TRASFORMATA DI LAPLACE

1. Definizione e prime proprietà

Sia $f:[0,+\infty)\to\mathbb{C}$ allora la TRASFORMATA DI LAPLACE di f che si indica con $\mathcal{L}[f]=F$ è definita come

$$\mathcal{L}[f](s)=\int_0^{+\infty} e^{-st}f(t)\,dt$$

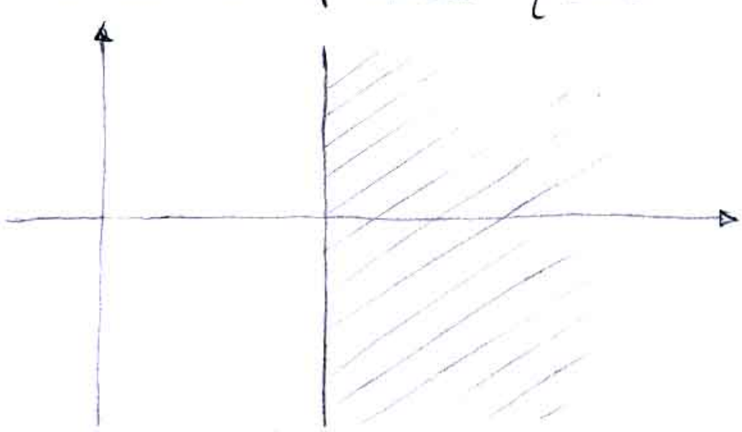
per $s\in\mathbb{C}$ tale che l'integrale è assolutamente convergente.

Se esiste una costante $M>0$ e un numero $a_f\in\mathbb{R}$ tale che $|f(t)|\leq Me^{a_f t}$ per $t\in[0,+\infty)$ allora

$$\int_0^{\infty} |e^{-st}f(t)|\,dt \leq M\int_0^{+\infty} |e^{-(s-a_f)t}|\,dt$$

$$= M\int_0^{+\infty} e^{-(Re(s)-a_f)t}\,dt \quad <+\infty$$

se $Re(s)>a_f$ e quindi $\mathcal{L}[f](s)$ è definita in tutto il semipiano $\{s\in\mathbb{C}:\ Re(s)>a_f\}$



a_f

a_f si dice ASCISSA DI CONVERGENZA di f.

La trasformata di Laplace è un'applicazione lineare: se $f, g : [0, +\infty) \to \mathbb{C}$ con ascisse di convergenza a_f, a_g allora

$$\mathcal{L}[\alpha f + \beta g](s) = \alpha \mathcal{L}[f](s) + \beta \mathcal{L}[g](s)$$

per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ e per $Re(s) > \max\{a_f, a_g\}$.
Infatti

$$\int_0^{+\infty} (\alpha f(t) + \beta g(t)) e^{-st} dt = \alpha \int_0^{+\infty} f(t) e^{-st} dt + \beta \int_0^{+\infty} g(t) e^{-st} dt.$$

Vediamo il calcolo delle trasformate di alcune funzioni elementari:

1) $\mathcal{L}[e^{at}](s) = \dfrac{1}{s-a}$ per $Re(s) > Re(a)$ e $a \in \mathbb{C}$

dim.

$$\mathcal{L}[e^{at}](s) = \int_0^{+\infty} e^{at} \cdot e^{-st} dt = \int_0^{+\infty} e^{(a-s)t} dt = \left[\frac{e^{(a-s)t}}{a-s} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{s-a};$$

2) $\mathcal{L}[\operatorname{sen}(at)](s) = \dfrac{a}{s^2+a^2}$ per $Re(s) > 0$ e $a \in \mathbb{R}$

dim.

$$\mathcal{L}[\operatorname{sen}(at)](s) = \mathcal{L}\left[\frac{e^{iat} - e^{-iat}}{2i} \right](s) = \frac{1}{2i}\left(\mathcal{L}[e^{iat}](s) - \mathcal{L}[e^{-iat}](s) \right)$$

$$= \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{s-ia} - \frac{1}{s+ia} \right) = \frac{a}{s^2+a^2};$$

3) $\mathcal{L}[\cos(at)](s) = \dfrac{s}{s^2+a^2}$ per $Re(s) > 0$ e $a \in \mathbb{R}$

dim.

$$\mathcal{L}[\cos(at)](s) = \mathcal{L}\left[\frac{e^{iat} + e^{-iat}}{2} \right](s) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-ia} + \frac{1}{s+ia} \right) = \frac{s}{s^2+a^2};$$

4) $\mathcal{L}[\sinh(at)](s) = \dfrac{a}{s^2-a^2}$ per $Re(s)>|a|$ e $a\in\mathbb{R}$

dim.

$$\mathcal{L}[\sinh(at)](s) = \mathcal{L}\left[\frac{e^{at}-e^{-at}}{2}\right](s) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-a}-\frac{1}{s+a}\right) = \frac{a}{s^2-a^2};$$

5) $\mathcal{L}[\cosh(at)](s) = \dfrac{s}{s^2-a^2}$ per $Re(s)>|a|$ e $a\in\mathbb{R}$

dim.

$$\mathcal{L}[\cosh(at)](s) = \mathcal{L}\left[\frac{e^{at}+e^{-at}}{2}\right](s) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-a}+\frac{1}{s+a}\right) = \frac{s}{s^2-a^2};$$

dim.

