar{y} = \frac{1}{|\gamma|} \cdot \int_{-1}^{1} (R \cdot \sqrt{1-t^2}) \cdot \|\gamma_2'(t)\| \, dt$$

$$= \frac{1}{R\pi} \int_{-1}^{1} R \cdot \cancel{\sqrt{1-t^2}} \cdot \frac{R}{\cancel{\sqrt{1-t^2}}} \, dt = \frac{2R}{\pi}.$$

Se la curva γ è data in coordinate parametriche polari $\rho(t)$, $\theta(t)$ per $t \in I$ allora è necessario qualche calcolo in più per scrivere il vettore tangente:

$$x(t) = \rho(t)\cos\theta(t) \quad , \quad y(t) = \rho(t)\cdot \operatorname{sen}\theta(t)$$

e derivando rispetto a t otteniamo

$$x'(t) = \rho'(t)\cdot\cos\theta(t) + \rho(t)\cdot(-\operatorname{sen}\theta(t))\cdot\theta'(t)$$

$$y'(t) = \rho'(t)\cdot\operatorname{sen}\theta(t) + \rho(t)\cdot(\cos\theta(t))\cdot\theta'(t)$$

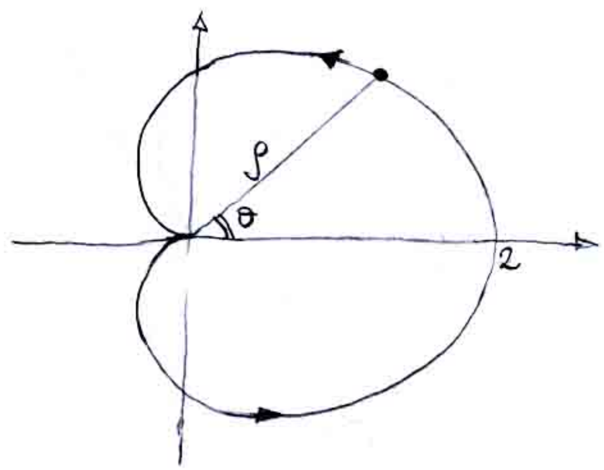
e così

$$\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2} = \sqrt{(\rho'(t))^2+(\rho(t)\cdot\theta'(t))^2}.$$

ESEMPIO 5.

Calcolare la lunghezza della CARDIOIDE data dalle equazioni parametriche polari

$$\begin{cases} \rho(t) = 1+\cos t \\ \theta(t) = t \end{cases} \qquad t\in[0,2\pi]$$



Quindi

$$\sqrt{(\rho'(t))^2+(\rho(t)\cdot\theta'(t))^2} = \sqrt{(-\operatorname{sen} t)^2+((1+\cos t)\cdot 1)^2}$$

$$= \sqrt{\operatorname{sen}^2 t+1+2\cos t+\cos^2 t}$$

$$= \sqrt{2}\,\sqrt{1+\cos t} = 2\left|\cos(t/2)\right|$$

e

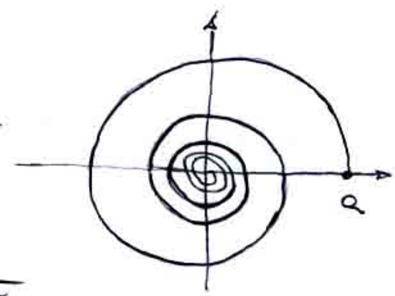
$$|\gamma| = \int_0^{2\pi} 2\left|\cos(t/2)\right| dt = 4\int_0^{\pi} \cos(t/2)\,dt = 8\left[\operatorname{sen}(t/2)\right]_0^{\pi} = 8.$$

ESEMPIO 6.

Calcolare $\int_\gamma (x^2+y^2)^2 ds$ dove γ è l'arco della spirale data dalle equazioni polari

$$\rho(t)=a e^{-t} \quad \theta(t)=t \quad \text{per } t=[0,+\infty) \text{ con } a>0.$$

$$\int_\gamma (x^2+y^2)^2 ds = \int_0^{+\infty} \rho^4 \sqrt{(\rho')^2+(\rho\theta')^2}\,dt$$



$$= \int_0^{+\infty} a^4 e^{-4t}\sqrt{(-ae^{-t})^2+(ae^{-t})^2}\,dt$$

$$= \int_0^{+\infty} a^5 e^{-5t}\cdot\sqrt{2}\,dt = a^5\cdot\sqrt{2}\left[e^{-5t}/(-5)\right]_0^{+\infty} = \frac{a^5\cdot\sqrt{2}}{5}.$$

3. Integrali curvilinei del secondo tipo

Sia $F: \Omega \to \mathbb{R}^2$ un CAMPO VETTORIALE in Ω insieme aperto di $\mathbb{R}^2$

$$F(x,y) = \big(A(x,y), B(x,y)\big)$$

con le componenti $A(x,y)$, $B(x,y)$ continue

A F associamo l'espressione formale

$$\omega(x,y) = A(x,y)\,dx + B(x,y)\,dy$$

detta FORMA DIFFERENZIALE.

Sia $\gamma : [a,b] \to \Omega$ una curva regolare e semplice

$$\gamma(t) = (x(t), y(t)) \quad \text{per } t \in [a,b].$$

Allora l'INTEGRALE CURVILINEO di F lungo γ è definito come

$$\int_a^b \Big(A(x(t),y(t)) \cdot x'(t) + B(x(t),y(t)) \cdot y'(t)\Big)\,dt$$

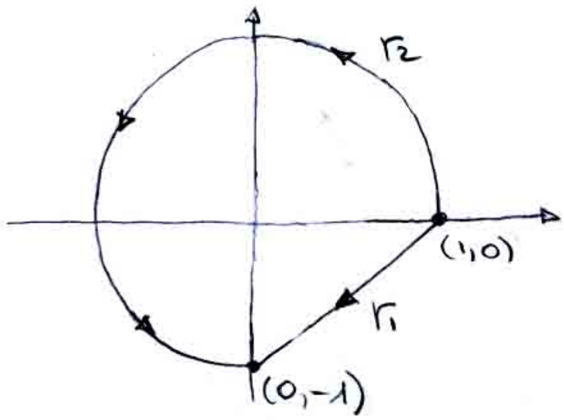
I simboli usati per indicarlo possono essere

$$\int_\gamma \omega \qquad \text{oppure} \qquad \int_\gamma F \cdot d\gamma.$$

Se F rappresenta un campo di forze piano allora il suo integrale curvilineo lungo γ rappresenta il lavoro compiuto per muoversi da $\gamma(a)$ a $\gamma(b)$ lungo γ.

