INTEGRALI MULTIPLI

1. Integrali doppi su rettangoli.

Sia $R=[a,b]\times[c,d]$ un rettangolo contenuto in $\mathbb{R}^2$ e denotiamo la sua area con

$$|R|=(b-a)(d-c).$$

Consideriamo una partizione $\mathcal{P}$ di R di $m\times n$ rettangoli

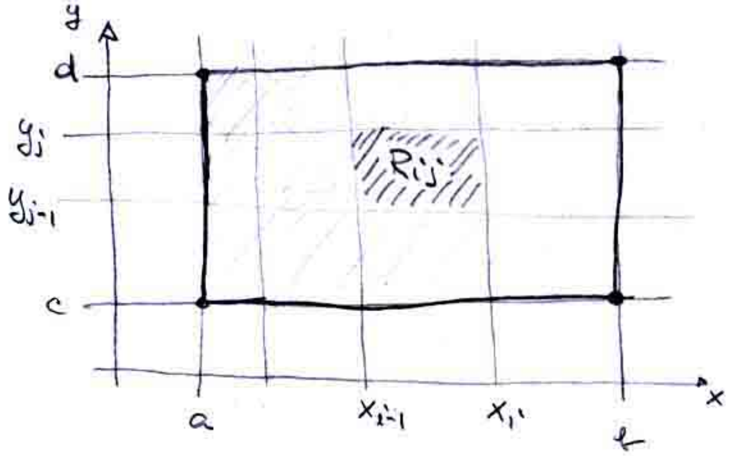
$$R_{ij}=[x_{i-1},x_i]\times[y_{j-1},y_j]$$

dove

$$a=x_0<x_1<x_2<\dots<x_{m-1}<x_m=b$$

e

$$c=y_0<y_1<y_2<\dots<y_{n-1}<y_n=d$$



Sia ora $f:R\to\mathbb{R}$ una funzione limitata e poniamo

$$m_{ij}=\inf\{f(x,y):(x,y)\in R_{ij}\},$$
$$M_{ij}=\sup\{f(x,y):(x,y)\in R_{ij}\}.$$

Definiamo la SOMMA INTEGRALE INFERIORE di f relativa alla partizione $\mathcal{P}$ la somma

$$s(f,\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} m_{ij} |R_{ij}|$$

mentre la SOMMA INTEGRALE SUPERIORE è

$$S(f,\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} M_{ij} |R_{ij}|.$$

Si osservi che se $\mathcal{P}$ e $\mathcal{P}'$ sono due partizioni di R allora

$$s(f,\mathcal{P}) \leq S(f,\mathcal{P}').$$

Poniamo

$$s(f) = \sup \{ s(f,\mathcal{P}) : \mathcal{P} \text{ partizioni di } R \}$$
$$S(f) = \inf \{ S(f,\mathcal{P}) : \mathcal{P} \text{ partizioni di } R \}$$

allora $s(f) \leq S(f)$.

Diciamo che f è INTEGRABILE su R se

$$s(f) = S(f).$$

Il valore di tale uguaglianza si dice INTEGRALE DOPPIO di f su R e si indica con i simboli:

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy \quad \text{o} \quad \int_{x=a}^{b} \int_{y=c}^{d} f(x,y)\,dx\,dy.$$

2. Integrali doppi su insiemi non rettangolari

Sia D un insieme limitato di $\mathbb{R}^2$ e sia $f: D \to \mathbb{R}$ una funzione limitata.

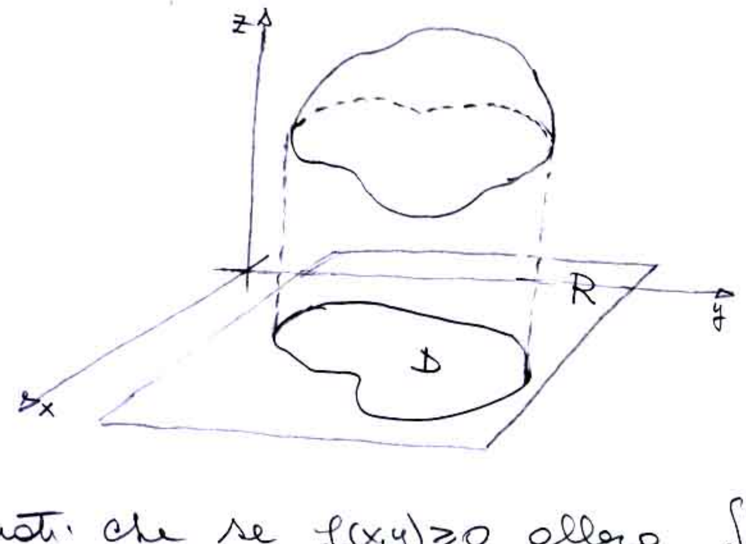
Diciamo che f è INTEGRABILE su D se la funzione "estensione"

$$\tilde{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{se } (x,y) \in D \\ 0 & \text{se } (x,y) \in R \setminus D \end{cases}$$

è integrabile su R, dove R è un rettangolo sufficientemente grande da contenere D.

Si pone

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_R \tilde{f}(x,y)\,dx\,dy$$



Si noti che se $f(x,y) \geq 0$ allora $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ è il volume dell'insieme

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in D \text{ e } z \in [0, f(x,y)]\}.$$

Per individuare delle condizioni di integrabilità abbiamo bisogno qualche altra definizione.

Un insieme limitato $D \subseteq \mathbb{R}^2$ si dice MISURABILE se la sua FUNZIONE CARATTERISTICA

$$\chi_D(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se } (x,y) \in D \\ 0 & \text{se } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus D \end{cases}$$

è integrabile su D.

La MISURA di D si indica con $|D|$ e si pone

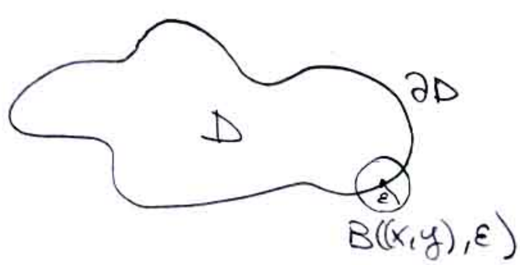
$$|D| = \iint_D \chi_D(x,y)\, dx\, dy = \iint_D dx\, dy.$$

Se $D \subseteq \mathbb{R}^2$ allora $|D|$ rappresenta l'area di D.

La FRONTIERA (o il BORDO) di D si indica con ∂D e si definisce come

$$\partial D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ \forall \varepsilon > 0 \ \begin{cases} B((x,y),\varepsilon) \cap D \neq \emptyset \\ B((x,y),\varepsilon) \cap D^c \neq \emptyset \end{cases} \right\}$$

dove $B((x,y),\varepsilon)$ è il disco aperto di centro (x,y) e raggio $\varepsilon > 0$.



Un insieme D si dice CHIUSO se $D \supseteq \partial D$.

TEOREMA 1. (condizione di integrabilità).
Sia D un insieme chiuso, limitato e misurabile di $\mathbb{R}^2$ e sia $f: D \to \mathbb{R}$ una funzione continua in D allora f è integrabile su D.

TEOREMA 2. (criterio geometrico di misurabilità).
Un insieme D di $\mathbb{R}^2$ è misurabile se e solo se $|\partial D| = 0$.

TEOREMA 3. Nelle ipotesi del teorema 1.