6) $\mathcal{L}[t^n](s) = \dfrac{n!}{s^{n+1}}$ per $Re(s)>0$ e $n\geq 0$.

Per induzione. Se $n=0$

$$\mathcal{L}[1](s) = \int_0^{+\infty} e^{-st}\,dt = \left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{s}.$$

Inoltre per $n\geq 1$:

$$\mathcal{L}[t^n](s) = \int_0^{+\infty} t^n e^{-st}\,dt = \int_0^{+\infty} t^n\, d\left(\frac{e^{-st}}{-s}\right)$$

$$= \left[t^n \cdot \frac{e^{-st}}{-s}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{e^{-st}}{-s}\, d(t^n)$$

$$= 0 + \frac{1}{s}\int_0^{+\infty} e^{-st}\cdot n t^{n-1}\,dt = \frac{n}{s}\mathcal{L}[t^{n-1}](s).$$

$$= \frac{n}{s}\cdot\frac{n-1}{s}\cdot\mathcal{L}[t^{n-2}](s) = \dots = \frac{n!}{s^n}\cdot\mathcal{L}[1](s)$$

$$= \frac{n!}{s^{n+1}}.$$

Ora esaminiamo alcune proprietà che sono utili nel calcolo della trasformata di funzioni non elementari.

Sia $f:[0,+\infty)\to\mathbb{C}$ con ascissa di convergenza a_f per comodità indichiamo con F la trasformata di Laplace di f. Allora valgono le seguenti proprietà:

1) PRIMA PROPRIETÀ DI TRASLAZIONE:

$$\mathcal{L}[e^{at}f(t)](s)=F(s-a) \qquad \text{per } \operatorname{Re} s > a_f+\operatorname{Re}(a)$$

dim.

$$\int_0^{+\infty} e^{-st}e^{at}f(t)\,dt=\int_0^{+\infty} e^{-(s-a)t}f(t)\,dt=F(s-a).$$

2) SECONDA PROPRIETÀ DI TRASLAZIONE

$$\mathcal{L}[u(t-a)f(t-a)](s)=e^{-as}F(s) \quad \text{per } \operatorname{Re}(s)>a_f,\ a\geq 0$$

dove $u(t)=\begin{cases}1 & \text{se } t\geq 0\\ 0 & \text{se } t<0\end{cases}$ (FUNZIONE GRADINO)

dim

$$\int_0^{+\infty} u(t-a)f(t-a)e^{-st}\,dt=\int_a^{+\infty} u(t-a)f(t-a)e^{-st}\,dt$$

$$\stackrel{\tau=t-a}{=}\int_0^{+\infty} u(\tau)f(\tau)e^{-s(\tau+a)}\,d\tau=e^{-as}F(s).$$

3) PROPRIETÀ DI CAMBIO DI SCALA

$$\mathcal{L}[f(at)](s)=\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right) \quad \text{per } \operatorname{Re}(s)>a\cdot a_f \text{ e } a>0$$

dim.

$$\int_0^{+\infty} e^{-st}f(at)\,dt \stackrel{\tau=at}{=} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{s}{a}\tau}f(\tau)\frac{d\tau}{a}=\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right).$$

4) PROPRIETÀ DEL PRODOTTO PER t^n con $n\geq 0$

$$\mathcal{L}[t^n f(t)]=(-1)^n\cdot\frac{d^n}{ds^n}(F(s)) \qquad \text{per } \operatorname{Re}(s)>a_f$$

dim

$$\int_0^{+\infty} t^n f(t)e^{-st}\,dt=\int_0^{+\infty}(-1)^n\frac{d^n}{ds^n}(e^{-st})f(t)\,dt=(-1)^n\frac{d^n}{ds^n}(F(s)).$$

5) PROPRIETÀ DELLA DERIVATA n-sima

Se f è derivabile n-volte in $[0,+\infty)$ e $f^{(k)}$ ha ascisse di convergenza $a_{f^{(k)}}$ per $k=0,1,\dots,n-1$ allora

$$\mathcal{L}[f^{(n)}(t)](s) = s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-1-k} f^{(k)}(0^+) \quad \text{per } Re(s) > \max_{k=0,1,\dots,n-1} \{a_{f^{(k)}}\}$$

dim

Per induzione, se $n=0$ allora $\mathcal{L}[f^{(0)}(t)](s) = F(s)$.

Se $n \geq 1$ allora

$$\mathcal{L}[f^{(n)}(t)](s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} d(f^{(n-1)}(t))$$

$$= \left[e^{-st} f^{(n-1)}(t)\right]_0^{+\infty} + s\int_0^{+\infty} f^{(n-1)}(t) e^{-st} dt$$

$$= -f^{(n-1)}(0^+) + s\mathcal{L}[f^{(n-1)}(t)](s)$$

$$= -f^{(n-1)}(0^+) - sf^{(n-2)}(0^+) + s^2\mathcal{L}[f^{(n-2)}(t)](s) = \dots =$$

$$= s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-1-k} f^{(k)}(0^+).$$

6) PROPRIETÀ DEL VALORE INIZIALE E DEL VALORE FINALE

Se i limiti esistono allora

$$\lim_{t\to 0^+} f(t) = \lim_{s\to +\infty} sF(s) \quad ; \quad \lim_{t\to +\infty} f(t) = \lim_{s\to 0^+} sF(s)$$

dim.

