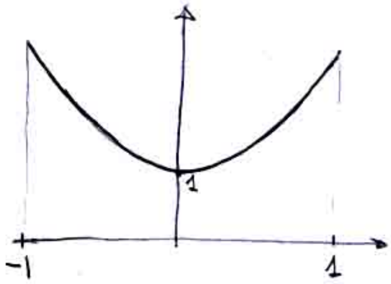
ESERCIZIO 1.

Calcolare la lunghezza dell'arco di "catenaria" γ dato dal grafico di $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ per $x \in [-1, 1]$.

$$|\gamma| = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + (f'(t))^2}\, dt = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + \left(\frac{e^t - e^{-t}}{2}\right)^2} dt$$

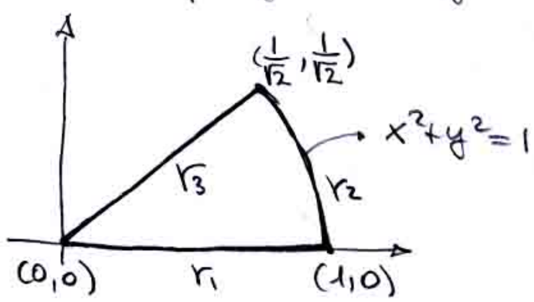
$$= \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \sqrt{4 + e^{2t} + e^{-2t} - 2}\; dt = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} (e^t + e^{-t})\, dt$$

$$= \frac{1}{2} \left[e^t - e^{-t} \right]_{-1}^{1} = e - e^{-1}.$$



ESERCIZIO 2.

Calcolare $\int_\gamma f\, ds$ con $f(x,y) = x + 8y^2$ e γ la curva



$\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$

Il sostegno della curva γ è dato dall'unione di tre curve $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$.

Per linearità possiamo scrivere

$$\int_\gamma f\, ds = \int_{\gamma_1} f\, ds + \int_{\gamma_2} f\, ds + \int_{\gamma_3} f\, ds$$

$\gamma_1: \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = 0 \end{cases}$ per $t \in [0,1]$, quindi

$$\int_{\gamma_1} f\,ds = \int_0^1 (t + 8 \cdot 0^2) \cdot \sqrt{1^2 + 0^2}\,dt$$

$$= \int_0^1 t\,dt = \left[t^2/2 \right]_0^1 = \frac{1}{2}.$$

$\gamma_2: \begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \operatorname{sen} t \end{cases}$ per $t \in [0, \pi/4]$, quindi

$$\int_{\gamma_2} f\,ds = \int_0^{\pi/4} (\cos t + 8 \operatorname{sen}^2 t) \cdot \sqrt{(-\operatorname{sen} t)^2 + (\cos t)^2}\,dt$$

$$= \left[\operatorname{sen} t \right]_0^{\pi/4} + 8 \left[\frac{1}{2} t - \frac{1}{2} \operatorname{sen} t \cos t \right]_0^{\pi/4}$$

$$= + \frac{1}{\sqrt{2}} + 4 \cdot \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \right) = + \frac{1}{\sqrt{2}} + \pi - 2$$

$\gamma_3: \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = t \end{cases}$ per $t \in [0, \frac{1}{\sqrt{2}}]$, quindi

$$\int_{\gamma_3} f\,ds = \int_0^{1/\sqrt{2}} (t + 8t^2) \cdot \sqrt{1^2 + 1^2}\,dt$$

$$= \sqrt{2} \left[\frac{t^2}{2} + \frac{8t^3}{3} \right]_0^{1/\sqrt{2}} = \frac{4}{3} + \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

Infine

$$\int_{\gamma} f\,ds = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \pi - 2 + \frac{4}{3} + \frac{1}{2\sqrt{2}} = \pi - \frac{1}{6} + \frac{3}{2\sqrt{2}}.$$

ESERCIZIO 3.

Calcolare $\int_\gamma f \, ds$ dove $f(x,y) = xy$ e γ è l'arco dell'ellisse $x^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 = 1$ contenuto nel primo quadrante $\{x, y \geq 0\}$.

Le equazioni parametriche di γ sono

$$x(t) = \cos t \,, \quad y(t) = 2 \operatorname{sen} t \quad \text{per } t \in [0, \tfrac{\pi}{2}]$$

Dunque

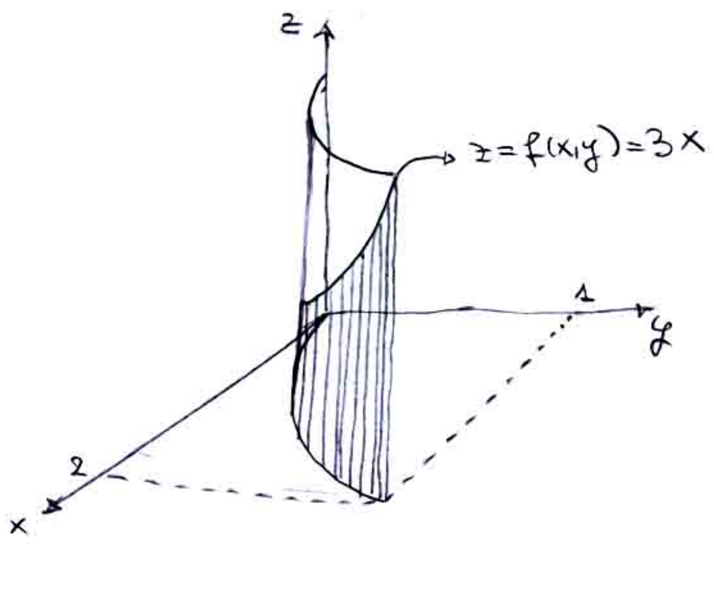
$$\int_\gamma f \, ds = \int_0^{\pi/2} (\cos t)(2 \operatorname{sen} t) \sqrt{(-\operatorname{sen} t)^2 + (2\cos t)^2} \, dt$$

$$= \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 + 3\cos^2 t} \cdot \cos t \cdot 2 \operatorname{sen} t \, dt \overset{\begin{cases} u = 1 + 3\cos^2 t \\ du = 3 \cdot 2 \cos t (-\operatorname{sen} t) \, dt \end{cases}}{=}$$

$$= \int_4^1 \sqrt{u} \left(-\frac{1}{3}\right) du = \frac{1}{3} \left[\frac{u^{3/2}}{3/2}\right]_1^4 = \frac{14}{9}.$$

ESERCIZIO 4.