1) LINEARITÀ. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\iint_D (\alpha f + \beta g)\, dx\, dy = \alpha \iint_D f\, dx\, dy + \beta \iint_D g\, dx\, dy.$$

2) MONOTONIA. Se $f \geq g$ in D allora

$$\iint_D f\, dx\, dy \geq \iint_D g\, dx\, dy.$$

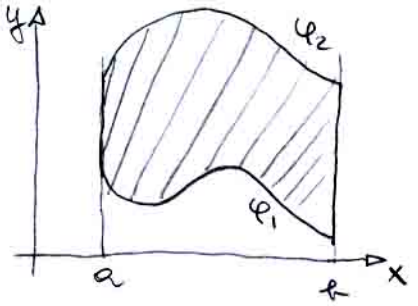
3) ADDITIVITÀ RISPETTO AL DOMINIO DI INTEGRAZIONE.
Se $|D_1 \cap D_2| = 0$ allora

$$\iint_{D_1 \cup D_2} f\, dx\, dy = \iint_{D_1} f\, dx\, dy + \iint_{D_2} f\, dx\, dy.$$

3. Domini semplici e formule di riduzione

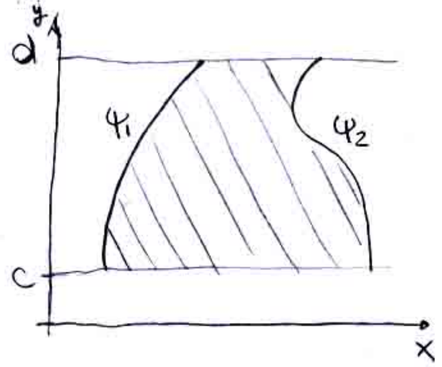
Un sottoinsieme $D \subset \mathbb{R}^2$ si dice DOMINIO SEMPLICE RISPETTO ALL'ASSE Y se $\exists\, \varphi_1, \varphi_2 \in C([a,b]) : \varphi_1 \leq \varphi_2$ e

$$D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 ;\ x \in [a,b] \text{ e } y \in [\varphi_1(x), \varphi_2(x)] \}$$



mentre si dice DOMINIO SEMPLICE RISPETTO ALL'ASSE X se $\exists\, \psi_1, \psi_2 \in C([c,d]) : \psi_1 \leq \psi_2$ e

$$D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ y \in [c,d] \text{ e } x \in [\psi_1(y), \psi_2(y)] \}$$



Dato che la frontiera è costituita da grafici di funzioni continue si dimostra che i domini semplici sono misurabili.

Inoltre un dominio semplice è chiuso e limitato.

Il seguente teorema illustra come il calcolo di un integrale doppio si può ridurre al calcolo di due integrali ordinari.

TEOREMA 4. (Formule di riduzione)

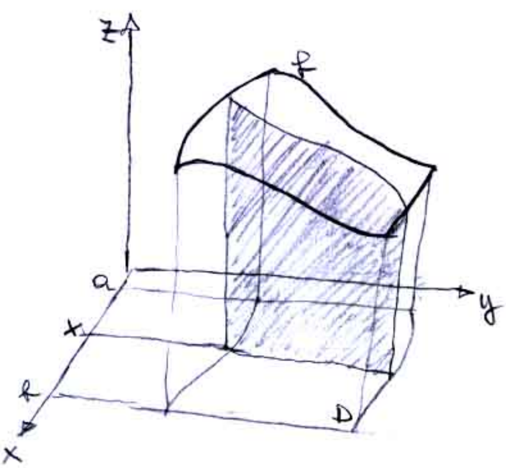
Sia D un dominio un dominio semplice di $\mathbb{R}^2$ e sia f continua in D.

1) se D è semplice rispetto all'asse y allora

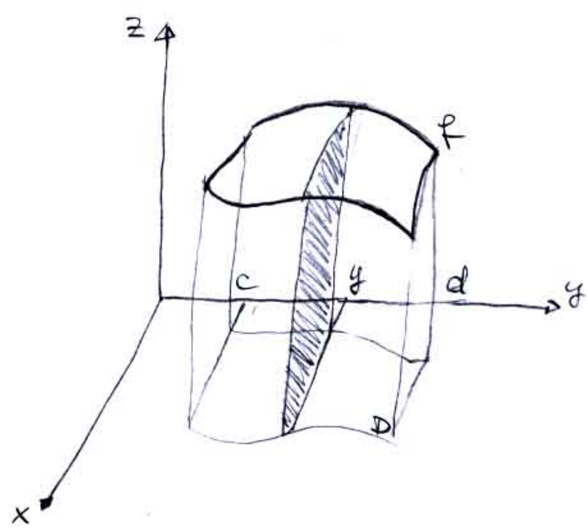
$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_{x=a}^{b}\left(\int_{y=\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy\right)dx$$

2) se D è semplice rispetto all'asse x allora

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_{y=c}^{d}\left(\int_{x=\psi_1(x)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx\right)dy$$



D semplice rispetto all'asse y

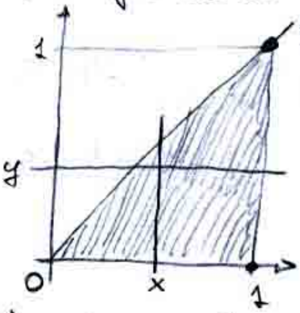


D semplice rispetto all'asse x

ESEMPIO 1.

$$\iint_D xy\,dxdy$$ dove D è il triangolo chiuso di vertici $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$

In questo caso D è semplice sia rispetto a x che a y



Svolgiamo il calcolo in entrambi i modi.

1) Rispetto a y

$$\int_{x=0}^{1}\left(\int_{y=0}^{y=x} xy\,dy\right)dx = \int_0^1 x\left(\int_{y=0}^{y=x} y\,dy\right)dx = \int_0^1 x\cdot\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^x dx$$

$$= \int_0^1 \frac{x^3}{2}dx = \frac{1}{8}\left[x^4\right]_0^1 = \frac{1}{8}$$

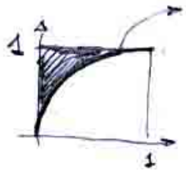
2) Rispetto a x

$$\int_{y=0}^{1}\left(\int_{x=y}^{x=1} xy\,dx\right)dy = \int_0^1 y\left(\int_{x=y}^{x=1} x\,dx\right)dy = \int_0^1 y\cdot\left[\frac{x^2}{2}\right]_y^1 dy$$

$$= \int_0^1 \frac{y}{2}(1-y^2)\,dy = \frac{1}{2}\left[\frac{y^2}{2}-\frac{y^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{8}$$

ESEMPIO 2.

$$\iint_D e^{y^3}dxdy$$

D: 

$y=\sqrt{x}$ o $y^2=x$

$= \{(x,y):\ x\in[0,1],\ y\in[\sqrt{x},1]\}$

In questo caso riducendo rispetto a y

$$\int_{x=0}^{1}\left(\int_{y=\sqrt{x}}^{1} e^{y^3}dy\right)dx = ?$$

Visto che l'integrale interno $\int e^{y^3} dy$ non si riesce a risolvere proviamo a ridurre rispetto a x

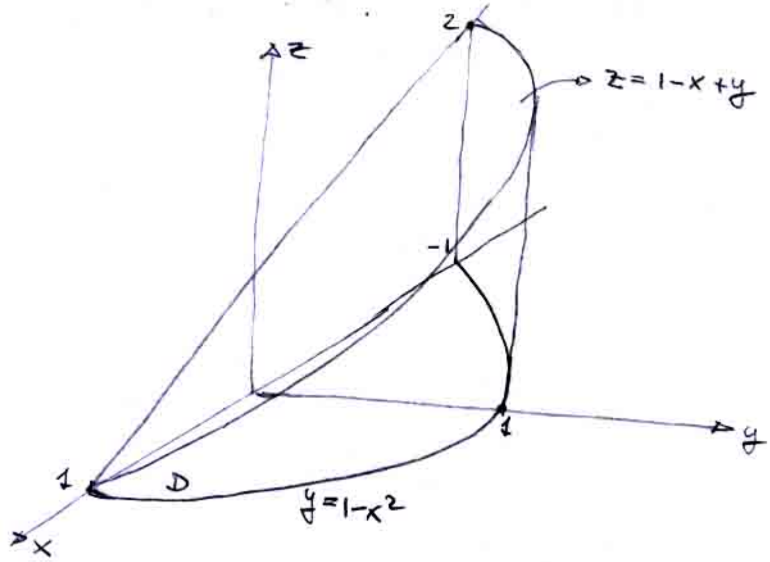
$$\int_{y=0}^{1} \left(\int_{x=0}^{y^2} e^{y^3} dx \right) dy = \int_{y=0}^{1} e^{y^3} \left(\int_{x=0}^{y^2} dx \right) dy$$

$$= \int_0^1 e^{y^3} \cdot [x]_0^{y^2} dy = \int_0^1 y^2 e^{y^3} dy = \left[\frac{e^{y^3}}{3} \right]_0^1 = \frac{e-1}{3}$$

ESEMPIO 3.