Da 5) $\mathcal{L}[f'(t)] = \int_0^{+\infty} e^{-st} f'(t) dt = sF(s) - f(0^+)$

Se $s \to +\infty$ allora $0 = \lim_{s\to+\infty} sF(s) - f(0^+)$.

Se $s \to 0^+$ allora $\int_0^{+\infty} f'(t) dt = \lim_{t\to\infty} f(t) - \cancel{f(0^+)} = \lim_{s\to 0^+} sF(s) - \cancel{f(0^+)}$.

7) PROPRIETÀ DELL'INTEGRALE

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(x) dx\right](s) = \frac{F(s)}{s} \quad \text{per } Re(s) > \max\{a_f, 0\}$$

dim

$$\mathcal{L}\left[\frac{d}{dt}\left(\int_0^t f(x)dx\right)\right](s) = \mathcal{L}[f(t)](s) = F(s) \overset{5)}{=} s\mathcal{L}\left[\int_0^t f(x)dx\right](s) - 0.$$

ESEMPIO 1.

Calcolare le seguenti trasformate.

1) $\mathcal{L}\left[t^{n}e^{at}\right](s) \overset{1)}{=} \dfrac{n!}{(s-a)^{n+1}}$;

2) $\mathcal{L}\left[e^{at}\operatorname{sen}(\omega t)\right](s) \overset{1)}{=} \dfrac{\omega}{\omega^2+(s-a)^2}$;

3) $\mathcal{L}\left[e^{at}\cos(\omega t)\right](s) \overset{1)}{=} \dfrac{s-a}{\omega^2+(s-a)^2}$;

4) $\mathcal{L}\left[t\operatorname{sen}(\omega t)\right](s) \overset{4)}{=} -\dfrac{d}{ds}\mathcal{L}\left[\operatorname{sen}(\omega t)\right](s)$

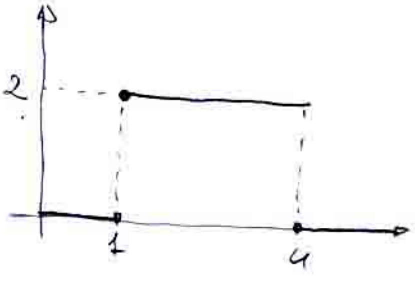
$$= -\frac{d}{ds}\left(\frac{\omega}{\omega^2+s^2}\right) = +\frac{2\omega s}{(\omega^2+s^2)^2} \;;$$

5) $\mathcal{L}\left[t\cos(\omega t)\right](s) \overset{4)}{=} -\dfrac{d}{ds}\mathcal{L}\left[\cos(\omega t)\right](s)$

$$= -\frac{d}{ds}\left(\frac{s}{\omega^2+s^2}\right) = -\frac{\omega^2+s^2-s\cdot 2s}{(\omega^2+s^2)^2} = \frac{s^2-\omega^2}{(\omega^2+s^2)^2}.$$

ESEMPIO 2.

Calcolare la trasformata della funzione



$$f(t) = \begin{cases} 2 & \text{se } t\in[1,4) \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

allora $f(t) = \left(u(t-1) - u(t-4)\right)\cdot 2$ e quindi

$$F(s) = 2\,\mathcal{L}[u(t-1)](s) - 2\,\mathcal{L}[u(t-4)](s)$$

$$\overset{2)}{=} 2e^{-s}\cdot\mathcal{L}[1](s) - 2e^{-4s}\mathcal{L}[1](s)$$

$$= \frac{2}{s}\left(e^{-s} - e^{-4s}\right).$$

2. Trasformata di Laplace di alcune funzioni speciali.

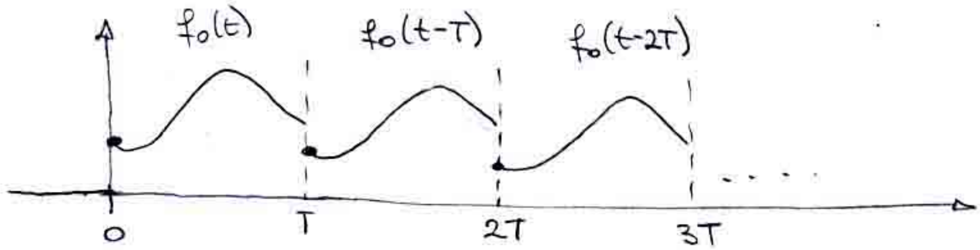
Esaminiamo tre casi tipici: funzioni periodiche, delta di Dirac, prodotto di convoluzione.

1) Funzioni periodiche.

Sia $f_0(t)$ una funzione in $[0,T)$ con $T>0$ estesa a 0 in $\mathbb{R}\setminus[0,T)$.