Calcolare la superficie del cilindro parabolico $y = x^2/4$ delimitata dai piani $z = 0$, $x = 0$, $z = 3x$, $y = 1$.



La superficie richiesta è data dall'integrale

$\int_\gamma f\,ds$ dove $f(x,y)=3x$ e γ è l'arco della parabola $y=\frac{x^2}{4}$ per $x\in[0,2]$:

$$\begin{cases} u = 1+\frac{x^2}{4} \\ du = \frac{x}{2}\,dx \end{cases}$$

$$\int_0^2 3x\sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx = 3\int_0^2 x\sqrt{1+\frac{x^2}{4}}\,dx \stackrel{*}{=}$$

$$= 6\int_1^2 \sqrt{u}\,du = 6\left[\frac{u^{3/2}}{3/2}\right]_1^2 = 8\sqrt{2}-4.$$

ESERCIZIO 5:

Calcolare il centro di massa della curva

CARDIOIDE $\begin{cases} \rho(t) = 1+\cos t \\ \theta(t) = t \end{cases}$ per $t\in[0,2\pi]$

Dall'esempio 5 sappiamo che $|\gamma|=8$.
Per simmetria $\bar{y}=0$. Calcoliamo $\bar{x}$.

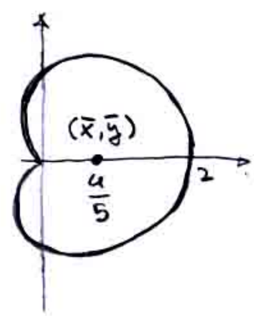
$$\bar{x} = \frac{1}{|\gamma|}\int_0^{2\pi} x(t)\cdot\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,dt =$$

$$= \frac{1}{8}\int_0^{2\pi} (1+\cos t)\cos t \cdot 2|\cos(t/2)|\,dt \stackrel{t=2s}{=}$$

$$= \int_0^{\pi/2} (1+\cos(2s))(\cos 2s)\cos s\,ds$$

$$= 2\int_0^{\pi/2} (1-\mathrm{sen}^2(s))(1-2\,\mathrm{sen}^2(s))\,d(\mathrm{sen}(s))$$

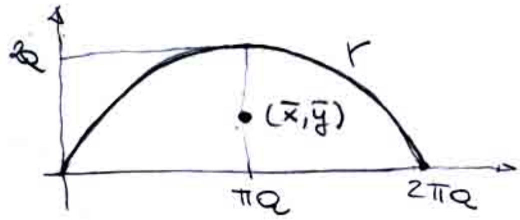
$$= 2\left[\mathrm{sen}(s) - \mathrm{sen}^3(s) + \frac{2}{5}\mathrm{sen}^5(s)\right]_0^{\pi/2} = \frac{4}{5}$$



ESERCIZIO 6.

Calcolare il centro di massa dell'arco di CICLOIDE omogeneo dato dalle equazioni parametriche

$$\begin{cases} x(t) = a(t - \operatorname{sen} t) \\ y(t) = a(1-\cos t) \end{cases} \quad \forall t \in [0, 2\pi] \quad \text{con } a>0$$



Per simmetria $\bar{x} = \pi a$. Ora calcoliamo $|\gamma|$.

$$(x'(t))^2 + (y'(t))^2 = a^2\left((1-\cos t)^2 + (\operatorname{sen} t)^2\right) = 4a^2\left(\operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right)\right)^2$$

$$\frac{1-\cos t}{2} = \operatorname{sen}^2\frac{t}{2}$$

quindi

$$|\gamma| = \int_\gamma ds = 2a\int_0^{2\pi} \left|\operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right)\right| dt = 4a\int_0^{\pi} \operatorname{sen}\frac{t}{2}\, dt$$

$$= 8a\left[-\cos\frac{t}{2}\right]_0^{\pi} = 8a.$$

Infine

$$\bar{y} = \frac{1}{8a}\int_\gamma y\, ds = \frac{1}{8a}\int_0^{2\pi} a(1-\cos t)\cdot 2a\left|\operatorname{sen}\frac{t}{2}\right| dt$$

$$= a\int_0^{\pi}\left(\operatorname{sen}\frac{t}{2}\right)^3 dt = a\int_0^{\pi}\left(1-\cos^2\frac{t}{2}\right) d\left(-2\cos\frac{t}{2}\right)$$

$$= -2a\left[\cos\frac{t}{2} - \frac{\cos^3\frac{t}{2}}{3}\right]_0^{\pi} = \frac{4a}{3}$$

Dunque le coordinate del centro di massa di γ sono: $(\bar{x},\bar{y}) = \left(\pi a, \frac{4a}{3}\right)$.

ESERCIZIO 7.

Calcolare il rapporto tra il momento d'inerzia I rispetto all'asse z e la massa m di filo di densità δ che occupa l'insieme:

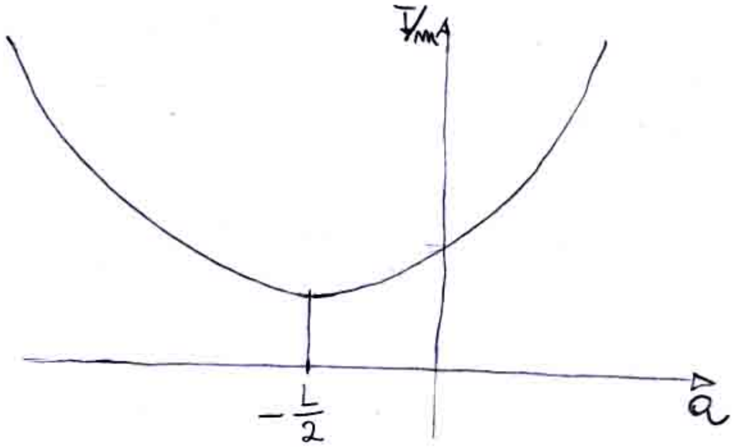
$$\{(x,0,0) \;:\; x\in[a,a+L]\}$$

dove $a\in\mathbb{R}$ e $L>0$.
Per quale valore di a, il rapporto I/m è minimo?