Calcolare il volume dell'insieme

$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ y \geq 0, \ z \geq 0, \ x-y+z \leq 1, \ y \leq 1-x^2\}$.



Consideriamo come dominio

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \in [-1,1], \ y \in [0, 1-x^2]\}$$

e come funzione

$$f(x,y) = 1-x+y$$

Allora

$$V = \iint_D f(x,y) \, dx\, dy = \int_{x=-1}^{1} \left(\int_{y=0}^{1-x^2} (1-x+y) \, dy \right) dx$$

$$= \int_{-1}^{1} \left[y - xy + \frac{y^2}{2} \right]_0^{1-x^2} dx$$

$$= \int_{-1}^{1} \left((1-x^2) - x(1-x^2) + \frac{(1-x^2)^2}{2} \right) dx$$

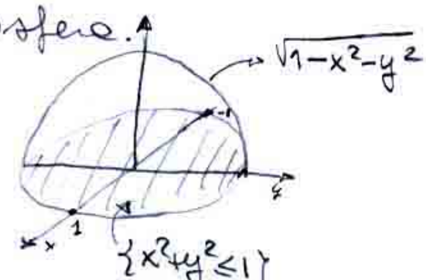
Dato che $(1-x^2)$ e $\frac{(1-x^2)^2}{2}$ sono funzioni pari, $x(1-x^2)$ è una funzione dispari e l'intervallo $[-1,1]$ è simmetrico rispetto a 0 si ha che

$$= 2 \int_0^1 \left((1-x^2) + \frac{1}{2}(1-2x^2+x^4) \right) dx$$

$$= 2 \left[\frac{3}{2}x - 2\frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} \right]_0^1 = 2 \cdot \left(\frac{3}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{10} \right) = \frac{28}{15}$$

ESEMPIO 4.

Calcolare il volume della sfera di raggio 1.
Poniamo il centro nell'origine e calcoliamo il doppio del volume della semisfera.



$$= \left\{ (x,y) : \begin{array}{l} x \in [-1,1] \\ y \in [-\sqrt{1-x^2}, \sqrt{1-x^2}] \end{array} \right\}$$

$$V = 2 \iint_{\{x^2+y^2 \leq 1\}} \sqrt{1-x^2-y^2}\, dx\, dy$$

$$= 2 \int_{-1}^{1} \left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2-y^2}\, dy \right) dx$$

poniamo $y = \sqrt{1-x^2}\, \operatorname{sen} t$ così $dy = \sqrt{1-x^2} \cos t\, dt$ con t che varia in $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$$= 2 \int_{-1}^{1} (\sqrt{1-x^2})^2 \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi/2} \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 t} \cdot \cos t\, dt \right) dx$$

$$= 2 \int_{-1}^{1} (1-x^2) \left(\underbrace{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\, dt}_{= \frac{\pi}{2}} \right) dx = \pi \int_{-1}^{1} (1-x^2)\, dx = \frac{4\pi}{3}$$

Il VALORE MEDIO di una funzione $f : D \to \mathbb{R}$ su D di misura non nulla si definisce come

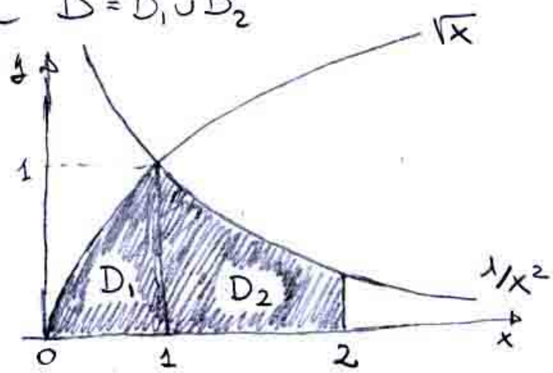
$$\overline{f_D} = \frac{1}{|D|} \iint_D f(x,y)\,dx\,dy$$

ESEMPIO 5.

Calcolare il valore medio della funzione

$$f(x,y) = (1-2x)\cdot y$$

sull'insieme $D = D_1 \cup D_2$



$$|D| = |D_1| + |D_2| = \int_0^1 \sqrt{x}\,dx + \int_1^2 \frac{1}{x^2}\,dx = \left[\frac{2}{3}x^{3/2}\right]_0^1 + \left[-\frac{1}{x}\right]_1^2 = \frac{7}{6}$$

$$\iint_{D_1} (1-2x)\cdot y\,dx\,dy = \int_0^1 (1-2x)\left(\int_0^{\sqrt{x}} y\,dy\right)dx$$

$$= \int_0^1 (1-2x)\cdot\frac{x}{2}\,dx = \left[\frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = -\frac{1}{12}$$

$$\iint_{D_2} (1-2x)y\,dx\,dy = \int_1^2 (1-2x)\left(\int_0^{1/x^2} y\,dy\right)dx$$

$$= \int_1^2 (1-2x)\cdot\frac{1}{2x^4}\,dx = \left[-\frac{1}{6x^3} + \frac{1}{2x^2}\right]_1^2 = -\frac{11}{48}$$

Quindi

$$\overline{f_D} = \frac{1}{7/6}\cdot\left(-\frac{1}{12} - \frac{11}{48}\right) = -\frac{15}{56}.$$

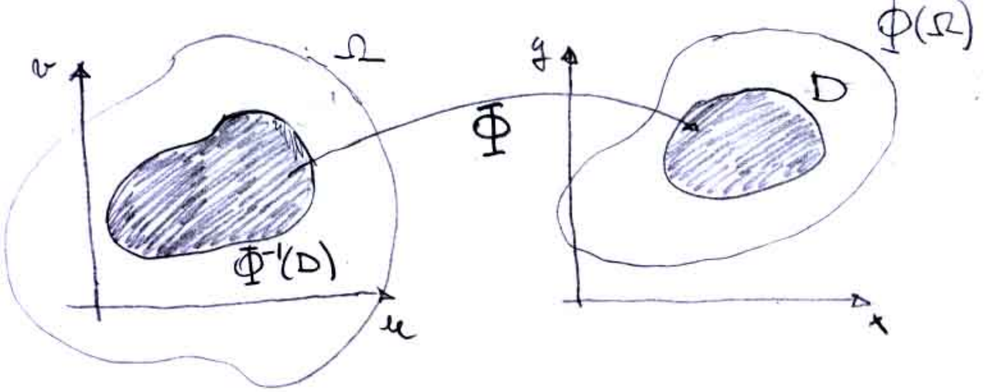
4. Cambiamento di variabili

Alle volte in un integrale doppio le variabili "originali" (x,y) possono rendere il calcolo complicato. In questi casi può essere utile effettuare un CAMBIAMENTO DI VARIABILI in un nuovo sistema di coordinate (u,v).

Indichiamo con $\Phi : \Omega \to \mathbb{R}^2$

$$\Phi(u,v) = (x(u,v), y(u,v)) \quad \text{per } (u,v) \in \Omega$$

l'applicazione che realizza il cambiamento dove Ω è un insieme aperto di $\mathbb{R}^2$.



Supponiamo che Φ sia biunivoca tra Ω e $\Phi(\Omega)$ e che le sue componenti $x(u,v)$ e $y(u,v)$ siano continue con le derivate parziali continue in Ω.