Allora la funzione periodica "generata" da f_0 è

$$f(t)=\sum_{n=0}^{\infty} f_0(t-nT)$$



allora

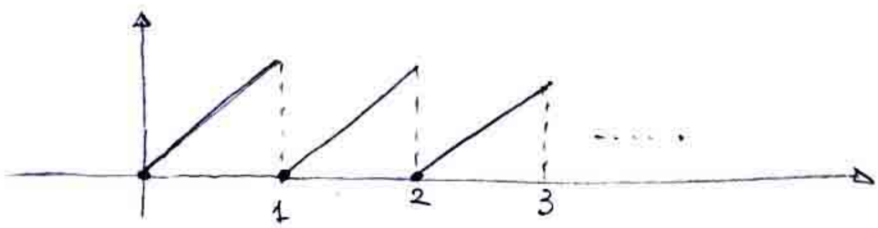
$$\mathcal{L}[f(t)](s)=\sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{L}[f_0(t-nT)](s)$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nTs}\mathcal{L}[f_0](s)=$$

$$=F_0(s)\cdot\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nTs}=\frac{F_0(s)}{1-e^{-Ts}}.$$

ESEMPIO 3.

Calcolare la trasformata della funzione



In questo caso $f_0(t) = t\,(u(t) - u(t-1))$

Così $\qquad = t\,u(t) - (t-1)u(t-1) - u(t-1)$

$$F_0(s) = \mathcal{L}[t](s) - \mathcal{L}[(t-1)u(t-1)](s) - \mathcal{L}[u(t-1)](s)$$

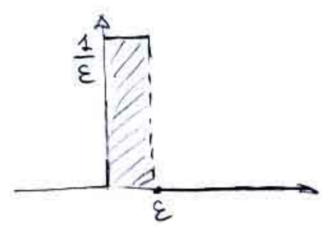
$$= \frac{1}{s^2} - \frac{e^{-s}}{s^2} - \frac{e^{-s}}{s} = \frac{1-e^{-s}-se^{-s}}{s^2}$$

e quindi

$$\mathcal{L}[f](s) = \frac{1-e^{-s}-se^{-s}}{s^2(1-e^{-s})}.$$

2) Delta di Dirac.

Poniamo $I_\varepsilon(t) = \dfrac{u(t)-u(t-\varepsilon)}{\varepsilon}$



Tale funzione vale $\frac{1}{\varepsilon}$ nell'intervallo $[0,\varepsilon)$ e 0 altrove e inoltre $\int_{\mathbb{R}} I_\varepsilon(t)dt = \frac{1}{\varepsilon}\cdot\varepsilon = 1$.

Per $t\in\mathbb{R}$, abbiamo che $\lim_{\varepsilon\to 0} I_\varepsilon(t) = \begin{cases} +\infty & \text{se } t=0, \\ 0 & \text{altrove.}\end{cases}$

Questo limite non rappresenta una funzione, ma è possibile definire una cosiddetta DISTRIBUZIONE $\delta(t)$ tale che

$$\delta(t)=0 \ \text{ per } t\neq 0 \quad \text{e} \quad \int_{\mathbb{R}} \delta(t)dt = 1.$$

Tale $\delta(t)$ è detta DELTA DI DIRAC e serve a descrivere fenomeni impulsivi.

Si noti che per ogni funzione continua $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ si ha che $\forall t_0\in\mathbb{R}$

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)\,\delta(t-t_0)\,dt = f(t_0).$$

Quindi per $t_0\geq 0$

$$\mathcal{L}[\delta(t-t_0)](s) = \int_0^{+\infty} \delta(t-t_0)e^{-st}dt = \int_{\mathbb{R}} \delta(t-t_0)e^{-st} = e^{-st_0}.$$

3) Prodotto di convoluzione.

Siano $f, g : [0,+\infty) \to \mathbb{C}$ allora il PRODOTTO DI CONVOLUZIONE delle funzioni f e g, che si indica con $f*g$, è una funzione definita per $t \geq 0$ come

$$(f*g)(t) = \int_0^t f(t-\tau)\, g(\tau)\, d\tau .$$

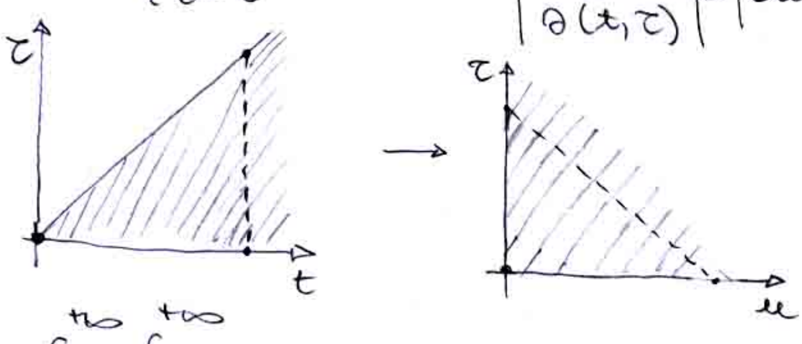
La trasformata di Laplace di $f*g$ vale

$$\mathcal{L}[f*g](s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} (f*g)(t)\, dt$$

$$= \int_{t=0}^{+\infty} e^{-st} \left(\int_{\tau=0}^{t} f(t-\tau)\, g(\tau)\, d\tau \right) dt .$$