ESEMPIO 7.

Sia $F(x,y) = (-y, x)$ e consideriamo due curve γ_1 e γ_2 che partono da $(1,0)$ e arrivano in $(0,-1)$.



$$\gamma_1 : \begin{cases} x(t) = 1-t \\ y(t) = -t \end{cases} \quad \text{con } t \in [0,1]$$

$$\gamma_2 : \begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \operatorname{sen} t \end{cases} \quad \text{con } t \in \left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$$

Allora

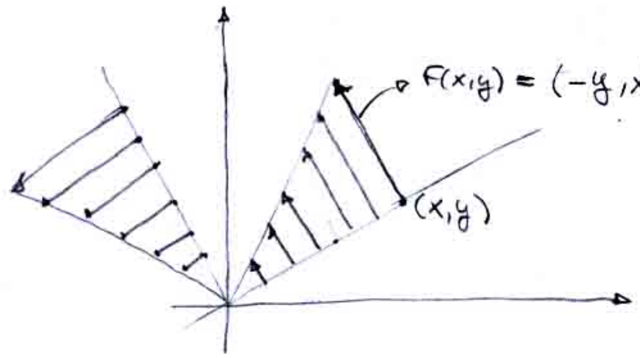
$$\int_{\gamma_1} F \cdot d\gamma_1 = \int_0^1 (t)(1-t)' + (1-t) \cdot (-t)' \, dt$$

$$= -\int_0^1 (\cancel{t} + 1 - \cancel{t}) \, dt = -1$$

$$\int_{\gamma_2} F \cdot d\gamma_2 = \int_0^{\frac{3\pi}{2}} (-\operatorname{sen} t) \cdot (\cos t)' + (\cos t) \cdot (\operatorname{sen} t)' \, dt$$

$$= \int_0^{\frac{3\pi}{2}} (\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t) = \frac{3\pi}{2}$$

In questo caso, vista la semplicità del campo vettoriale, possiamo provare anche a rappresentarlo graficamente:



Per ogni punto (x,y), il vettore applicato $(-y,x)$ è ortogonale alla retta passante per $(0,0)$ e (x,y) e di lunghezza uguale alla distanza di (x,y) da $(0,0)$.
Con queste osservazioni è immediato concludere che

$$\int_\gamma F\,dr = 0$$

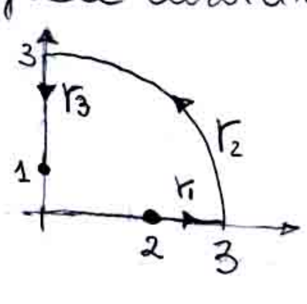
se γ è un segmento lungo una retta passante per $(0,0)$.
(in tal caso $(x',y') \perp F(x,y)$).

ESEMPIO 8.

Rappresentare graficamente il campo vettoriale

$$F(x,y) = \left(-\frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}}, -\frac{y}{(x^2+y^2)^{3/2}}\right) \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$$

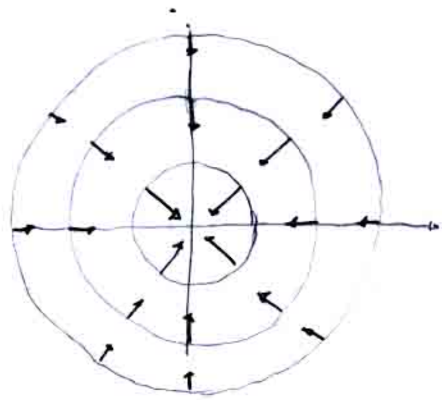
e calcolare l'integrale curvilineo di F lungo $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$ da $(2,0)$ a $(0,1)$.



Il modulo del vettore $F(x,y)$ è

$$\|F(x,y)\| = \sqrt{\left(\frac{-x}{(x^2+y^2)^{3/2}}\right)^2 + \left(\frac{-y}{(x^2+y^2)^{3/2}}\right)^2} = \frac{1}{x^2+y^2}$$

dunque diminuisce con il reciproco del quadrato della distanza da $(0,0)$. Inoltre $F(x,y)$ giace lungo la retta passante per $(0,0)$ e (x,y) e punta verso $(0,0)$.



1) $$\int_{\gamma_1} F\,d\gamma_1 = \int_2^3 -\frac{1}{t^2}\,dt = \left[\frac{1}{t}\right]_2^3 = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{6}$$

poiché $\gamma_1 = (t,0) \ : t \in [2,3]$

2) $$\int_{\gamma_2} F\,d\gamma_2 = 0 \qquad (F \perp \gamma_2')$$

poiché $\gamma_2 = (3\cos t, 3\sin t) \ : t \in [0, \pi/2]$

3) $$\int_{\gamma_3} F\,d\gamma_3 = \int_3^1 -\frac{1}{t^2}\,dt = \left[\frac{1}{t}\right]_3^1 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

Quindi

$$\int_{\gamma} F\,d\gamma = -\frac{1}{6} + 0 + \frac{2}{3} = \frac{1}{2}.$$

A differenza dell'integrale curvilineo del primo tipo, l'integrale curvilineo del secondo tipo dipende dal verso in cui viene percorso il sostegno della curva γ.

TEOREMA 2.