Inoltre, indichiamo con

$$J_{\Phi}(u,v) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix}$$

la cosiddetta MATRICE JACOBIANA di Φ, e con

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \det\left(J_{\Phi}(u,v)\right).$$

Supponiamo che $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \neq 0 \quad \forall (u,v) \in \Omega$, allora vale il seguente risultato.

TEOREMA 5.

Se D è misurabile e f è integrabile su D allora

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{\Phi^{-1}(D)} f(x(u,v), y(u,v)) \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\,dv.$$

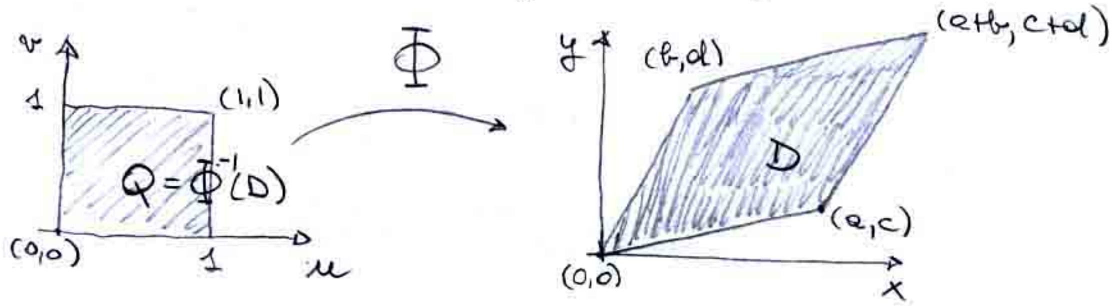
Osservazione: il termine $\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|$ rappresenta il fattore di trasformazione dell'elemento infinitesimo d'area $du\,dv$ a $dx\,dy$:

$$dx\,dy = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\,dv.$$

Ad esempio se Φ è l'applicazione lineare

$$\Phi(u,v) = (au + bv,\ cu + dv)$$

con $ad - bc \neq 0$ (Φ deve essere iniettiva) allora il quadrato $Q=[0,1]\times[0,1]$ viene trasformato in un parallelogramma D.

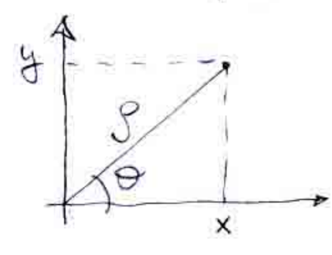


Anche se Φ realizza una corrispondenza biunivoca tra i punti di Q e quelli di D, in generale Φ "non conserva le aree":

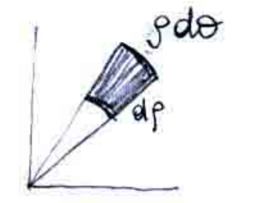
$$|Q|=1 \quad \text{e} \quad |\Phi(Q)|=|D|=|(a,c)\times(b,d)| = \left|\det\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right| = |ad-bc|.$$

È facile verificare dalla definizione che in questo caso $\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|$ è costante e uguale al rapporto delle due aree $|D|/|Q|$.

Un altro esempio importante è il caso delle coordinate polari



$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho \operatorname{sen}\theta \end{cases}$$



elemento d'area $= \rho\, d\rho\, d\theta$

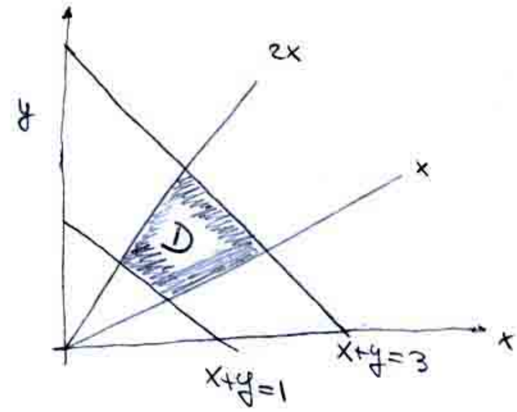
Quindi

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(\rho,\theta)}\right| = \left|\det\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial\rho} & \frac{\partial x}{\partial\theta} \\ \frac{\partial y}{\partial\rho} & \frac{\partial y}{\partial\theta} \end{bmatrix}\right| = \left|\det\begin{bmatrix} \cos\theta & -\rho\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \rho\cos\theta \end{bmatrix}\right| = \rho$$

ESEMPIO 6.

Calcolare

$$\iint_D \frac{dx\,dy}{xy} \quad \text{dove}$$



ossia

$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2;\ \ 0 < x \leq y \leq 2x\,,\ \ 1 \leq x+y \leq 3 \right\}$$

Poniamo $u = \frac{y}{x}$ e $v = x+y$. (*)

In questo modo il dominio nelle nuove coordinate è il rettangolo $[1,2] \times [1,3]$.

Per calcolare $\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|$ abbiamo due possibilità

1) Trovare x e y in funzione di u, v dalla definizione (*)

$$x = \frac{v}{u+1}\ \ ,\ \ y = \frac{uv}{u+1}$$

e

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \left| \det \begin{bmatrix} -\frac{v}{(u+1)^2} & \frac{1}{u+1} \\ \frac{v}{(u+1)^2} & \frac{u}{u+1} \end{bmatrix} \right| = \frac{v}{(u+1)^2}$$

così

$$\iint_D \frac{dx\,dy}{xy} = \int_{u=1}^{2} \int_{v=1}^{3} \frac{\cancel{(u+1)^2}}{u v^2} \cdot \frac{\cancel{v}}{\cancel{(u+1)^2}}\, du\, dv$$

$$= \int_{u=1}^{2} \frac{1}{u} \left(\int_{v=1}^{3} \frac{1}{v}\, dv \right) du = \left[\log u\right]_1^2 \left[\log v\right]_1^3$$

$$= \log(2) \cdot \log(3)$$

2) Ricordando che per una matrice quadrata invertibile M si ha che

$$\det M = \frac{1}{\det(M^{-1})}$$

allora

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right|^{-1} = \left|\det\begin{bmatrix} -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right|^{-1}$$

$$= \left(\frac{y+x}{x^2}\right)^{-1} = \frac{x^2}{y+x}$$

Così

$$\iint_D \frac{dx\,dy}{xy} = \int_{u=1}^{2}\int_{v=1}^{3} \frac{1}{\cancel{x}y}\cdot\frac{x^{\cancel{2}}}{y+x}\,du\,dv$$

$$\overset{(*)}{=} \int_{u=1}^{2}\int_{v=1}^{3} \frac{du\,dv}{uv} = \log(2)\cdot\log(3).$$

ESEMPIO 7.

Calcolare il volume della sfera di raggio R.
Come nell'esempio 4 calcoliamo il doppio del volume della semi-sfera di centro O.
Questa volta usiamo però le coordinate polari

$$V = 2\iint_{\{x^2+y^2\le R^2\}} \sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dx\,dy = 2\int_{\rho=0}^{R}\int_{\theta=0}^{2\pi} \sqrt{R^2-\rho^2}\cdot\rho\,d\rho\,d\theta$$

$$= 4\pi\int_{\rho=0}^{R} \sqrt{R^2-\rho^2}\,\rho\,d\rho \underset{\substack{t=R^2-\rho^2 \\ dt=-2\rho\,d\rho}}{=} 2\pi\int_{t=0}^{R^2} \sqrt{t}\cdot dt = 2\pi\left[\frac{2t^{3/2}}{3}\right]_0^{R^2} = \frac{4\pi R^3}{3}.$$

ESEMPIO 8

Provare che $I := \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.

E' interessante notare che tale integrale in una variabile non si può calcolare determinando una primitiva di e^{-x^2}.