Poniamo $\begin{cases} u = t-\tau \\ \tau = \tau \end{cases}$ così $\left| \dfrac{\partial(u,\tau)}{\partial(t,\tau)} \right| = \left| \det \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \right| = 1$

e



$$= \int_{u=0}^{+\infty} \int_{\tau=0}^{+\infty} e^{-s(u+\tau)} f(u)\, g(\tau)\, d\tau\, du$$

$$= \int_{u=0}^{+\infty} e^{-su} f(u)\, du \cdot \int_{\tau=0}^{+\infty} e^{-s\tau} g(\tau)\, d\tau = \mathcal{L}[f](s) \cdot \mathcal{L}[g](s) .$$

Si noti che $f*g = g*f$ e che la delta di Dirac δ è l'elemento neutro di questo prodotto

$$(f*\delta)(t) = \int_0^t f(t-\tau)\, \delta(\tau)\, d\tau = f(t-0) = f(t)$$

ovvero $f*\delta = \delta * f = f$.

ESEMPIO 4.

Calcolare $f = t * t$ e $\mathcal{L}[f]$.

$$f(t) = \int_0^t (t-\tau)\cdot \tau \, d\tau = \left[\frac{t\tau^2}{2} - \frac{\tau^3}{3}\right]_0^t = \frac{t^3}{6}$$

$$\mathcal{L}[f](s) = \left(\mathcal{L}[t](s)\right)^2 = \left(\frac{1}{s^2}\right)^2 = \frac{1}{s^4}.$$

ESEMPIO 5.

Siano $f(t) = e^{at}$ e $g(t) = e^{bt}$, con $a, b \in \mathbb{R}$.

Calcolare $f*g$ e $\mathcal{L}[f*g]$.

$$(f*g)(t) = \int_0^t e^{a(t-\tau)} e^{b\tau} d\tau = e^{at}\int_0^t e^{(b-a)\tau} d\tau$$

$$= \begin{cases} e^{at}\left[\frac{e^{(b-a)\tau}}{b-a}\right]_0^t = \frac{e^{bt} - e^{at}}{b-a} & \text{se } b \neq a, \\ t e^{at} & \text{se } a = b. \end{cases}$$

Inoltre $\mathcal{L}[f*g](s) = \frac{1}{(s-a)^2}$.

3. Anti-trasformata di Laplace

Come si vedrà nelle applicazioni, spesso è necessario individuare quale sia la funzione $f(t)$ tale che la sua trasformata di Laplace sia una funzione assegnata $F(s)$.

L'anti-trasformata $\mathcal{L}^{-1}$ realizza questa corrispondenza

$$f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(s) \quad \text{e} \quad F(s) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} f(t)$$

TEOREMA 1.

Sia $F(s)$ la trasformata di Laplace di $f(t)$. Sia $M>0$ e $a_f \in \mathbb{R}$ tali che $|f(t)| \leq M e^{a_f t}$ per $t \in [0,+\infty)$ allora $F(s)$ è una funzione olomorfa nel semipiano $\{s \in \mathbb{C} : Re(s) > a_f\}$. Inoltre se f è continua in $[0,+\infty)$ allora per $a > a_f$

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)](t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{R\to+\infty} \int_{a-iR}^{a+iR} F(s) e^{st} ds \quad \forall t \geq 0 \quad (1).$$

(Integrale di BROMWICH)

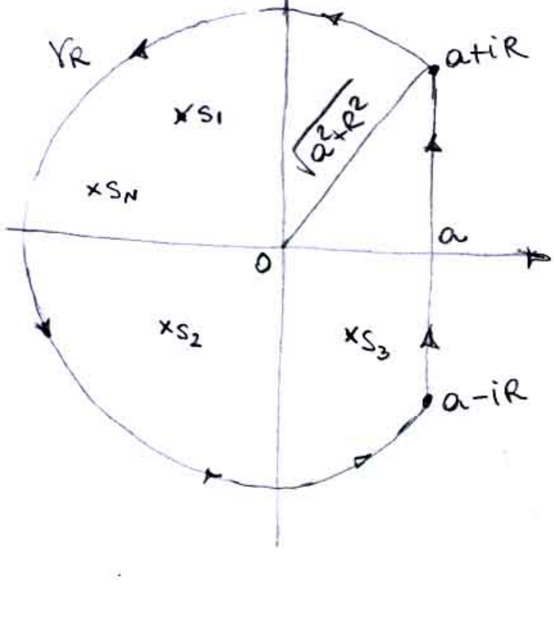
Se $F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$ è una funzione razionale con il grado di Q maggiore del grado di P, allora

$$f(t) = \sum_{k=1}^{N} Res(F(s)e^{st}, s_k) \qquad \forall t>0 \qquad (2)$$

dove $s_1, \dots, s_N$ sono le singolarità di $F(s)$.

dim.