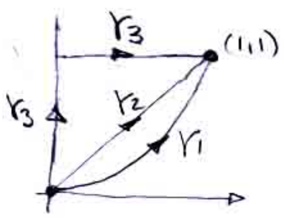
Se γ_1 e γ_2 sono due curve equivalenti allora

1) $\displaystyle\int_{\gamma_1} F\cdot d\gamma_1 = \int_{\gamma_2} F\cdot d\gamma_2$ se γ_1 e γ_2 hanno lo stesso verso

2) $\displaystyle\int_{\gamma_1} F\cdot d\gamma_1 = -\int_{\gamma_2} F\, d\gamma_2$ se γ_1 e γ_2 hanno verso opposto.

ESEMPIO 9.

Sia $F(x,y) = (y^2, 2xy)$ e calcoliamo $\int_\gamma F\, d\gamma$ lungo tre curve che vanno da $(0,0)$ a $(1,1)$



$\gamma_1: \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = t^2 \end{cases} : t\in[0,1]$

$\gamma_2: \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = t \end{cases} : t\in[0,1]$

$\gamma_3: \begin{cases} x(t) = 0 \\ y(t) = t \end{cases} : t\in[0,1] \quad \cup \quad \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = 1 \end{cases} : t\in[0,1]$

$$\int_{\gamma_1} F\, d\gamma_1 = \int_0^1 (t^4\cdot 1 + 2t^3\cdot 2t)\, dt = \left[t^5\right]_0^1 = 1$$

$$\int_{\gamma_2} F\, d\gamma_2 = \int_0^1 (t^2\cdot 1 + 2t^2\cdot 1)\, dt = \left[t^3\right]_0^1 = 1$$

infine

$$\int_{\gamma_3} F\,d\gamma_3 = \int_0^1 (t^2\cdot 0 + 0\cdot 0)\,dt + \int_0^1 (1\cdot 1 + 2t\cdot 0)\,dt = 1.$$

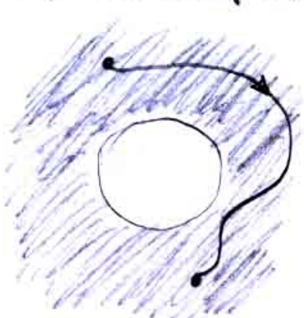
In questo caso i tre calcoli hanno dato lo stesso valore. Se definiamo la curva chiusa $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2^-$, dove γ_2^- è il la curva γ_2 con l'orientazione opposta, possiamo dire che

$$\int_{\gamma} F\,d\gamma = \int_{\gamma_1} F\,d\gamma_1 + \int_{\gamma_2^-} F\,d\gamma_2^- = \int_{\gamma_1} F\,d\gamma_1 - \int_{\gamma_2} F\,d\gamma_2 = 1-1=0$$

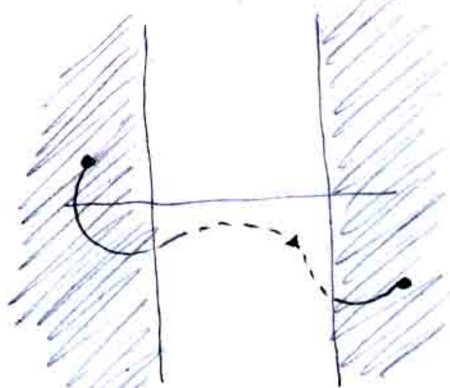
4. Forme differenziali esatte e chiuse

Un insieme $S \subset \mathbb{R}^2$ si dice CONNESSO (PER ARCHI) se $\forall P,Q \in S$ $\exists$ curva $\gamma:[a,b] \to S$ tale che $\gamma(a)=P$ e $\gamma(b)=Q$

Ad esempio



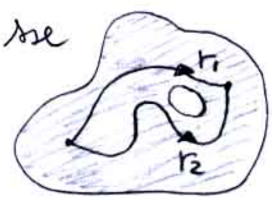
$\mathbb{R}^2 \setminus \{x^2+y^2 \le 1\}$ è connesso



$\{|x| \ge 1\}$ non è connesso

Sia Ω un insieme aperto e connesso di $\mathbb{R}^2$.
Una forma differenziale
$$\omega(x,y) = A(x,y)\,dx + B(x,y)\,dy$$
con le componenti A, B continue in Ω
si dice ESATTA in Ω se esiste una funzione, detta POTENZIALE, $U : \Omega \to \mathbb{R}$ differenziabile con le derivate continue tale che
$$\frac{\partial U}{\partial x}(x,y) = A(x,y) \quad e \quad \frac{\partial U}{\partial y}(x,y) = B(x,y) \quad \forall (x,y) \in \Omega.$$
Il seguente teorema riporta una caratterizzazione delle forme differenziali esatte.

TEOREMA 3.
ω è esatta in $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ aperto e connesso se



$$\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega$$
per ogni coppia di curve γ_1, γ_2 contenute in Ω e con gli stessi punti iniziali e finali.

dim.
Se ω è esatta allora per ogni curva $\gamma : [a,b] \to \Omega$
$$\int_\gamma \omega = \int_a^b \left(\frac{\partial U}{\partial x} \cdot x'(t) + \frac{\partial U}{\partial y} \cdot y'(t) \right) dt$$
$$= \int_a^b \frac{d\left(U(x(t),y(t))\right)}{dt}\,dt = \Big[U(x(t),y(t)) \Big]_a^b = U(\gamma(b)) - U(\gamma(a))$$

Questo significa che $\int_\gamma \omega$ dipende solo dal punto iniziale e finale e non dalla particolare curva in Ω che li congiunge.

Ora supponiamo che $\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega \quad \forall \gamma_1, \gamma_2 \quad (*)$

con gli stessi ~~punti~~ punti iniziali e finali e dimostriamo che ω è esatta.