Si può dimostrare infatti che tale primitiva non è esprimibile mediante le funzioni elementari. Un modo per aggirare questo problema è quello di considerare la seguente funzione in due variabili

$$\mathbb{R}^2 \ni (x,y) \longrightarrow e^{-(x^2+y^2)}.$$

Calcoliamo prima l'integrale doppio:

$$\iint_{Q_n} e^{-(x^2+y^2)} dx dy \qquad \text{con } Q_n = [-n,n] \times [-n,n]$$

$$= \int_{x=-n}^{n} \int_{y=-n}^{n} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \int_{x=-n}^{n} e^{-x^2} \left(\int_{y=-n}^{n} e^{-y^2} dy \right) dx$$

$$= \int_{x=-n}^{n} e^{-x^2} dx \cdot \int_{y=-n}^{n} e^{-y^2} dy = \left(\int_{-n}^{n} e^{-x^2} dx \right)^2.$$

Sono uguali!

Quindi

$$\lim_{n\to\infty} \iint_{Q_n} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = I^2.$$

Ora calcoliamo l'integrale doppio:

$$\iint_{D_n} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy \quad \text{con } D_n=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 :\ x^2+y^2\le n^2\}$$

$$= \int_{\rho=0}^{n}\int_{\theta=0}^{2\pi} e^{-\rho^2}\rho\,d\rho\,d\theta = 2\pi\int_0^n e^{-\rho^2}\rho\,d\rho$$

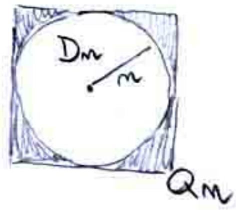
$$= 2\pi\left[e^{-\rho^2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\right]_0^n = \pi\left(1-e^{-n^2}\right).$$

Quindi

$$\lim_{n\to\infty}\iint_{D_n} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \lim_{n\to\infty}\pi\left(1-e^{-n^2}\right)=\pi.$$

Ora faremo vedere che i due limiti calcolati sono uguali e dunque $I^2=\pi$ ossia $I=\sqrt{\pi}$ (si noti che I deve essere positivo).

Intuitivamente tale uguaglianza si spiega per il fatto che i domini Q_n e D_n per $n\to\infty$ "coprono" $\mathbb{R}^2$. Per una giustificazione formale è necessario verificare che la differenza tende a 0 per $n\to+\infty$:



$$0\underset{Q_n\supset D_n}{\le}\iint_{Q_n} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy-\iint_{D_n} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$$

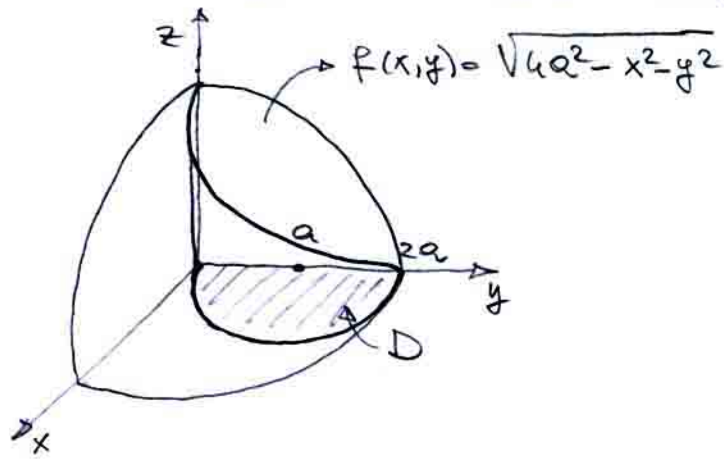
$$=\iint_{Q_n\setminus D_n} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy \le \sup_{(x,y)\in Q_n\setminus D_n} e^{-(x^2+y^2)}\cdot|Q_n\setminus D_n|$$

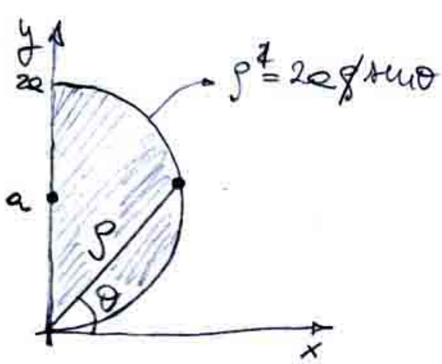
$$\le e^{-n^2}\cdot(4-\pi)\cdot n^2 \to 0.$$

ESEMPIO 9.

Calcolare il volume dell'intersezione del cilindro $x^2+y^2 \leq 2ay$ e della sfera $x^2+y^2+z^2 \leq 4a^2$.

Per simmetria basta considerare 4 volte il volume contenuto nell'ottante $\{x,y,z \geq 0\}$.





Così utilizzando le coordinate polari

$$V = 4\iint_D \sqrt{4a^2-x^2-y^2}\,dx\,dy = 4\int_{\theta=0}^{\pi/2}\int_{\rho=0}^{2a\,\mathrm{sen}\theta} \sqrt{4a^2-\rho^2}\,\rho\,d\rho\,d\theta$$

$$= 4\int_{\theta=0}^{\pi/2}\left[\frac{(4a^2-\rho^2)^{3/2}}{3/2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\right]_{\rho=0}^{2a\,\mathrm{sen}\theta} d\theta = \frac{32}{3}a^3\cdot\int_0^{\pi/2}(1-\cos^3\theta)\,d\theta$$

$$= \frac{32}{3}a^3\cdot\left(\frac{\pi}{2}-\int_0^{\pi/2}\cos^2\theta\,d(\mathrm{sen}\theta)\right) \qquad (\cos^2\theta = 1-\mathrm{sen}^2\theta)$$

$$= \frac{32}{3}a^3\cdot\left(\frac{\pi}{2}-\left[\mathrm{sen}\theta-\frac{\mathrm{sen}^3\theta}{3}\right]_0^{\pi/2}\right)$$

$$= \frac{16}{9}\cdot a^3\cdot(3\pi-4)$$

5. Integrali tripli

Le considerazioni fatte per gli integrali doppi si possono estendere agli integrali tripli. Riportiamo di seguito i risultati più importanti utili per il calcolo.

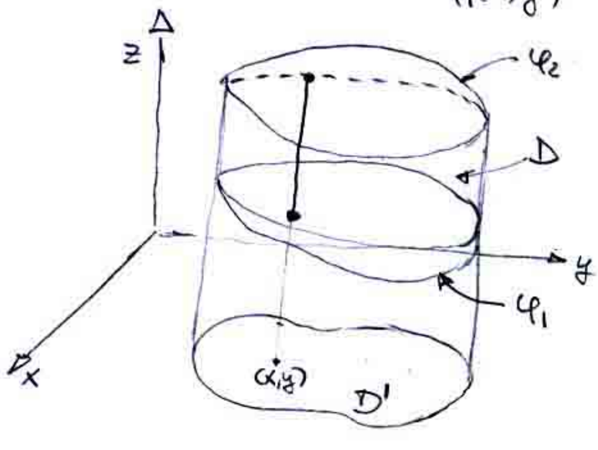
TEOREMA 6. (Formule di riduzione)
Sia D un dominio di $\mathbb{R}^3$ e sia $f: D \to \mathbb{R}$ una funzione continua.

1) INTEGRAZIONE PER "FILI". Se

$$D = \{(x,y,z) : (x,y) \in D',\ z \in [\varphi_1(x,y), \varphi_2(x,y)]\}$$

dove $\varphi_1, \varphi_2 \in C(D')$, allora

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iint_{D'} \left(\int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz \right) dx\,dy$$



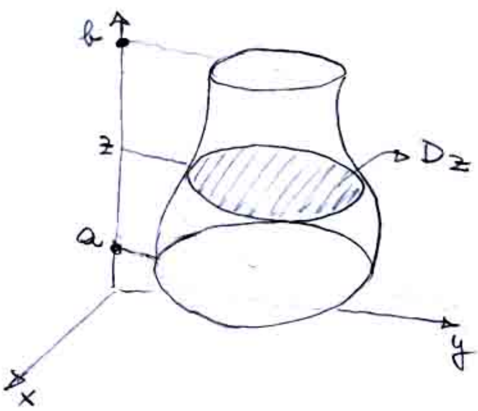
Quindi prima si integra in dz lungo i "fili" $[\varphi_1(x,y), \varphi_2(x,y)]$ e poi si calcola l'integrale doppio in $dx\,dy$ su D.