Dimostriamo solo che la (1) implica la (2). Consideriamo il percorso chiuso $\gamma_R \cup [a-iR, a+iR]$



dove γ_R è l'arco della circonferenza centrata in O, da $a+iR$ a $a-iR$ indicato nella figura. Si dimostra che

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_R} F(s)e^{st} dS = 0.$$

Mentre per $R > R_0$, con R_0 sufficientemente grande, il dominio delimitato dal percorso chiuso contiene tutte le singolarità di $F(s)$ (F è olomorfa in $\{Re(s) > a_f\}$). Allora per il teorema dei residui

$$\int_{\gamma_R \cup [a-iR, a+iR]} F(s)e^{st}ds = 2\pi i \sum_{k=1}^{N} Res(F(s)e^{st}, s_k).$$

Quindi

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{a-iR}^{a+iR} F(s)e^{st}ds + \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_R} F(s)e^{st}ds = \sum_{k=1}^{N} Res(F(s)e^{st}, s_k)$$

e passando al limite per $R \to +\infty$ dalla (1) si ottiene la (2). $\square$

ESEMPIO 6.

Determinare $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{(s^2+a^2)^2}\right]$ per $a>0$.

La funzione $\frac{se^{st}}{(s^2+a^2)^2}$ ha due singolarità in ia e $-ia$ di ordine 2. Allora

$$Res\left(\frac{se^{st}}{(s^2+a^2)^2}, ia\right) = \left(\frac{d}{ds}\left(\frac{se^{st}}{(s+ia)^2}\right)\right)_{s=ia}$$

$$= \left(\frac{se^{st}}{(s+ia)^2}\cdot\left(\frac{1}{s} + \frac{t\cancel{e^{st}}}{\cancel{e^{st}}} - \frac{2\cancel{(s+ia)}}{(s+ia)^{\cancel{2}}}\right)\right)_{s=ia}$$

$$= \frac{ia\,e^{iat}}{-4a^2}\left(\frac{1}{ia} + t - \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}ia}\right) = -\frac{i e^{iat}\cdot t}{4a}.$$

Analogamente

$$Res\left(\frac{se^{st}}{(s^2+a^2)^2}, -ia\right) = +\frac{i e^{-iat}\cdot t}{4a}.$$

Quindi

$$f(t) = -\frac{i e^{iat}\, t}{4a} + \frac{i e^{-iat}\, t}{4a} = \frac{t}{2a}\cdot\left(\frac{e^{iat} - e^{-iat}}{2i}\right) = \frac{t}{2a}\cdot \operatorname{sen}(at).$$

ESEMPIO 7.

Determinare $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{2}{s^3+3s^2+2s}\right]$.

$s^3+3s^2+2s = s(s+1)(s+2)$ quindi le singolarità di $\dfrac{2e^{st}}{s(s+1)(s+2)}$ sono $0, -1, -2$ tutte di ordine 1.

$$\operatorname{Res}\left(\frac{2e^{st}}{s(s+1)(s+2)}, 0\right) = \left(\frac{2e^{st}}{(s+1)(s+2)}\right)_{s=0} = 1,$$

$$\operatorname{Res}\left(\frac{2e^{st}}{s(s+1)(s+2)}, -1\right) = \left(\frac{2e^{st}}{s(s+2)}\right)_{s=-1} = \frac{2e^{-t}}{(-1)1} = -2e^{-t},$$

$$\operatorname{Res}\left(\frac{2e^{st}}{s(s+1)(s+2)}, -2\right) = \left(\frac{2e^{st}}{s(s+1)}\right)_{s=-2} = \frac{2e^{-2t}}{(-2)(-1)} = e^{-2t}.$$

Quindi

$$f(t) = 1 - 2e^{-t} + e^{-2t} = (1-e^{-t})^2$$

Allo stesso risultato si può anche arrivare nel seguente modo: si decompone la funzione razionale in funzioni razionali semplici che poi si antitrasformano.

$$\frac{2}{s^3+3s^2+2s} = \frac{\overset{=1}{A}}{s} + \frac{\overset{=-2}{B}}{s+1} + \frac{\overset{=1}{C}}{s+2}$$

$$= \mathcal{L}[1] - 2\mathcal{L}[e^{-t}] + \mathcal{L}[e^{-2t}]$$

$$= \mathcal{L}\left[1 - 2e^{-t} + e^{-2t}\right] = \mathcal{L}\left[(1-e^{-t})^2\right]$$

da cui la tesi.

4 Applicazioni: equazioni differenziali lineari.

Uno degli impieghi più comuni della trasformata di Laplace è nella risoluzione del PROBLEMA DI CAUCHY per le equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti: determinare la funzione $x(t)$ (per questo tipo di problema la soluzione esiste ed è unica) che risolve l'equazione

$$(*) \quad a_n x^{(n)}(t) + a_{n-1} x^{(n-1)}(t) + \dots + a_0 x(t) = f(t) \quad \text{per } t \geq 0$$

con $a_n, a_{n-1}, \dots, a_0 \in \mathbb{R}$ e $f(t)$ è una funzione data, e soddisfa le condizioni iniziali

$$x(0) = x_0, \; x'(0) = x_1, \; \dots, \; x^{(n-1)}(0) = x_{n-1}$$

con $t_0, x_0, \dots, x_{n-1} \in \mathbb{R}$. Se $a_n \neq 0$, l'ordine di $(*)$ è n.
L'idea dell'applicazione è quella di calcolare la trasformata di $(*)$. In questo modo, grazie alla proprietà della derivata n-sima, il problema originale di natura "differenziale" si trasforma in un problema di natura "algebrica", ossia $(*)$ diventa un'equazione algebrica in $X(s) = \mathcal{L}[x(t)](s)$. Quindi si determina $X(s)$ e con l'antitrasformata si ottiene

la soluzione cercata $x(t)$.