La massa $m = \delta \cdot L$.

$$I = \int_{x=a}^{a+L} x^2 \delta \, dx = \delta\left[\frac{x^3}{3}\right]_a^{a+L} = \frac{\delta}{3}\left((a+L)^3 - a^3\right)$$

e quindi $$\frac{I}{m} = \frac{1}{3L}\cdot\left((a+L)^3 - a^3\right) = a^2 + aL + \frac{L^2}{3}$$



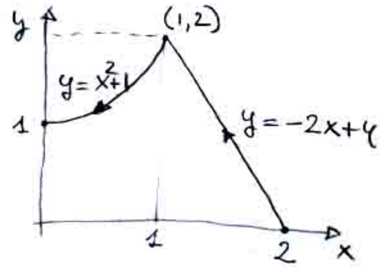
La parabola I/m assume il minimo nel vertice:

$$\left(a^2 + aL + \frac{L^2}{3}\right)' = 2a + L = 0 \quad \Rightarrow \quad a = -\frac{L}{2}$$

Quindi il rapporto I/m è minimo quando l'asse z passa per il punto medio del filo (ossia il suo centro di massa).

ESERCIZIO 8

Sia $F(x,y) = (xy, e^y)$. Calcolare $\int_\gamma F d\gamma$ dove γ è il seguente percorso da $(2,0)$ a $(0,1)$:



Siano

$$\gamma_1(t) = (t, -2t+4) \quad t \in [1,2], \quad \gamma_1'(t) = (1,-2)$$

$$\gamma_2(t) = (t, t^2+1) \quad t \in [0,1]; \quad \gamma_2'(t) = (1, 2t)$$

Allora $\gamma = \gamma_1^- \cup \gamma_2^-$ e quindi

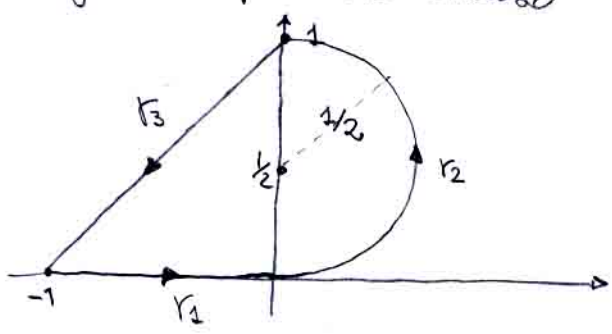
$$\int_\gamma F \cdot d\gamma = -\int_1^2 \left((t\cdot(-2t+4))(1) + e^{-2t+4}\cdot(-2) \right) dt$$

$$- \int_0^1 \left(t\cdot(t^2+1)(1) + e^{t^2+1}\cdot(2t) \right) dt$$

$$= -\left[-\frac{2t^3}{3} + \frac{4t^2}{2} + e^{-2t+4} \right]_1^2 - \left[\frac{t^4}{4} + \frac{t^2}{2} + e^{t^2+1} \right]_0^1 = -\frac{37}{12} + e$$

ESERCIZIO 9

Sia $F(x,y) = (xy, x^2y)$. Calcolare $\int_\gamma F d\gamma$ dove γ è il seguente percorso chiuso



$$\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$$

γ_2 è un arco di circonferenza di centro $(0, \frac{1}{2})$ e raggio $\frac{1}{2}$.

$\gamma_1(t) = (t, 0)$ per $t \in [-1, 0]$, $\gamma_1'(t) = (1, 0)$

$\gamma_2(t) = \left(\frac{1}{2}\cos t, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{sen} t\right)$ per $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $\gamma_2'(t) = \left(-\frac{1}{2}\operatorname{sen} t, \frac{1}{2}\cos t\right)$

$\gamma_3^-(t) = (t, t+1)$ per $t \in [-1, 0]$, $\gamma_3^{-\prime}(t) = (1, 1)$

Così

$$\int_{\gamma_1} F d\gamma_1 = 0$$

$$\int_{\gamma_2} F d\gamma_2 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi/2} \left(\frac{1}{4}(\cos t + \cos t \operatorname{sen} t)\left(-\frac{1}{2}\operatorname{sen} t\right) + \frac{1}{8}(\cos^2 t + \cos^2 \operatorname{sen} t)\left(\frac{1}{2}\cos t\right) \right) dt$$

$$= -\frac{1}{4}\int_0^{\pi/2} \cos t \cdot \operatorname{sen}^2 t \, dt + \frac{1}{8}\int_0^{\pi/2} \underbrace{\cos^3 t}_{=\cos t(1-\operatorname{sen}^2 t)} dt$$

$$= \frac{1}{8}\int_0^{\pi/2} \cos t \, dt - \frac{3}{8}\int_0^{\pi/2} \cos t \cdot \operatorname{sen}^2(t) \, dt$$

$$= \frac{1}{8}\left[\operatorname{sen} t\right]_0^{\pi/2} - \frac{3}{8}\left[\frac{\operatorname{sen}^3 t}{3}\right]_0^{\pi/2} = 0$$

$$\int_{\gamma_3} F d\gamma_3 = -\int_{-1}^{0} \left(t(t+1) + t^2(t+1)\right) dt$$

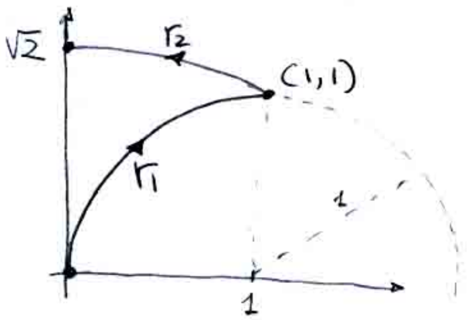
$$= +\left[\frac{t^4}{4} + 2\frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2}\right]_0^{-1} = \frac{1}{4} - \frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$$

Infine

$$\int_\gamma F d\gamma = 0 + 0 + \frac{1}{12} = \frac{1}{12}$$

ESERCIZIO 10.

Sia $F(x,y) = (x+y^2, y)$. Calcolare $\int_\gamma F\,d\gamma$ dove γ è il seguente percorso da $(0,0)$ a $(0,\sqrt{2})$:



$\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$

γ_1 è un arco della circonferenza di centro $(1,0)$ e raggio 1, mentre γ_2 è un arco della parabola $x = 2-y^2$.