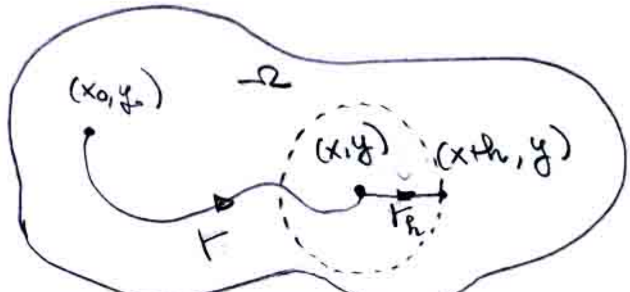
Fissiamo un punto $(x_0, y_0) \in \Omega$ e definiamo una funzione $U(x,y)$ nel seguente modo

$$U(x,y) = \int_\gamma \omega$$

dove γ è una qualunque curva in Ω che parte da (x_0, y_0) e arriva in (x,y).

Tale funzione U è ben definita perchè per ipotesi Ω è aperto e connesso e quindi esiste almeno una curva che congiunge (x_0,y_0) e (x,y).

Inoltre per $(*)$ il valore di $\int_\gamma \omega$ non dipende dalla particolare curva scelta.



In tal modo

$$U(x,y) = \int_\gamma \omega \quad e \quad U(x+h, y) = \int_{\gamma \cup \gamma_h} \omega = \int_\gamma \omega + \int_{\gamma_h} \omega$$

dove γ è una curva da (x_0,y_0) a (x,y)

e $\gamma_h(t) = (x+t,\ y)$ per $t \in [0,h]$

($h>0$ è scelto sufficientemente piccolo in modo che il sostegno di γ_h, un segmento, sia contenuto in Ω). Quindi

$$\frac{U(x+h,y)-U(x,y)}{h} = \frac{1}{h}\int_{\gamma_h}\omega = \frac{1}{h}\int_{t=0}^{h} A(x+t,y)\,dt$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Teorema della} \\ \text{media integrale}}}{=} A(x+t_h,\ y) \qquad \text{per qualche } t_h \in [0,h]$$

Passando al limite per $h \to 0$ abbiamo che $t_h \to 0$. Così per la continuità di A:

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x,y) = \lim_{h\to 0}\frac{U(x+h,y)-U(x,y)}{h} = \lim_{h\to 0} A(x+t_h,y) = A(x,y).$$

In modo simile si può far vedere che

$$\frac{\partial U}{\partial y}(x,y) = B(x,y)$$

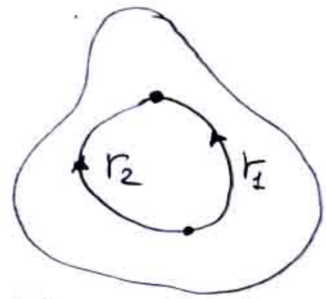
ossia ω è esatta ed ha U come funzione potenziale associata. $\square$

Osservazioni:

1) Se U è una funzione potenziale di ω allora lo è anche U + costante.

2) Se γ è una curva chiusa e ω è esatta allora

$$\int_\gamma \omega = \int_{\gamma_1 \cup \gamma_2^-} \omega = \int_{\gamma_1} \omega - \int_{\gamma_2} \omega = 0$$



dove $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2^-$. ($\gamma_2^-$ è la curva γ_2 con il senso di percorrenza invertito).

ESEMPIO 10.

La forma differenziale associata al campo vettoriale $F(x,y) = (y^2, 2xy)$ dell'esempio 9 è esatta in $\mathbb{R}^2$:

$$U(x,y) = xy^2 \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial x} = y^2, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = 2xy.$$

ESEMPIO 11.

La forma differenziale

$$\omega = -\frac{y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy$$

non è esatta in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ perché se γ è la curva chiusa data dalla circonferenza

$$x(t) = R\cos t, \quad y(t) = R\,\mathrm{sen}\,t \qquad t \in [0, 2\pi] \text{ con } R>0$$

allora

$$\int_\gamma \omega = \int_0^{2\pi} -\frac{R\,\mathrm{sen}\,t}{R^2}(R\cos t)' + \frac{R\cos t}{R^2}(R\,\mathrm{sen}\,t)'\,dt = 2\pi \neq 0$$

In modo simile si verifica che anche la forma $\omega = -y\,dx + x\,dy$ dell'esempio 7 non è esatta in $\mathbb{R}^2$.

La difficoltà di riconoscere una forma differenziale esatta sta nella "costruzione" della funzione potenziale. Le seguenti definizioni permettono di stabilire dei criteri di esattezza.

Una forma differenziale

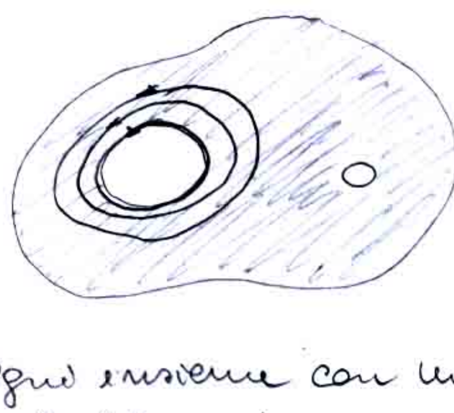
$$\omega(x,y) = A(x,y)\,dx + B(x,y)\,dy$$

con A e B differenziabili e con le loro derivate parziali continue in Ω aperto e connesso, si dice CHIUSA se

$$\frac{\partial A}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial B}{\partial x}(x,y) \quad \forall (x,y) \in \Omega .$$

Inoltre un insieme aperto e connesso Ω si dice SEMPLICEMENTE CONNESSO se ogni curva chiusa contenuta in Ω può essere ridotta mediante una deformazione continua a un punto senza uscire da Ω.

Ogni insieme convesso è semplicemente connesso



Ogni insieme con uno o più "buchi" non è semplicemente connesso

Vale il seguente risultato.

TEOREMA 4.

Sia Ω un aperto connesso e ω una forma differenziale differenziabile in Ω con le derivate continue.

1) Se ω è esatta in Ω allora ω è chiusa in Ω.