ESEMPIO 8.

Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x''(t) + 9x(t) = \cos(2t) \\ x(0) = 1 \,, \; x'(0) = 0. \end{cases}$$

Dato che $\mathcal{L}[x''(t)](s) = s^2 X(s) - s\cdot x(0) - x'(0) = s^2 X - s$ allora

$$s^2 X - s + 9X = \frac{s}{s^2+4} \Rightarrow X = \frac{s}{s^2+9} + \frac{s}{(s^2+9)(s^2+4)}$$

$$= \frac{4}{5}\cdot\frac{s}{s^2+9} + \frac{1}{5}\frac{s}{s^2+4}$$

e quindi

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}[X](t) = \frac{4}{5}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+9}\right](t) + \frac{1}{5}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+4}\right](t)$$

$$= \frac{4}{5}\cos(3t) + \frac{1}{5}\cos(2t) \quad \text{per } t \geq 0.$$

ESEMPIO 9.

Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x''(t) + x(t) = \delta(t-1) \\ x(0) = 0 \,, \; x'(0) = 0. \end{cases}$$

Allora

$$s^2 X + X = e^{-s}\cdot 1 \Rightarrow X = \frac{e^{-s}}{s^2+1}$$

e quindi

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}[X](t) = \operatorname{sen}(t-1)\, u(t-1) \quad \text{per } t \geq 0.$$

ESEMPIO 10.

Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x''(t) + x(t) = u(t-2) \\ x(0)=0, \; x'(0)=0. \end{cases}$$

Allora

$$s^2 X + X = \frac{e^{-2s}}{s} \Rightarrow X = \frac{e^{-2s}}{s(s^2+1)}.$$

Calcoliamo $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(s^2+1)}\right]$ con il metodo dei residui

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(s^2+1)}\right] = \text{Res}\left(\frac{e^{st}}{s(s^2+1)}, 0\right) + \text{Res}(\cdots, i) + \text{Res}(\cdots, -i)$$

$$= \left(\frac{e^{st}}{s^2+1}\right)_{s=0} + \left(\frac{e^{st}}{s(s+i)}\right)_{s=i} + \left(\frac{e^{st}}{s(s-i)}\right)_{s=-i}$$

$$= 1 + \frac{e^{it}}{-2} + \frac{e^{-it}}{-2} = 1 - \cos t.$$

Quindi

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}[X](t) = u(t-2) \cdot (1 - \cos(t-2)) \quad \text{per } t \geq 0.$$

La stessa strategia può essere applicata per risolvere SISTEMI di equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti. Per semplicità consideriamo solo sistemi 2x2 del primo ordine

$$\begin{cases} x'(t) = a x(t) + b y(t) + f(t) \\ y'(t) = c x(t) + d y(t) + g(t) \end{cases} \quad \text{per } t \geq 0$$

con le condizioni iniziali $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$.

ESEMPIO 11.

Risolvere il sistema

$$\begin{cases} x'(t) = y(t) \\ y'(t) = -x(t) \end{cases} \quad \text{con } x(0)=0,\ y(0)=1.$$

Allora

$$\begin{cases} sX - 0 = Y \\ sY - 1 = -X \end{cases}, \quad \begin{cases} sX - Y = 0 \\ X + sY = 1 \end{cases}$$

che in forma matriciale si scrive

$$\begin{bmatrix} s & -1 \\ 1 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

da cui, per la regola di CRAMER,

$$X = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & s \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s & -1 \\ 1 & s \end{vmatrix}} = \frac{1}{s^2+1} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} x(t) = \operatorname{sen}(t),$$

$$Y = \frac{\begin{vmatrix} s & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s & -1 \\ 1 & s \end{vmatrix}} = \frac{s}{s^2+1} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} y(t) = \cos(t).$$

ESEMPIO 12.

Risolvere il sistema

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) + y(t) + 9t \\ y'(t) = x(t) + 2y(t) \end{cases} \quad \text{con } x(0)=0,\ y(0)=9.$$

Allora

$$\begin{cases} sX = 2X + Y + \frac{9}{s^2} \\ sY - 9 = X + 2Y \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} s-2 & -1 \\ -1 & s-2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9/s^2 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Così

$$X = \frac{9\begin{vmatrix} \frac{1}{s^2} & -1 \\ 1 & s-2 \end{vmatrix}}{(s-2)^2-1} = \frac{9(s-2+s^2)}{s^2(s-1)(s-3)} = \frac{9(s+2)}{s^2(s-3)}$$

$$Y = \frac{9\begin{vmatrix} s-2 & \frac{1}{s^2} \\ -1 & 1 \end{vmatrix}}{(s-2)^2-1} = \frac{9(s^3-2s^2+1)}{s^2(s-1)(s-3)} = \frac{9(s^2-s-1)}{s^2(s-3)}$$