La forma differenziale ω associata a F si può scrivere come

$$\omega = \omega_1 + \omega_2 \quad \text{con } \omega_1 = x\,dx + y\,dy,\ \omega_2 = y^2\,dx$$

ω_1 è chiusa su $\mathbb{R}^2$ e quindi esatta con funzione potenziale $U(x,y) = \dfrac{x^2+y^2}{2}$:

$$\omega_1 = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy = x\,dx + y\,dy.$$

Quindi

$$\int_\gamma \omega_1 = U(0,\sqrt{2}) - U(0,0) = 1.$$

ω_2 invece non è chiusa e quindi è necessario fare il calcolo esplicito di $\int_\gamma \omega_2$.

Si noti che

$\gamma_1(t) = (1+\cos(t), \sin t)$, $t \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$, $\gamma_1'(t) = (-\sin t, \cos t)$

$\gamma_2(t) = (2-t^2, t)$, $t \in [1, \sqrt{2}]$, $\gamma_2'(t) = (-2t, 1)$

$$\int_\gamma \omega_2 = \int_{\gamma_1} \omega_2 + \int_{\gamma_2} \omega_2$$

$$= -\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \operatorname{sen}^2 t \cdot \underbrace{(-\operatorname{sen} t)\,dt}_{d(\cos t)} + \int_1^{\sqrt{2}} t^2(-2t)\,dt$$

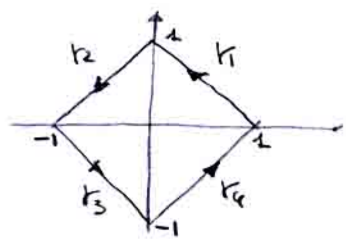
$$= -\left[\cos t - \frac{\cos^3 t}{3}\right]_{\pi/2}^{\pi} - 2\left[\frac{t^4}{4}\right]_1^{\sqrt{2}} = -\frac{5}{6}$$

e quindi

$$\int_\gamma F d\gamma = \int_\gamma \omega = 1 - \frac{5}{6} = \frac{1}{6}.$$

ESERCIZIO 11.

Calcolare $\displaystyle\int_\gamma \frac{dx-dy}{x+y+2}$ dove γ è il percorso chiuso



$\gamma_1(t) = (1-t, t)$, $t \in [0,1]$; $\gamma_3(t) = (-1+t, -t)$ $t \in [0,1]$

$\gamma_2(t) = (-t, 1-t)$, $t \in [0,1]$; $\gamma_4(t) = (t, -1+t)$ $t \in [0,1]$

Quindi

$$\int_{\gamma_1} \omega = \int_0^1 \frac{-1-1}{3}\,dt = -\frac{2}{3} \; ; \quad \int_{\gamma_2} \omega = \int_0^1 \frac{-1+1}{3-2t}\,dt = 0$$

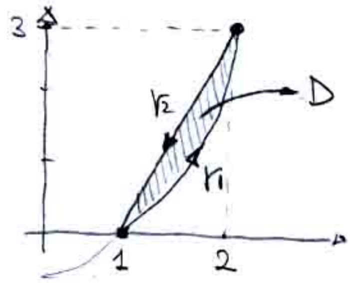
$$\int_{\gamma_3} \omega = \int_0^1 \frac{1+1}{1}\,dt = 2 \; ; \quad \int_{\gamma_4} \omega = \int_0^1 \frac{1-1}{1+2t}\,dt = 0$$

e infine

$$\int_\gamma \omega = -\frac{2}{3} + 0 + 2 + 0 = \frac{4}{3}.$$

ESERCIZIO 12.

Calcolare $\int_\gamma (x+y)\,dx - (x-y)\,dy$ dove γ è il percorso chiuso $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$



con γ_1 un arco di parabola con l'asse $x=0$, e γ_2 un segmento rettilineo.

Si ha che $\gamma_1(t) = (t, t^2-1)$ per $t \in [1,2]$

$\bar{\gamma_2}(t) = (t, 3(t-1))$ per $t \in [1,2]$.

e quindi

$$\int_\gamma \omega = \int_{\gamma_1} \omega - \int_{\gamma_2} \omega = \int_1^2 \left((t+t^2-1)\,1 - (t-t^2+1)\cdot 2t\right)dt$$

$$- \int_1^2 \left((4t-3)\cdot 1 - (-2t+3)\cdot 3\right)dt$$

$$= \left[2\frac{t^4}{4} - \frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} - t\right]_1^2 - \left[10\frac{t^2}{2} - 12t\right]_1^2 = -\frac{1}{3}.$$

Allo stesso risultato si può arrivare applicando il teorema di GAUSS-GREEN

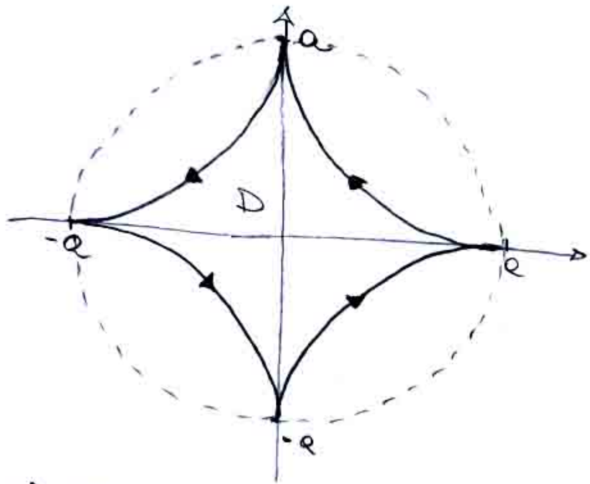
$$\iint_D \left(\frac{\partial(-x+y)}{\partial x} - \frac{\partial(x+y)}{\partial y}\right) dx\,dy = -2|D|$$

$$= -2\int_{x=1}^{2}\int_{y=x^2-1}^{3x-3} 1\,dx\,dy = +2\int_{x=1}^{2} (x^2-3x+2)\,dx$$

$$= 2\left[\frac{x^3}{3} - 3\frac{x^2}{2} + 2x\right]_1^2 = -\frac{1}{3}.$$

ESERCIZIO 13.