2) INTEGRAZIONE PER "SEZIONI". Se

$$D = \{ (x,y,z) : z \in [a,b] \text{ e } (x,y) \in D(z) \}$$

dove $D(z)$ è un insieme misurabile piano, allora

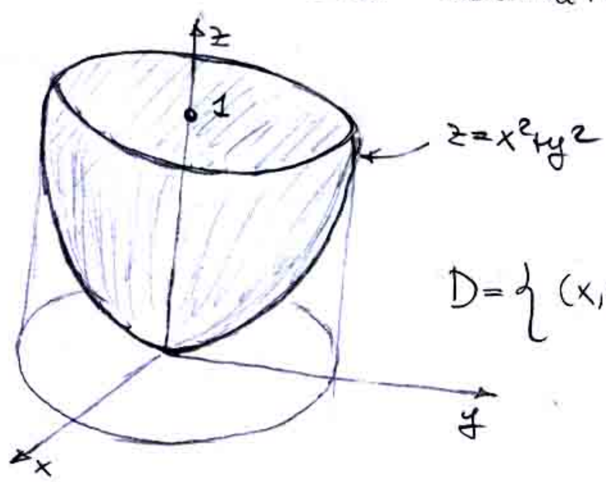
$$\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_a^b \left(\iint_{D(z)} f(x,y,z)\,dx\,dy \right) dz$$



Quindi si calcola prima l'integrale doppio in $dx\,dy$ sulle "sezioni" $D(z)$ e infine si integra in dz su $[a,b]$.

ESEMPIO 10.

Calcolare $\iiint_D |x| z \,dx\,dy\,dz$ dove D è il paraboloide troncato delimitato dalle superfici $z = 1$ e $z = x^2+y^2$.



$$D = \{ (x,y,z) : x^2+y^2 \le z \le 1 \}$$

1. Per fili:

$$\iiint_D |x|z \, dx\,dy\,dz = \iint_{\{x^2+y^2\leq 1\}} |x| \left(\int_{x^2+y^2}^{1} z \, dz \right) dx\,dy$$

$$= \iint_{\{x^2+y^2\leq 1\}} |x| \cdot \frac{1}{2}\left(1-(x^2+y^2)^2\right) dx\,dy$$

passando a coordinate polari

$$= \int_{\rho=0}^{1} \int_{\theta=0}^{2\pi} \rho|\cos\theta| \cdot \frac{1-\rho^4}{2} \rho \, d\rho \, d\theta$$

Dato che $\int_0^{2\pi} |\cos\theta| \, d\theta = 4\int_0^{\pi/2} \cos\theta \, d\theta = 4\left[\operatorname{sen}\theta\right]_0^{\pi/2} = 4$

$$= \int_0^1 2\rho^2 \cdot (1-\rho^4) \, d\rho = 2\left[\frac{\rho^3}{3} - \frac{\rho^7}{7}\right]_0^1 = \frac{8}{21}.$$

2. Per sezioni.

$$\iiint_D |x|z \, dx\,dy\,dz = \int_{z=0}^{1} z \left(\iint_{\{x^2+y^2\leq z\}} |x| \, dx\,dy \right) dz$$

$$= \int_{z=0}^{1} z \left(\int_{\rho=0}^{\sqrt{z}} \int_{\theta=0}^{2\pi} \rho|\cos\theta| \rho \, d\rho \, d\theta \right) dz$$

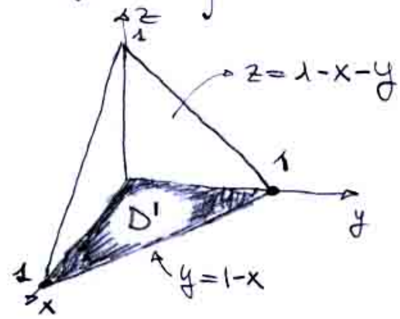
$$= 4\int_{z=0}^{1} z \left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^{\sqrt{z}} dz = \frac{4}{3}\left[\frac{z^{7/2}}{7/2}\right]_0^1 = \frac{8}{21}.$$

ESEMPIO 11.

Calcolare il valore medio della funzione $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$ nel tetraedro

$$D = \{(x,y,z) : x+y+z \le 1,\ x,y,z \ge 0\}$$

Il volume di D è



$$\iiint_D 1 \, dx\,dy\,dz =$$

$$= \iint_{D'} \left(\int_{z=0}^{1-x-y} dz \right) dx\,dy$$

$$= \int_{x=0}^{1} \left(\int_{y=0}^{1-x} (1-x-y)\, dy \right) dx = \int_0^1 \left[(1-x)y - \frac{y^2}{2} \right]_0^{1-x} dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 (1-x)^2 dx = \frac{1}{2}\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{6}$$

Ora calcoliamo $\iiint_D (x^2+y^2+z^2)\, dx\,dy\,dz$.

Per linearità possiamo calcolare l'integrale di un termine alla volta. Dato che il dominio D è simmetrico rispetto allo scambio di coordinate (se $(x,y,z) \in D$ anche $(x,z,y), (y,x,z) \dots \in D$) si deduce che i tre integrali sono uguali.

Facciamo il calcolo per x^2 (senza ripetere i passaggi precedenti)

$$\iiint_D x^2 dx\,dy\,dz = \int_{x=0}^{1} x^2 \cdot \frac{(1-x)^2}{2} dx = \frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{3} - \frac{2x^4}{4} + \frac{x^5}{5} \right]_0^1 = \frac{1}{60}$$

Così

$$\overline{f}_D = \frac{3 \cdot \frac{1}{60}}{\frac{1}{6}} = \frac{3}{10}.$$

TEOREMA 7. (Cambiamento di variabili)

Sia D un dominio misurabile di $\mathbb{R}^3$
e sia $f: D \to \mathbb{R}$ una funzione continua
Se $\Phi: D' \to D$ è un'applicazione biunivoca

$$\Phi(u,v,w) = (x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w))$$

tale che le componenti x, y, z e le loro derivate parziali sono continue in un aperto $\Omega \supset D'$, allora

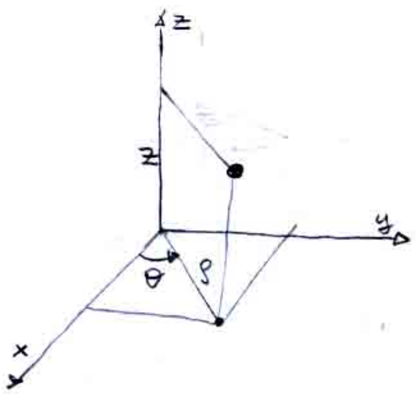
$$\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz =$$

$$= \iiint_{\Phi^{-1}(D)} f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)) \cdot \left| \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} \right| du\,dv\,dw$$

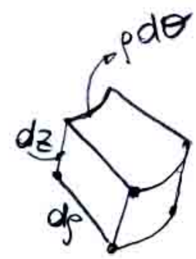
dove $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}$ è il determinante della matrice jacobiana

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial x}{\partial w} \\[2ex] \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial w} \\[2ex] \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial w} \end{bmatrix}$$

Nel caso delle COORDINATE CILINDRICHE:



$$\begin{cases} x = \rho \cos\theta \\ y = \rho \,\mathrm{sen}\,\theta \\ z = z \end{cases} \qquad \begin{array}{l} \theta \in [0, 2\pi) \\ \rho \geq 0 \end{array}$$