e quindi

$$x(t) = \mathrm{Res}\left(\frac{9(s+2)e^{st}}{s^2(s-3)}, 0\right) + \mathrm{Res}\left(\frac{9(s+2)e^{st}}{s^2(s-3)}, 3\right)$$

$$= \left(\frac{d}{ds}\left(\frac{9(s+2)e^{st}}{(s-3)}\right)\right)_{s=0} + \left(\frac{9(s+2)e^{st}}{s^2}\right)_{s=3}$$

$$= \left(\frac{9(s+2)e^{st}}{s-3}\cdot\left(\frac{1}{s+2} + \frac{t\cancel{e^{st}}}{\cancel{e^{st}}} - \frac{1}{s-3}\right)\right)_{s=0} + \frac{\cancel{9}(5)}{\cancel{9}}e^{3t}$$

$$= \frac{9\cdot 2}{-3}\left(\frac{1}{2}+t-\frac{1}{-3}\right) + 5e^{3t} = -5-6t+5e^{3t},$$

$$Y(t) = \mathrm{Res}\left(\frac{9(s^2-s-1)}{s^2(s-3)}e^{st}, 0\right) + \mathrm{Res}\left(\frac{9(s^2-s-1)}{s^2(s-3)}e^{st}, 3\right)$$

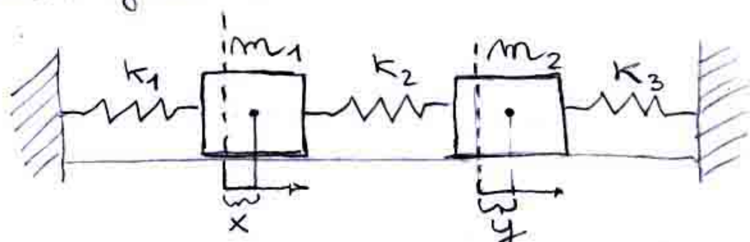
$$= \left(\frac{d}{ds}\left(\frac{9(s^2-s-1)e^{st}}{s-3}\right)\right)_{s=0} + \left(\frac{9(s^2-s-1)e^{st}}{s^2}\right)_{s=3}$$

$$= \left(\frac{9(s^2-s-1)e^{st}}{s-3}\cdot\left(\frac{2s-1}{s^2-s-1} + t - \frac{1}{s-3}\right)\right)_{s=0} + \frac{9}{9}(9-3-1)e^{3t}$$

$$= \frac{9(-1)}{-3}\left(\frac{-1}{-1}+t-\frac{1}{-3}\right) + 5e^{3t} = 4+3t+5e^{3t}.$$

Nel prossimo esempio applichiamo il metodo della trasformata di Laplace a un sistema di equazioni differenziali lineari del secondo ordine che deriva da un problema di fisica.

Due masse m_1, m_2 sono unite con tre molle, con costanti di elasticità k_1, k_2, k_3, a due pareti nel seguente modo



x indica lo spostamento della massa m_1 rispetto alla posizione a riposo, mentre y indica l'analogo spostamento per la massa m_2.

Considerando le forze che agiscono sulle due masse, in assenza di attrito, si ha che

$$\begin{cases} m_1 x''(t) = -k_1 x(t) + k_2(y(t)-x(t)) \\ m_2 y''(t) = -k_2(y(t)-x(t)) - k_3 y(t) \end{cases} \qquad (*)$$

Se al tempo $t=0$, gli spostamenti iniziali e le velocità iniziali delle due masse sono rispettivamente $x(0), y(0)$ e $x'(0)$ e $y'(0)$, quali sono le equazioni del moto $x(t)$ e $y(t)$ delle due masse per $t \geq 0$?

Rispondere a questa domanda significa risolvere il sistema (*) con le condizioni iniziali assegnate.

Nel prossimo esempio risolviamo il problema in un caso particolare.

ESEMPIO 13.

Risolvere (*) nel caso in cui $m_1 = m_2 = 1$ e $k_1 = k_2 = k_3 = 1$ con $x(0) = y(0) = 0$, $x'(0) = -y'(0) = 3$.

$$\begin{cases} x''(t) = -2x(t) + y(t) \\ y''(t) = x(t) - 2y(t) \end{cases} \quad \text{con } \begin{matrix} x(0) = 0, \ x'(0) = 3 \\ y(0) = 0, \ y'(0) = -3. \end{matrix}$$

Allora

$$\begin{cases} s^2X - 3 = -2X + Y \\ s^2Y + 3 = X - 2Y \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} s^2+2 & -1 \\ -1 & s^2+2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix}$$

e così per $t \geq 0$

$$X = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -3 & s^2+2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s^2+2 & -1 \\ -1 & s^2+2 \end{vmatrix}} = \frac{3\cancel{(s^2+1)}}{(s^2+3)\cancel{(s^2+1)}} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} x(t) = \sqrt{3}\,\mathrm{sen}(\sqrt{3}t),$$

$$Y = \frac{\begin{vmatrix} s^2+2 & 3 \\ -1 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s^2+2 & -1 \\ -1 & s^2+2 \end{vmatrix}} = \frac{-3\cancel{(s^2+1)}}{(s^2+3)\cancel{(s^2+1)}} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} y(t) = -\sqrt{3}\,\mathrm{sen}(\sqrt{3}t).$$