Calcolare la lunghezza e l'area delimitata dalla curva chiusa γ detta ASTROIDE (ipocicloide).



$$\begin{cases} x(t) = a\cos^3 t \\ y(t) = a\sin^3 t \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi]$$

Lunghezza:

$$x'(t)^2 + y'^2(t) = a^2\left(3\cos^2 t\,(-\operatorname{sen} t)\right)^2 + a^2\left(3\operatorname{sen}^2 t\,(\cos t)\right)^2$$

$$= 9a^2 |\operatorname{sen} t \cdot \cos t|^2$$

e quindi

$$|\gamma| = 3a \int_0^{2\pi} |\operatorname{sen} t \cos t|\,dt = 12a \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2} \operatorname{sen}(2t)\,dt$$

$$= 3a \left[-\cos(2t)\right]_0^{\pi/2} = 6a$$

Area:

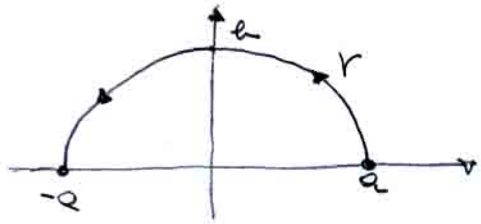
$$|D| = \frac{1}{2} \int_\gamma (x\,dy - y\,dx) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(a^2\cos^4 t \cdot 3\operatorname{sen}^2 t + a^2 \operatorname{sen}^4 t \cdot 3\cos^2 t\right) dt$$

$$= \frac{3a^2}{2} \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2 t \cos^2 t\,dt = \frac{3a^2}{2} \int_0^{2\pi} (\operatorname{sen} 2t)^2 \cdot \frac{1}{4}\,dt$$

$$= \frac{3a^2}{8} \cdot \frac{2\pi}{2} = \frac{3a^2\pi}{8}.$$

ESERCIZIO 14.

Calcolare $\int_\gamma y^2 dx + x^2 dy$ dove γ è la semiellisse



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ e } y \geq 0$$

con $a, b > 0$.

$\gamma(t) = (a\cos t, b \operatorname{sen} t)$ con $t \in [0, \pi]$.

Quindi

$$\int_\gamma \omega = \int_0^\pi \left((b \operatorname{sen} t)^2 \cdot (a\cos t)' + (a\cos t)^2 \cdot (b \operatorname{sen} t)' \right) dt$$

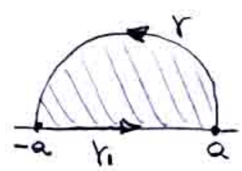
$$= \int_0^\pi -b^2 a \operatorname{sen}^3 t \, dt + \int_0^\pi a^2 b \cos^3 t \, dt$$

$$= b^2 a \int_0^\pi (-\operatorname{sen} t)(1 - \cos^2 t) dt + a^2 b \int_0^\pi \cos t (1 - \operatorname{sen}^2 t) dt$$

$$= b^2 a \left[\cos t - \frac{\cos^3 t}{3} \right]_0^\pi + a^2 b \left[\operatorname{sen} t - \frac{\operatorname{sen}^3 t}{3} \right]_0^\pi = -\frac{4ab^2}{3}$$

Per confermare lo stesso risultato applicando il teorema di GAUSS-GREEN dobbiamo prima "chiudere" il percorso γ. Ad esempio, possiamo considerare il segmento γ_1 da $(-a, 0)$ a $(a, 0)$ ossia $\gamma_1(t) = (t, 0)$ per $t \in [-a, a]$. Allora

$$\int_{\gamma \cup \gamma_1} \omega = \iint_{\left\{ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1, \, y \geq 0 \right\}} \left(\frac{\partial (x^2)}{\partial x} - \frac{\partial (y^2)}{\partial y} \right) dx dy$$



Ponendo $\frac{x}{a} = u$, $\frac{y}{b} = v$ otteniamo

$$\frac{\partial (x,y)}{\partial (u,v)} = ab$$

$$= 2 \iint_{\{u^2+v^2 \leq 1,\, v \geq 0\}} (au - bv)\, ab\, du\, dv$$

$$= 2 \int_{\rho=0}^{1} \int_{\theta=0}^{\pi} (a\rho\cos\theta - b\rho\sin\theta)\, ab\, \rho\, d\rho\, d\theta$$

$$= 2a^2b \left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^1 \left[\sin\theta\right]_0^{\pi} + 2ab^2 \left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^1 \left[\cos\theta\right]_0^{\pi} = -\frac{4}{3}ab^2$$

Infine

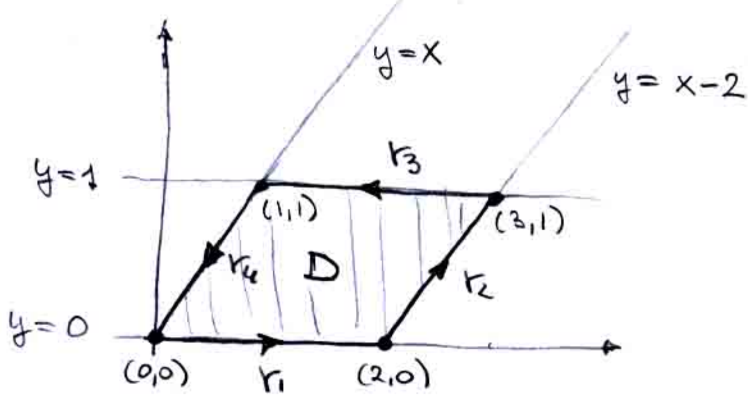
$$\int_{\gamma_1} \omega = \int_{-a}^{a} \left(0 \cdot (t)' + t^2 \cdot (0)'\right) dt = 0$$

e dunque

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma \cup \gamma_1} \omega - \int_{\gamma_1} \omega = -\frac{4}{3}ab^2 - 0 = -\frac{4}{3}ab^2.$$

ESERCIZIO 15.

Calcolare $\int_{\gamma} (3y^2 + 2xe^{y^2})dx + (2x^2 y e^{y^2})dy$ lungo il bordo del parallelogramma di vertici $(0,0)$, $(2,0)$, $(3,1)$ e $(1,1)$ percorso in senso anti-orario.