2) Se ω è chiusa in Ω e Ω è semplicemente connesso allora ω è esatta in Ω.

dim.

Dimostriamo solo il punto 1).

Se ω è esatta allora $\exists\, U : \Omega \to \mathbb{R}$:

$$\omega = A dx + B dy \quad e \quad \frac{\partial U}{\partial x} = A \, , \; \frac{\partial U}{\partial y} = B$$

Quindi per il teorema di Schwarz

$$\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial B}{\partial x}$$

$\square$

ESEMPIO 12.

La forma differenziale in $\mathbb{R}^2$

$$\omega = (y^2 + \cos x)\, dx + (2xy + y^2)\, dy$$

è chiusa perché

$$\frac{\partial (y^2 + \cos x)}{\partial y} = 2y = \frac{\partial (2xy + y^2)}{\partial x}$$

Dato che $\mathbb{R}^2$ è semplicemente connesso, ω è anche esatta. Per calcolare il potenziale U possiamo procedere nel seguente modo.

Dato che $\frac{\partial U}{\partial x} = y^2 + \cos x$, se integriamo rispetto a x otteniamo che

$$U = xy^2 + \operatorname{sen} x + c(y)$$

dove $c(y)$ è una funzione che dipende solo da y (è la costante additiva dovuta all'integrazione in x)

Siccome $\frac{\partial U}{\partial y} = 2xy + y^2$, si ha che

$$\frac{\partial U}{\partial y} = 2xy + c'(y) = 2xy + y^2$$

ossia $c'(y) = y^2$ e $c(y) = \frac{y^3}{3} + c$

(questa volta c è la "solita" costante additiva). Quindi

$$U(x,y) = xy^2 + \operatorname{sen} x + \frac{y^3}{3} + c.$$

ESEMPIO 13

Nell'esempio 8 la forma differenziale ω associata al campo vettoriale F è esatta su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ con potenziale

$$U(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Quindi

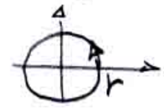
$$\int_r F\,dr = \int_r \omega = U(0,1) - U(2,0) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

ESEMPIO 14

Nell'esempio 11 la forma differenziale ω è chiusa in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right) = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)$$

ω non è esatta su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ perché

$$\int_r \omega = 2\pi \neq 0$$ con 

ma dato che ω è chiusa possiamo concludere che ω è esatta in qualunque insieme semplicemente connesso contenuto in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

Ad esempio ω è esatta nel semipiano $\{x>0\}$ e in tale insieme ammette una funzione potenziale

$$U(x,y) = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right).$$

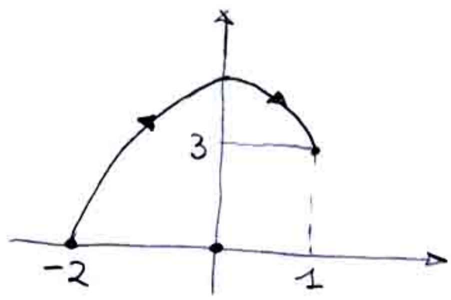
ESEMPIO 15.

Sia $\quad \omega = \dfrac{x}{x^2+y^2}\,dx + \left(\dfrac{y}{x^2+y^2}+x^2\right)dy \quad$ per $(x,y)\in\Omega = \mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$

Calcolare $\int_\gamma \omega$ dove γ è l'arco della parabola $y=4-x^2$ per $x\in[-2,1]$ da $(-2,0)$ a $(1,3)$.

Si noti che $\omega = \omega_1 + \omega_2$ con

$$\omega_1 = \frac{x}{x^2+y^2}\,dx + \frac{y}{x^2+y^2}\,dy \quad \text{e} \quad \omega_2 = x^2\,dy$$



Consideriamo prima la forma ω_1.

ω_1 è chiusa in Ω:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)$$

Dato che Ω non è semplicemente connesso non è detto che ω_1 sia esatta in Ω.

L'eventuale funzione potenziale U è tale che

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{x}{x^2+y^2} \quad e \quad \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{y}{x^2+y^2} \qquad (*)$$

e integrando la prima equazione rispetto a x otteniamo

$$U(x,y) = \frac{1}{2}\log(x^2+y^2) + c(y)$$

derivando rispetto a y concludiamo che $c'(y)=0$.
Quindi

$$U(x,y) = \frac{1}{2}\log(x^2+y^2) + \text{cost.}$$

Visto che U soddisfa $(*)$ $\forall (x,y) \in \Omega$, possiamo affermare che ω_1 è effettivamente esatta in Ω.
Quindi

$$\int_\gamma \omega_1 = U(1,3) - U(-2,0)$$

$$= \frac{1}{2}\log 10 - \frac{1}{2}\log 4 = \frac{1}{2}\log(5/2)$$

ω_2 non è chiusa (e dunque neanche esatta)

$$\frac{\partial}{\partial y}(0) = 0 \neq 2x = \frac{\partial}{\partial x}(x^2)$$

Così il calcolo di $\int_\gamma \omega_2$ va fatto esplicitamente

$$\int_\gamma \omega_2 = \int_{-2}^{1}\left(0 \cdot t' + t^2 \cdot (4-t^2)'\right) dt = \int_{-2}^{1}(-2t^3) = \left[-\frac{t^4}{2}\right]_{-2}^{1} = \frac{15}{2}$$

perché $\gamma(t) = (t, 4-t^2)$ per $t \in [-2,1]$.
Infine

$$\int_\gamma \omega = \int_\gamma \omega_1 + \int_\gamma \omega_2 = \frac{1}{2}\log(5/2) + \frac{15}{2}.$$

5. Il teorema di GAUSS-GREEN nel piano

TEOREMA 5.

Sia $D \subset \mathbb{R}^2$ un dominio semplice rispetto sia a x che a y. Sia

$$\omega(x,y) = A(x,y)\,dx + B(x,y)\,dy$$

una forma differenziabile con A, B e le loro derivate continue in un aperto $\Omega \supset D$.