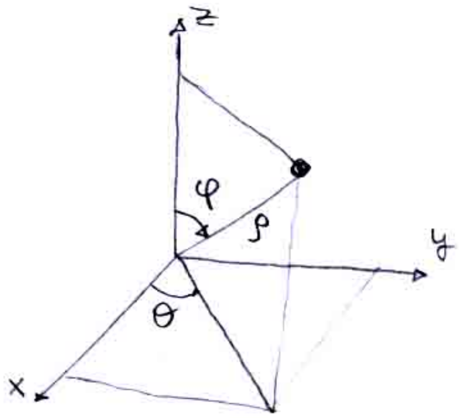


$$\left| \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,z)} \right| = \rho$$

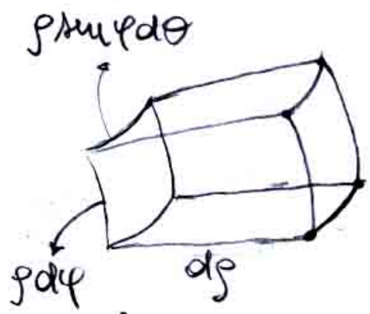
elemento di volume

$d\rho \cdot dz \cdot \rho d\theta = \rho \, d\rho \, d\theta \, dz$

Invece per le COORDINATE SFERICHE:



$$\begin{cases} x = \rho \,\mathrm{sen}\,\varphi \cos\theta \\ y = \rho \,\mathrm{sen}\,\varphi \,\mathrm{sen}\,\theta \\ z = \rho \cos\varphi \end{cases} \qquad \begin{array}{l} \theta \in [0, 2\pi) \\ \varphi \in [0, \pi] \\ \rho \geq 0 \end{array}$$



$$\left| \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,\varphi)} \right| = \rho^2 \,\mathrm{sen}\,\varphi$$

elemento di volume

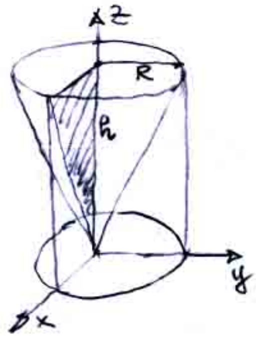
$\rho \,\mathrm{sen}\,\varphi \, d\theta \cdot \rho d\varphi \cdot d\rho$

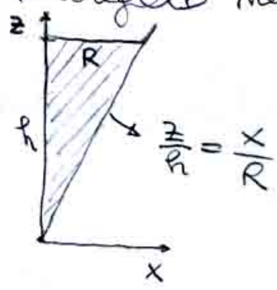
$= \rho^2 \,\mathrm{sen}\,\varphi \; d\rho \, d\theta \, d\varphi$

ESEMPIO 12.

Calcolare il volume del cono retto con il raggio di base R e altezza h.

$$C = \left\{ (x,y,z) : \left(\frac{z}{h}\right)^2 \geq \frac{x^2+y^2}{R^2} \ e \ 0 \leq z \leq h \right\}.$$





Il triangolo nel piano xz viene ruotato attorno all'asse z di 2π.

Per il calcolo usiamo le coordinate cilindriche

$$\iiint_C 1 \, dx\,dy\,dz = \int_{\theta=0}^{2\pi} \left(\left(\int_{\rho=0}^{R} \left(\int_{z=\frac{h}{R}\cdot\rho}^{h} dz \right) \right) \rho \, d\rho \right) d\theta$$

$$= \int_{\theta=0}^{2\pi} \left(\int_{\rho=0}^{R} h\left(1-\frac{\rho}{R}\right)\rho \, d\rho \right) d\theta = \int_0^{2\pi} h \cdot \left[\frac{\rho^2}{2} - \frac{\rho^3}{3R} \right]_0^R d\theta = \frac{\pi R^2 \cdot h}{3}$$

ESEMPIO 13.

Calcolare $\iiint_D |z| \, dx\,dy\,dz$ con $D = \{ x^2+y^2+z^2 \leq 1 \}$

$$= 2 \int_{\varphi=0}^{\pi/2} \left(\int_{\theta=0}^{2\pi} \left(\int_{\rho=0}^{1} \rho\cos\varphi \cdot \rho^2 \operatorname{sen}\varphi \, d\rho \right) d\theta \right) d\varphi$$

$$= 2\pi \int_{\varphi=0}^{\pi/2} \left[\frac{\rho^4}{4} \right]_0^1 \cdot \operatorname{sen}(2\varphi) \, d\varphi = \frac{\pi}{2} \left[\frac{-\cos(2\varphi)}{2} \right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}$$

ESEMPIO 14.

Per quali $\alpha>0$ è finito il limite $\lim_{R\to+\infty} I_R$ dove

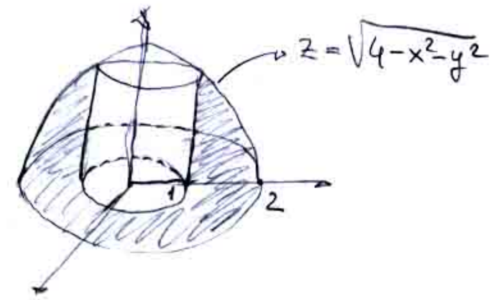
$$I_R = \iiint_{\{1\leq x^2+y^2+z^2\leq R^2\}} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)^{\alpha} dx\,dy\,dz \quad ?$$

Si ha che per $R\geq 1$

$$I_R = \int_{\rho=1}^{R} \frac{1}{\rho^\alpha}\cdot\left(\int_{\theta=0}^{2\pi}\left(\int_{\varphi=0}^{\pi} \rho^2 \operatorname{sen}\varphi\, d\varphi\right) d\theta\right) d\rho = 4\pi \int_{\rho=1}^{R} \frac{1}{\rho^{\alpha-2}}\, d\rho.$$

Tale integrale in una variabile converge se e solo se $\alpha-2>1$ ossia per $\alpha>3$.

ESEMPIO 15.



Calcolare $\displaystyle \frac{1}{|D|}\iiint_D \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dx\,dy\,dz$

con $D = \left\{ (x,y,z) :\ \begin{array}{l} 1\leq x^2+y^2\leq 4 \,; \\ 0\leq z\leq \sqrt{4-x^2-y^2} \end{array} \right\}$.

$$|D| = \int_{\theta=0}^{2\pi}\left(\int_{\rho=1}^{2}\left(\int_{z=0}^{\sqrt{4-\rho^2}} dz\right)\rho\, d\rho\right) d\theta = 2\pi\int_1^2 \sqrt{4-\rho^2}\,\rho\, d\rho$$

$$= -\pi\left[\frac{(4-\rho^2)^{3/2}}{3/2}\right]_1^2 = 2\pi\sqrt{3}$$

$$\iiint_D \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dx\,dy\,dz = \int_{\theta=0}^{2\pi}\left(\int_{\rho=1}^{2}\left(\int_{z=0}^{\sqrt{4-\rho^2}} \frac{z}{\cancel{\rho}}\, dz\right)\cancel{\rho}\, d\rho\right) d\theta = 2\pi\int_{\rho=1}^{2}\left[\frac{z^2}{2}\right]_0^{\sqrt{4-\rho^2}} d\rho$$

$$= \pi\left[4\rho - \frac{\rho^3}{3}\right]_1^2 = \frac{5}{3}\pi$$

Quindi il risultato è $\left(\frac{5}{3}\pi\right)/\left(2\pi\sqrt{3}\right) = \dfrac{5\sqrt{3}}{18}$

6. Applicazioni in geometria e in fisica

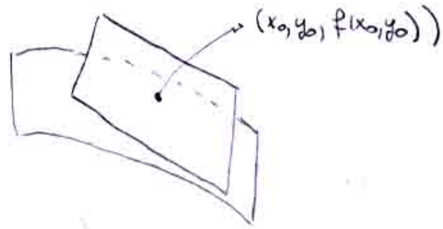
- Area della superficie di un grafico.