Prima di tutto notiamo che la forma

$$\omega_1 = 2xe^{y^2}dx + 2x^2ye^{y^2}dy$$

è chiusa in $\mathbb{R}^2$.

$$\frac{\partial(2x^2ye^{y^2})}{\partial x} = 4xye^{y^2} = \frac{\partial(2xe^{y^2})}{\partial y}$$

e quindi, siccome $\mathbb{R}^2$ è semplicemente connesso, ω_1 è anche esatta in $\mathbb{R}^2$. È facile verificare che una funzione potenziale associata a ω_1 è

$$U(x,y) = x^2e^{y^2}.$$

Sia $\omega_2 = 3y^2dx + 0\cdot dy$, allora

$$\int_\gamma \omega = \int_\gamma \omega_1 + \int_\gamma \omega_2 = 0 + \int_\gamma \omega_2$$

$$= 3\int_{\gamma_1} y^2dx + 3\int_{\gamma_2} y^2dx + 3\int_{\gamma_3} y^2dx + 3\int_{\gamma_4} y^2dx$$

Posto $\gamma_1(t) = (t,0)$ $t\in[0,2]$, $\gamma_2(t) = (t, t-2)$ $t\in[2,3]$
$\gamma_3(t) = (3-t, 1)$ $t\in[0,2]$ e $\gamma_4(t) = (1-t, 1-t)$ $t\in[0,1]$
otteniamo

$$= 0 + 3\int_2^3 (t-2)^2dt - 6 - 3\int_0^1 (1-t)^2 dt$$

$$= 3\left[\frac{(t-2)^3}{3}\right]_2^3 - 6 - 3\left[\frac{(t-1)^3}{3}\right]_0^1 = -6.$$

In alternativa si può applicare il teorema di GAUSS-GREEN.

$$\int_\gamma \omega = \int_\gamma \omega_2 = \iint_D \frac{\partial(0)}{\partial x} - \frac{\partial(3y^2)}{\partial y}\,dx\,dy$$

$$= -6 \iint_D y\,dx\,dy$$

$$= -6 \int_{y=0}^{1} y \int_{x=y}^{x=y+2} dx\,dy =$$

$$= -6 \int_{y=0}^{1} 2y\,dy = -6\left[y^2\right]_0^1 = -6.$$

ESERCIZIO 16.

Per quale curva chiusa semplice percorsa in senso anti-orario, l'integrale

$$\int_\gamma (y^3 - 3y + xy^2)\,dx + (9x - x^3 + x^2y)\,dy$$

assume il valore massimo?

Sia D il dominio delimitato da γ allora per il teorema di GAUSS-GREEN

$$\int_\gamma \omega = \iint_D \left(\frac{\partial(9x - x^3 + x^2y)}{\partial x} - \frac{\partial(y^3 - 3y + xy^2)}{\partial y}\right) dx\,dy$$

$$= \iint_D \left(9 - 3x^2 + \cancel{2xy} - 3y^2 + 3 - \cancel{2xy}\right) dx\,dy$$

$$= 3 \iint_D (4 - x^2 - y^2)\,dx\,dy$$

La funzione $f(x,y) = 4 - x^2 - y^2$ è negativa all'esterno della circonferenza $x^2 + y^2 = 2^2$ e positiva all'interno. Quindi $\int_\gamma \omega$ è massimo proprio se D coincide con la "zona" positiva ossia se γ la circonferenza di centro $(0,0)$ e raggio 2.

ESERCIZIO 17.

Data la forma differenziale

$$\omega = (3x^2y + 2xy^3)\,dx + (x^3 + f(x\cdot y))\,dy$$

determinare $f(t)$ in modo che ω sia esatta in $\mathbb{R}^2$.

Dato che $\mathbb{R}^2$ è semplicemente connesso basta verificare che ω sia chiusa:

$$\frac{\partial(x^3 + f(xy))}{\partial x} = 3x^2 + f'(xy)\cdot y$$

$$\overset{?}{\parallel}$$

$$\frac{\partial(3x^2y + 2xy^3)}{\partial y} = 3x^2 + 6xy^2$$

Le due derivate parziali sono uguali $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ se e solo se

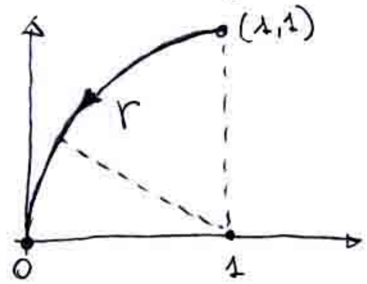
$$f'(xy) = 6xy$$

ossia se $f'(t) = 6t \ \forall t \in \mathbb{R}$ e quindi

$$f(t) = \int 6t\,dt = 3t^2 + \text{cost}.$$

ESERCIZIO 18.

Calcolare $\int_\gamma -y^3dx + x^3dy$ dove γ è l'arco di circonferenza centrata in $(1,0)$ da $(1,1)$ a $(0,0)$



Calcolo diretto: $\gamma(t) = (1+\cos t, \sin t)$ per $t \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$

$$\int_\gamma \omega = \int_{t=\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left(-(\sin t)^3(-\sin t) + (1+\cos t)^3\cdot \cos t\right) dt \underset{\uparrow}{=} \frac{9\pi}{8} - 3$$

dopo un lungo calcolo

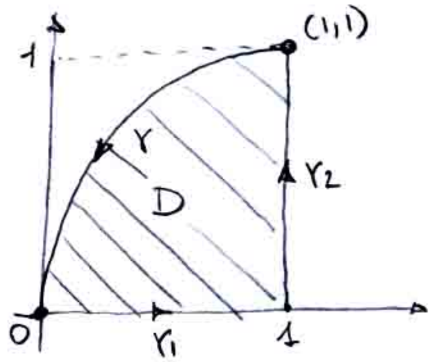
Calcolo con l'uso della formula di GAUSS-GREEN:

$$\int_\gamma \omega = \iint_D \left(\frac{\partial(x^3)}{\partial x} - \frac{\partial(-y^3)}{\partial y}\right) dx\,dy - \int_{\gamma_1}\omega - \int_{\gamma_2}\omega.$$

Ora

$$\int_{\gamma_1}\omega = \int_0^1 (-0\cdot 1 + t^3\cdot 0)\,dt = 0$$

$$\int_{\gamma_2}\omega = \int_0^1 (-t\cdot 0 + 1^3\cdot 1)\,dt = 1$$



Infine

$$3\iint_D (x^2+y^2)\,dx\,dy \underset{\substack{\uparrow \\ \begin{cases} x=u+1 \\ y=v \end{cases} \left\{\begin{array}{l} u^2+v^2\le 1 \\ u\le 0,\ v\ge 0 \end{array}\right\}}}{=} 3\iint \left((u+1)^2+v^2\right) du\,dv$$

$$= 3\int_{\rho=0}^{1}\int_{\theta=\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\rho^2 + 2\rho\cos\theta + 1)\,\rho\,d\rho\,d\theta$$

$$= 3\left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^1 \cdot \frac{\pi}{2} + 6\left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^1 \left[\sin\theta\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} + 3\left[\frac{\rho^2}{2}\right]_0^1 \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{3\pi}{8} - 2 + \frac{3\pi}{4} = \frac{9\pi}{8} - 2.$$