Allora vale la formula di GAUSS-GREEN

$$\iint_D \left(\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y}\right) dx\,dy = \int_{\partial D^+} (A\,dx + B\,dy)$$

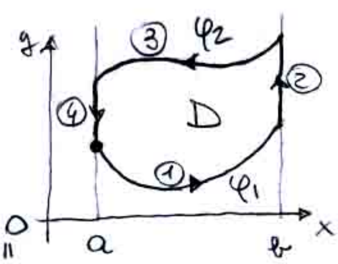
dove $\partial^+ D$ indica la curva chiusa che ha per sostegno la frontiera di D percorsa in senso antiorario.

dim

Se $D = \{(x,y) : x \in [a,b],\ y \in [\varphi_1(x), \varphi_2(x)]\}$ con φ_1, φ_2 funzioni continue, allora

$$\iint_D \frac{\partial A}{\partial y}\,dx\,dy = \int_{x=a}^{b} \left(\int_{y=\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{\partial A}{\partial y}\,dy \right) dx = \int_{x=a}^{b} \Big[A(x,y) \Big]_{y=\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dx$$

$$= \int_a^b \big(A(x,\varphi_2(x)) - A(x,\varphi_1(x)) \big)\,dx$$



mentre

$$\int_{\partial^+ D} A\,dx = \underbrace{\int_a^b A(t,\varphi_1(t)) \cdot (\overset{=1}{t'})\,dt}_{①} + \underbrace{\int_{\varphi_1(b)}^{\varphi_2(b)} A(b,t) \cdot (\overset{=0}{b'})\,dt}_{②}$$

$$+ \underbrace{\int_b^a A(t,\varphi_2(t))\,(\overset{=1}{t'})\,dt}_{③} + \underbrace{\int_{\varphi_2(a)}^{\varphi_1(a)} A(a,t)\,(\overset{=0}{a'})\,dt}_{④}$$

da cui

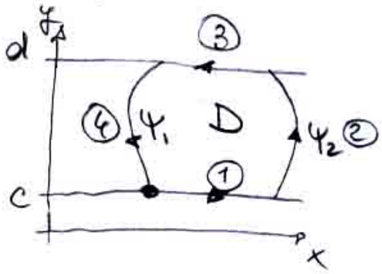
$$-\iint_D \frac{\partial A}{\partial y}\,dx\,dy = \int_{\partial^+ D} A\,dx \qquad (1)$$

In modo simile se $D = \{(x,y) : y \in [c,d],\ x \in [\psi_1(y), \psi_2(y)]\}$ con ψ_1, ψ_2 funzioni continue, allora

$$\iint_D \frac{\partial B}{\partial x}\,dx\,dy = \int_{y=c}^{d}\left(\int_{x=\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} \frac{\partial B}{\partial x}\,dx\right)dy = \int_{y=c}^{d} \Big[B(x,y)\Big]_{x=\psi_1(y)}^{\psi_2(y)}$$

$$= \int_c^d \Big(B(\psi_2(y),y) - B(\psi_1(y),y)\Big)\,dy$$

mentre



$$\int_{\partial^+ D} B\,dy = \underbrace{\int_{\psi_1(c)}^{\psi_2(c)} B(t,c)\cdot\overset{=0}{(c')}\,dt}_{1}$$

$$+ \underbrace{\int_c^d B(\psi_2(t),t)\cdot\overset{=1}{(t')}\,dt}_{2} + \underbrace{\int_{\psi_2(d)}^{\psi_1(d)} B(t,d)\cdot\overset{=0}{(d')}\,dt}_{3}$$

$$+ \underbrace{\int_d^c B(\psi_1(t),t)\cdot\overset{=1}{(t')}\,dt}_{4}$$

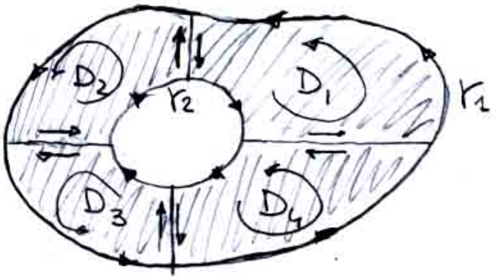
da cui

$$\iint_D \frac{\partial B}{\partial x}\,dx\,dy = \int_{\partial^+ D} B\,dy \qquad (2)$$

Visto che D è semplice rispetto ad entrambi gli assi valgono sia la (1) che la (2) e sommando membro a membro otteniamo la tesi. $\square$

Osservazione.

Il teorema di GAUSS-GREEN vale per domini più generali. È sufficiente che il dominio sia decomponibile in domini per cui valgono le ipotesi del teorema precedente. Ad esempio il dominio $D = D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup D_4$



è unione dei 4 domini D_i che sono semplici rispetto ad entrambi gli assi. Quindi

$$\iint_D \left(\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y}\right) dx\,dy = \sum_{k=1}^{4} \iint_{D_k} \left(\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y}\right) dx\,dy$$

$$\overset{GG}{=} \sum_{k=1}^{4} \int_{\partial D_k^+} (A\,dx + B\,dy) = \int_{\gamma_1} A\,dx + B\,dy + \int_{\gamma_2} A\,dx + B\,dy$$

I segmenti vengono percorsi in entrambe le direzioni dunque il loro contributo è nullo.

Si noti che la frontiera di ∂D è data da γ_1 orientata in senso antiorario e da γ_2 orientata in senso orario.

ESEMPIO 16.

Mostrare che se γ è una curva chiusa semplice orientata positivamente non passante per $(0,0)$ allora

$$\int_\gamma \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2+y^2} = \begin{cases} 0 & \text{se } (0,0) \notin D \\ 2\pi & \text{se } (0,0) \in D \end{cases}$$

dove D è l'insieme delimitato da γ.