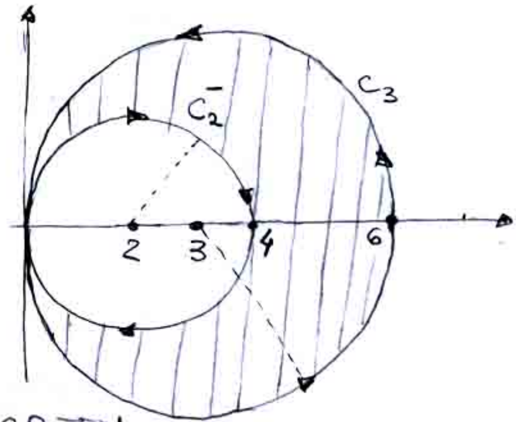
Quindi

$$\int_\gamma \omega = \frac{9\pi}{8} - 2 - 0 - 1 = \frac{9\pi}{8} - 3.$$

ESERCIZIO 19.

Calcolare $\int_\gamma 3x^2y^2\,dx + 2x^2(1+xy)\,dy$ dove γ è il percorso chiuso dato da $C_2^- \cup C_3$.

C_r indica la circonferenza di raggio r e centro $(r,0)$ percorsa in senso antiorario.



Per il teorema di GAUSS-GREEN

$$\int_\gamma \omega = \int_{D_3\setminus D_2}\left(\frac{\partial(2x^2+2x^3y)}{\partial x} - \frac{\partial(3x^2y^2)}{\partial y}\right)dx\,dy,$$

dove D_r è il cerchio di raggio r e centro $(r,0)$,

$$= \int_{D_3\setminus D_2}(4x+\cancel{6x^2y}-\cancel{6x^2y})\,dx\,dy$$

$$= 4\int_{D_3} x\,dx\,dy - 4\int_{D_2} x\,dx\,dy$$

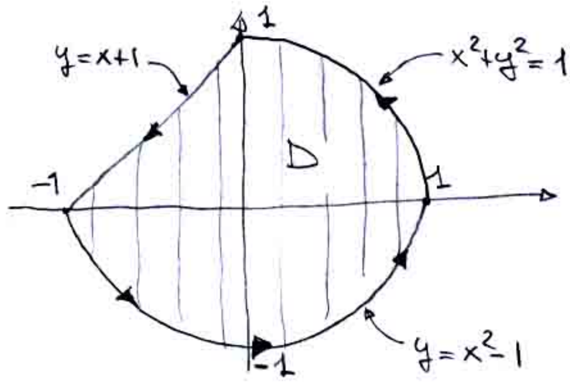
$$= 4\,\overline{x}_{D_3}\cdot|D_3| - 4\,\overline{x}_{D_2}\,|D_2| = 4\cdot 3(\pi\, 3^2) - 4\cdot 2\cdot(\pi\, 2^2)$$

$$= 76\pi$$

dove $\overline{x}_{D_r}=r$ indica la coordinata x del centro di massa del cerchio D_r.

ESERCIZIO 20.

Sia $\omega = 2y\,dx + (x^2+ax)\,dy$ con $a \in \mathbb{R}$ e sia γ il percorso chiuso



Per quale valore di a, $\int_\gamma \omega = \frac{\pi}{2}+4$?

Per GAUSS-GREEN

$$\int_\gamma \omega = \iint_D \left(\frac{\partial(x^2+ax)}{\partial x} - \frac{\partial(2y)}{\partial y} \right) dx\,dy$$

$$= \iint_D (2x+a-2)\,dx\,dy = 2\iint_D x\,dx\,dy + (a-2)\cdot|D|$$

Ora

$$\iint_D x\,dx\,dy = \int_{y=0}^{1} \left(\int_{x=y-1}^{\sqrt{1-y^2}} x\,dx \right) dy + \int_{x=-1}^{1} x \left(\int_{y=x^2-1}^{0} dy \right) dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_{y=0}^{1} \left(1-y^2-(y-1)^2\right) dy + 0$$

$$= \frac{1}{2}\left[-2\frac{y^3}{3} + 2\frac{y^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{6}$$

mentre

$$|D| = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} - 2\int_0^1 (x^2-1)\,dx = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} + 2\left[x - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{\pi}{4} + \frac{11}{6}$$

Quindi

$$\int_\gamma \omega = 2\cdot\frac{1}{6} + (a-2)\left(\frac{\pi}{4}+\frac{11}{6}\right) = \frac{\pi}{2}+4 \quad \text{se } a=4.$$

ESERCIZIO 21.

Sia

$$\omega = \left(a^2 x e^{x^2+y} + \cos(x+y^2)\right)dx + \left(e^{x^2+y} + a^2 y \cos(x+y^2)\right)dy .$$

Dire per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ ω è una forma esatta in $\mathbb{R}^2$ e per tali valori calcolare la funzione potenziale.

Dato che $\mathbb{R}^2$ è semplicemente connesso basta imporre che $\omega = A\,dx + B\,dy$ sia chiusa ovvero che

$$\frac{\partial B}{\partial x} = \frac{\partial A}{\partial y} \quad \text{in } \mathbb{R}^2.$$

Quindi

$$\frac{\partial A}{\partial y} = a^2 x e^{x^2+y} + (-\operatorname{sen}(x+y^2))\cdot 2y$$

$$\frac{\partial B}{\partial x} = e^{x^2+y}\cdot 2x + a^2 y\,(-\operatorname{sen}(x+y^2))$$

e

$$\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y} = (2-a^2)\left(x e^{x^2+y} + y \operatorname{sen}(x+y^2)\right) = 0 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

se e solo se $a^2 = 2$ ovvero se $a = +\sqrt{2}$ o $a = -\sqrt{2}$.

In entrambi i casi il potenziale U soddisfa

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 2x e^{x^2+y} + \cos(x+y^2), \quad \frac{\partial U}{\partial y} = e^{x^2+y} + 2y\cos(x+y^2)$$

Integrando la prima equazione rispetto a x si ottiene

$$U = \int \frac{\partial U}{\partial x}\,dx = e^{x^2+y} + \operatorname{sen}(x+y^2) + c(y)$$

e confrontando con la seconda equazione si deduce che $c'(y) = 0$, ossia $c(y) =$ costante.

Così la funzione potenziale è

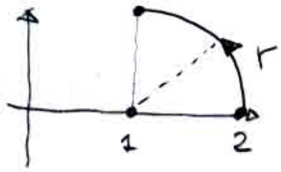
$$U(x,y) = e^{x^2+y} + \operatorname{sen}(x+y^2) + \text{costante}$$

ESERCIZIO 22.

Sia $\omega = \left(axy - \pi \operatorname{sen}(\pi x)\right) dx + (x^2 + 4e^y)\, dy$

Per quali valori del parametro $a \in \mathbb{R}$ l'integrale

$\int_\gamma \omega = \frac{15}{4}\pi + 4e$ dove



γ è l'arco della circonferenza centrata in $(1,0)$ e raggio 1 da $(2,0)$ a $(1,1)$?

Posto $U(x,y) = x^2 y + \cos(\pi x) + 4e^y$ allora

$$\omega_1 = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy = (2xy - \pi \operatorname{sen} \pi x)\, dx + (x^2 + 4e^y)\, dy$$

è esatta in $\mathbb{R}^2$. Sia $\omega_2 = \omega - \omega_1 = (a-2)\, xy\, dx$ allora

$$\int_\gamma \omega_2 = (a-2)\int_0^{\pi/2} (1+\cos t)(\operatorname{sen} t)\cdot \underbrace{(1+\cos t)'}_{=-\operatorname{sen} t} dt$$

$$= -(a-2)\left(\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 t\, dt + \left[\frac{\operatorname{sen}^3 t}{3}\right]_0^{\pi/2}\right) = (2-a)\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{3}\right)$$

Così

$$\int_\gamma \omega = \int_\gamma \omega_2 + \int_\gamma \omega_1 = (2-a)\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{3}\right) + U(1,1) - U(2,0)$$

$$= (2-a)\frac{3\pi+4}{12} + (1 - 1 + 4e) - (0 + 1 + 4)$$

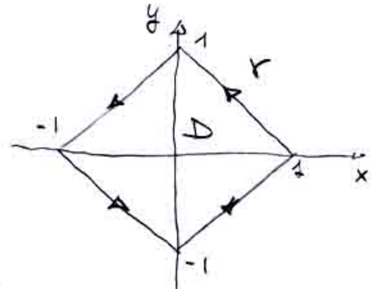
$$= (2-a)\frac{3\pi+4}{12} + 4e - 5 \stackrel{?}{=} \frac{15}{4}\pi + 4e$$

e quindi risolvendo si ottiene $a = -13$.

ESERCIZIO 23.

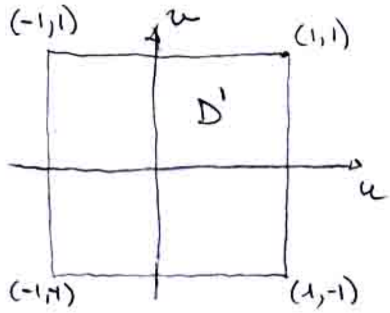
Ripetere il calcolo dell'esercizio 11 utilizzando il teorema di GAUSS-GREEN.

$$\int_{\gamma} \frac{dx - dy}{x+y+2}$$



$$\overset{GG}{=} \iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-1}{x+y+2} \right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{x+y+2} \right) \right) dx\,dy$$

$$\begin{cases} u = x+y \\ v = x-y \end{cases}$$



$$= \iint_D \frac{2}{(x+y+2)^2}\, dx\,dy$$

$$= \iint_{D'} \frac{2}{(u+2)^2} \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| du\,dv$$

$$\left| \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} \right| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = |-2| = 2$$

$$= \iint_{D'} \frac{1}{(u+2)^2}\, du\,dv$$

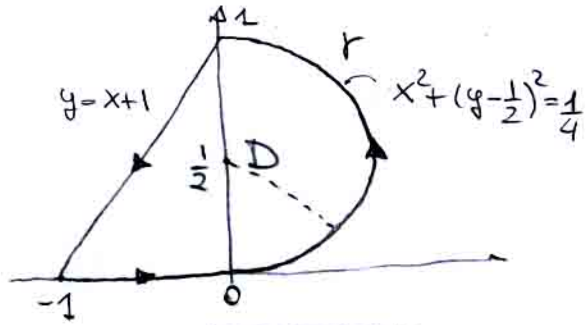
$$= \int_{-1}^{1} \frac{1}{(u+2)^2}\, du \int_{-1}^{1} dv$$

$$= 2 \cdot \left[-\frac{1}{(u+2)} \right]_{-1}^{1} = 2\left(-\frac{1}{3} - (-1) \right) = \frac{4}{3}.$$

ESERCIZIO 24.

Ripetere il calcolo dell'esercizio 9 utilizzando il teorema di GAUSS-GREEN.

$$\int_\gamma xy\,dx + x^2y\,dy$$



$$\overset{GG}{=}\iint_D \left(\frac{\partial(x^2y)}{\partial x} - \frac{\partial(xy)}{\partial y}\right) dxdy$$

$$x=\sqrt{\frac{1}{4}-\left(y-\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{y-y^2}$$

$$=\iint_D (2xy-x)\,dxdy$$

$$=\int_{y=0}^{1}\left(\int_{x=y-1}^{\sqrt{y-y^2}}(2xy-x)\,dx\right)dy = \int_{y=0}^{1}\left[x^2\left(y-\frac{1}{2}\right)\right]_{x=y-1}^{\sqrt{y-y^2}} dy$$

$$=\int_0^1\left((y-y^2)-(y-1)^2\right)\left(y-\frac{1}{2}\right)dy = \int_0^1\left(4y^2-\frac{5}{2}y-2y^3+\frac{1}{2}\right)dy$$

$$=\left[4\frac{y^3}{3}-\frac{5y^2}{4}-\frac{2y^4}{4}+\frac{y}{2}\right]_0^1 = \frac{4}{3}-\frac{5}{4}-\cancel{\frac{1}{2}}+\cancel{\frac{1}{2}}=\frac{1}{12}.$$