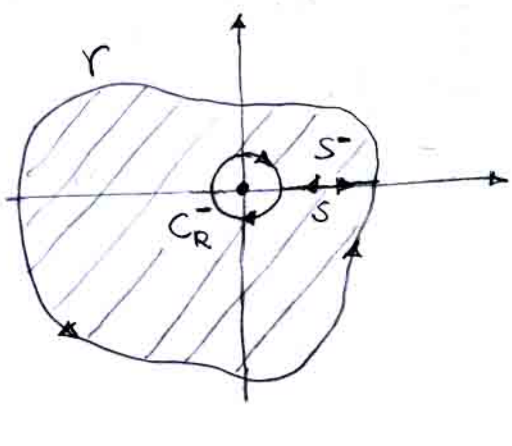
Dall'esempio 14 sappiamo che tale forma differenziale è chiusa su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Quindi se $(0,0) \notin D$

per il teorema di GAUSS-GREEN

$$\int_\gamma \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2+y^2} \overset{GG}{=} \iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right)\right) dx\,dy \overset{\substack{\text{f.d.} \\ \text{chiusa}}}{=} 0.$$

Se $(0,0) \in D$ allora il teorema di GAUSS-GREEN non può essere applicato direttamente perchè in $(0,0)$ la forma differenziale non è definita. Questo problema può essere evitato considerando il percorso chiuso $\gamma \cup S^- \cup C_R^- \cup S$



dove C_R è una circonferenza di centro $(0,0)$ e raggio R sufficiente piccolo in modo che $C_R \subset D$, mentre S è un segmento che unisce C_R a γ. Dato che questo nuovo percorso delimita un insieme che non contiene $(0,0)$, per quanto detto prima, si ha che

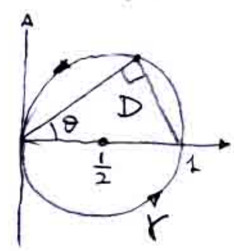
$$0 = \int_{\gamma \cup S^- \cup C_R^- \cup S} \omega$$

$$= \int_\gamma \omega - \cancel{\int_S \omega} - \int_{C_R} \omega + \cancel{\int_S \omega} \overset{\text{Esempio 11}}{=} \int_\gamma \omega - 2\pi$$

Quindi
$$\int_\gamma \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2+y^2} = 2\pi .$$

ESEMPIO 17.

Calcolare $\int_\gamma \omega$ per $\omega = (x-y^3)\,dx + (y^3+x^3)\,dy$ dove γ è la circonferenza di centro $(\frac{1}{2},0)$ e raggio $\frac{1}{2}$ percorsa in senso antiorario.



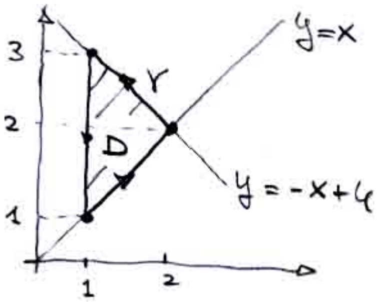
$$\int_\gamma \omega \overset{44}{=} \iint_D \left(\frac{\partial (y^3+x^3)}{\partial x} - \frac{\partial (x-y^3)}{\partial y} \right) dx\,dy$$

$$= 3\iint_D (x^2+y^2)\,dx\,dy = 3\int_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\rho=0}^{\cos\theta} \rho^2 \cdot \rho\, d\rho\, d\theta = 6\int_{\theta=0}^{\pi/2} \frac{\cos^4\theta}{4}\, d\theta$$

$$= \frac{3}{2}\int_{\theta=0}^{\pi/2} \left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)^2 d\theta = \frac{3}{8}\left(\frac{\pi}{2} + 0 + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{9\pi}{32} .$$

ESEMPIO 18.

Calcolare $\int_\gamma 2(x^2+y^2)\,dx + (x+y)^2\,dy$ dove γ è il perimetro del triangolo di vertici $(1,1), (2,2), (1,3)$ percorso in senso antiorario.



Dato che il calcolo diretto sembra piuttosto tedioso, possiamo "convertire" l'integrale curvilineo in un integrale doppio usando la formula di GAUSS-GREEN

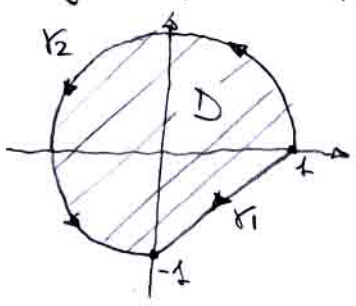
$$\int_\gamma \omega \overset{GG}{=} \iint_D \left(\frac{\partial((x+y)^2)}{\partial x} - \frac{\partial(2(x^2+y^2))}{\partial y}\right)dx\,dy$$

$$=2\iint_D (x-y)\,dx\,dy = 2\int_{x=1}^{2}\left(\int_{y=x}^{-x+4}(x-y)\,dy\right)dx$$

$$\underset{\substack{\uparrow\\ t=x-y\\ dt=-dy}}{=} 2\int_{x=1}^{2}\left(-\int_{t=0}^{2x-4} t\,dt\right)dx = -\cancel{2}\int_{x=1}^{2}\frac{4(x-2)^2}{\cancel{2}}\,dx = -4\left[\frac{(x-2)^3}{3}\right]_1^2 = -\frac{4}{3}.$$

ESEMPIO 19.

Dall'esempio 7 si ricava facilmente che se $\omega = -y\,dx + x\,dy$ e $\gamma = \gamma_2 \cup \gamma_1^-$ con



allora $\displaystyle\int_\gamma \omega = \int_{\gamma_2} \omega - \int_{\gamma_1} \omega = \frac{3\pi}{2} + 1$

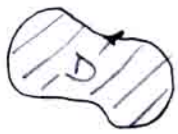
Allo stesso risultato si può arrivare usando il teorema di GAUSS-GREEN

$$\int_\gamma \omega = \iint_D \left(\frac{\partial(x)}{\partial x} - \frac{\partial(-y)}{\partial y} \right) dx\,dy = 2\int dx\,dy$$

$$= 2|D| = 2\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{1}{2}\right) = \frac{3\pi}{2} + 1 .$$

Osservazione: l'esempio precedente indica che la formula di GAUSS-GREEN permette di esprimere il calcolo di un'area come un integrale curvilineo

$$|D| = \iint_D dx\,dy \overset{GG}{=} \frac{1}{2} \int_{\partial D^+} x\,dy - y\,dx$$



∂D^+

Inoltre se una curva chiusa è espressa in coordinate parametriche polari $\rho(t)$, $\theta(t) = t \in [a,b]$ allora l'area della parte di piano delimitata dalla curva è data da:

$$|D| = \frac{1}{2} \int_{\partial D^+} (x\,dy - y\,dx) \qquad \begin{cases} x(t) = \rho(t)\cos t \\ y(t) = \rho(t)\,\mathrm{sen}\,t \end{cases}$$

$$= \frac{1}{2} \int_a^b (\rho(t)\cos t)(\rho(t)\,\mathrm{sen}\,t)' - (\rho(t)\,\mathrm{sen}\,t)(\rho(t)\cos t)'\,dt$$

$$= \frac{1}{2} \int_a^b \left(\rho\cos t(\rho'\,\mathrm{sen}\,t + \rho\cos t) - \rho\,\mathrm{sen}\,t(\rho'\cos t - \rho\,\mathrm{sen}\,t)\right) dt$$

$$= \frac{1}{2} \int_a^b \rho^2(t) \cdot (\cos^2 t + \mathrm{sen}^2 t)\,dt = \frac{1}{2} \int_a^b \rho^2(t)\,dt.$$

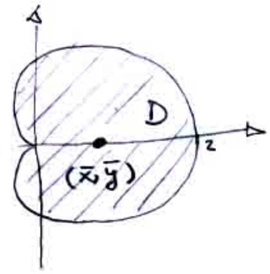
ESEMPIO 20.

Calcolare il centro di massa della parte di piano delimitata dal CARDIOIDE

$$\rho(t) = 1 + \cos t \,, \quad \theta(t) = t \quad \text{per } t \in [0, 2\pi]$$

nel caso omogeneo ($\delta = 1$)

Calcoliamo prima la massa



$$|D| = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \rho^2(t)\, dt$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 + 2\cos t + \cos^2 t)\, dt$$

$$= \frac{1}{2} \left(2\pi + 0 + \frac{2\pi}{2} \right) = \frac{3\pi}{2}$$

Per simmetria $\bar{y} = 0$. Calcoliamo $\bar{x}$:

$$\bar{x} = \frac{1}{|D|} \iint_D x \, dx\,dy = \frac{2}{3\pi} \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\rho=0}^{1+\cos\theta} \rho \cdot \cos\theta \cdot \rho \, d\rho\, d\theta$$

$$= \frac{2}{3\pi} \int_0^{2\pi} \left[\frac{\rho^3}{3} \right]_0^{1+\cos\theta} \cos\theta \, d\theta = \frac{2}{9\pi} \int_0^{2\pi} (1 + \cos\theta)^3 \cos\theta \, d\theta$$

$$= \frac{2}{9\pi} \int_0^{2\pi} \left(\cos\theta + 3\cos^2\theta + 3\cos^3\theta + \cos^4\theta \right) d\theta$$

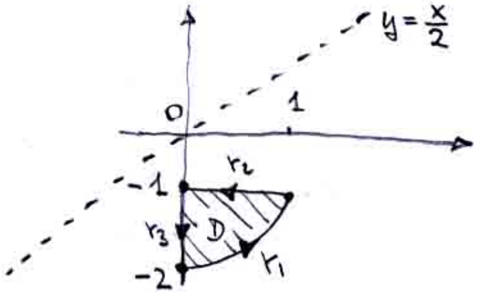
$$= \frac{2}{9\pi} \left(0 + 3 \cdot \frac{\cancel{2}\pi}{\cancel{2}} + 0 + \frac{3}{4}\pi \right) = \frac{5}{6}.$$

ESEMPIO 21.

Calcolare $\int_\gamma \omega$ dove

$$\omega = \left(\frac{1}{\sqrt{x-2y}} + \frac{1}{x^2+1}\right)dx + \left(\frac{-2}{\sqrt{x-2y}} + 3x^2\right)dy$$

e γ è il percorso chiuso



con γ_2, γ_3 segmenti e γ_1 un arco della parabola $y=x^2-2$

Per GAUSS-GREEN

$$\int_\gamma \omega = \iint_D \left(\frac{\partial\left(\frac{-2}{\sqrt{x-2y}}+3x^2\right)}{\partial x} - \frac{\partial\left(\frac{1}{\sqrt{x-2y}}+\frac{1}{x^2+1}\right)}{\partial y}\right)dxdy$$

$$= \iint_D \left(\left(\cancel{-\frac{1}{2}\cdot\frac{(-2)}{(x-2y)^{3/2}}} + 6x\right) - \left(\cancel{-\frac{1}{2}\frac{(-2)}{(x-2y)^{3/2}}} + 0\right)\right)dxdy$$

$$= \int_{x=0}^{1} 6x \int_{y=x^2-2}^{-1} dy\, dx = 6\int_0^1 x(1-x^2)\,dx = 6\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{3}{2}$$

Si osservi che

$$\omega_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{x-2y}} + \frac{1}{x^2+1}\right)dx + \left(\frac{-2}{\sqrt{x-2y}}\right)dy$$

è esatta nel semipiano $\{y \le \frac{x}{2}\}$ e una sua funzione potenziale è

$$U(x,y) = 2\sqrt{x-2y} + \operatorname{arctg} x$$

Quindi

$$\int_\gamma \omega = \int_{\gamma_1\cup\gamma_2\cup\gamma_3} 3x^2 dy = \int_{\gamma_1} 3x^2 dy = \int_0^1 3t^2(2t)\,dt = \left[\frac{3}{2}t^4\right]_0^1 = \frac{3}{2}.$$