Sia $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ allora il suo grafico è dato dall'insieme

$$\{ (x,y,z) : \quad (x,y) \in D \ \text{e} \ z = f(x,y) \}.$$

Se f è differenziabile in un punto $(x_0,y_0) \in D$ allora il grafico di f ammette un PIANO TANGENTE nel punto $(x_0, y_0, f(x_0,y_0))$ dato dall'equazione:

$$z = P_{(x_0,y_0)}(x,y)$$



dove

$$P_{(x_0,y_0)}(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) \cdot (x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)$$

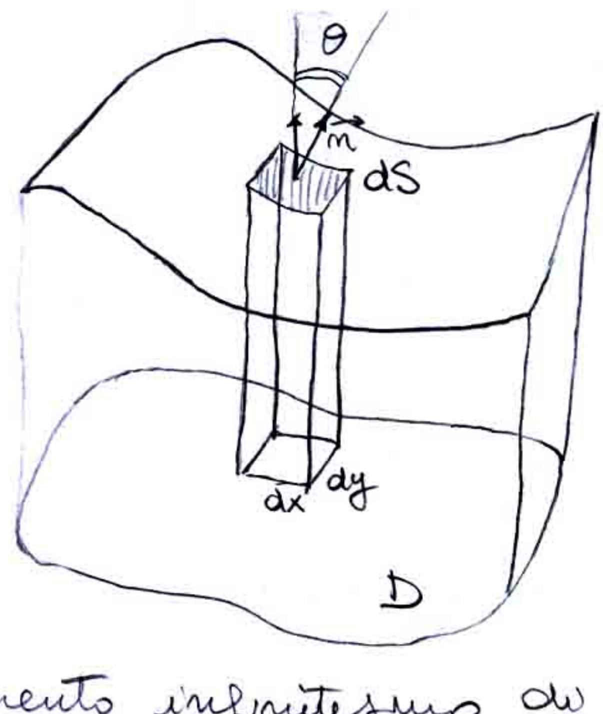
è il polinomio di Taylor del primo ordine di f centrato nel punto (x_0,y_0).

Per la differenziabilità il piano tangente può essere considerato un'"approssimazione lineare" del grafico di f "vicino" a (x_0,y_0):

$$f(x,y) = P_{(x_0,y_0)}(x,y) + o\left(\|(x,y)-(x_0,y_0)\| \right).$$

Il vettore unitario $\vec{n}$ normale alla superficie del grafico di f in un punto (x_0, y_0) è normale anche al piano tangente in quel punto e dunque è uguale a

$$\vec{n} = \frac{\left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1\right)}{\left\|\left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1\right)\right\|}$$



L'elemento infinitesimo di area è

$$dS = \frac{dx \cdot dy}{\cos\theta}$$

dove θ è l'angolo tra il vettore $\vec{n}$ e il versore dell'asse z, $(0,0,1)$. Quindi

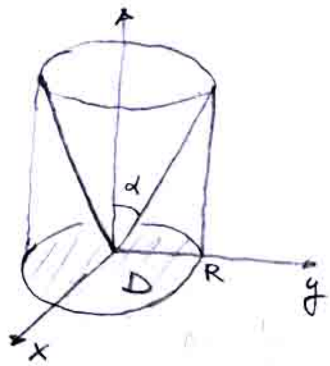
$$\cos\theta = (0,0,1) \cdot \vec{n} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}}$$

Pertanto l'AREA DELLA SUPERFICIE del grafico di $f(x,y)$ sopra D è data da

$$\iint_D dS = \iint_D \sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\, dx\,dy .$$

ESEMPIO 16.

Calcolare l'area della parte di cono data dall'equazione $z = m\sqrt{x^2+y^2}$, $0 \le z \le mR$ dove $m = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$.



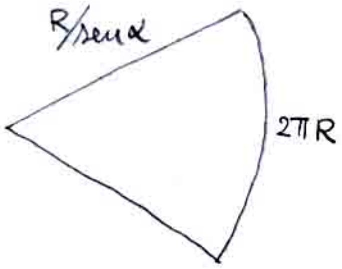
$$f(x,y) = m\sqrt{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{mx}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{my}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$|S| = \iint_D \sqrt{1+\frac{m^2x^2}{x^2+y^2}+\frac{m^2y^2}{x^2+y^2}}\, dx\,dy$$

$$= \iint_D \sqrt{1+m^2}\, dx\,dy = \sqrt{1+m^2}\cdot|D| = \frac{\pi R^2}{\operatorname{sen}\alpha}$$

Questa superficie sviluppata nel piano è



$$|S| = \frac{R}{\operatorname{sen}\alpha}\cdot\frac{2\pi R}{2} = \frac{\pi R^2}{\operatorname{sen}\alpha}$$

ESEMPIO 17.

Calcolare l'area della superficie della sfera di raggio 1. Poniamo $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}=\sqrt{1+\frac{x^2}{1-x^2-y^2}+\frac{y^2}{1-x^2-y^2}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}},$$

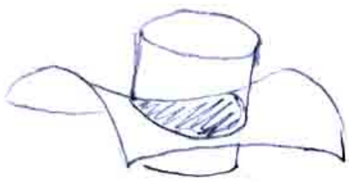
Quindi

$$|S|=2\iint_{\{x^2+y^2\le 1\}}\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\,dx\,dy=2\int_{\rho=0}^{1}\int_{\theta=0}^{2\pi}\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}\,\rho\,d\rho\,d\theta$$

$$=4\pi\int_0^1\frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}\,d\rho \underset{\substack{t=1-\rho^2\\dt=-2\rho}}{=} 2\pi\int_{t=0}^{1}\frac{1}{\sqrt{t}}\,dt=2\pi\Big[2\sqrt{t}\Big]_0^1=4\pi$$

ESEMPIO 18.

Calcolare l'area della superficie del paraboloide iperbolico $z=x^2-y^2$ che si trova all'interno del cilindro $x^2+y^2=1$.



$z=f(x,y)=x^2-y^2$

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}=\sqrt{1+4x^2+4y^2}$$

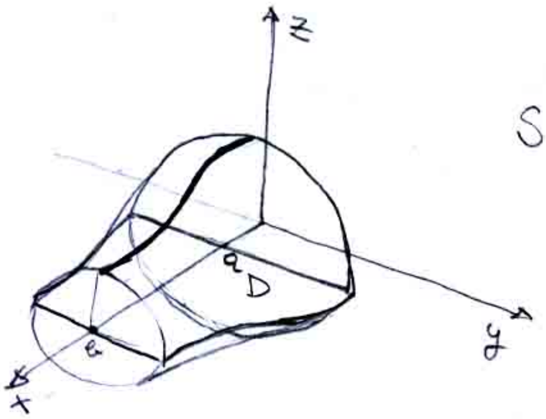
Quindi

$$|S|=\iint_{\{x^2+y^2\le 1\}}\sqrt{1+4(x^2+y^2)}\,dx\,dy=\int_{\rho=0}^{1}\int_{\theta=0}^{2\pi}\sqrt{1+4\rho^2}\,\rho\,d\rho\,d\theta$$

$$=2\pi\int_0^1\sqrt{1+4\rho^2}\,\rho\,d\rho \underset{\substack{t=1+4\rho^2\\dt=8\rho}}{=} \frac{\pi}{4}\int_1^5\sqrt{t}\,dt=\frac{\pi}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\Big[t^{3/2}\Big]_1^5=\frac{\pi(5\sqrt{5}-1)}{6}$$

- Area di una superficie ottenuta per rotazione

Sia S la superficie ottenuta ruotando il grafico di una funzione $\varphi:[a,b]\to\mathbb{R}^+$ attorno all'asse x



$$S=\left\{(x,y,z):\ \begin{array}{l} a\le x\le b \\ \sqrt{y^2+z^2}=\varphi(x)\end{array}\right\}$$

La parte di S che sta nel semispazio $\{z\ge 0\}$ è il grafico della funzione

$$z=f(x,y)=\sqrt{\varphi(x)^2-y^2}$$

sopra il dominio $D=\{(x,y):\ a\le x\le b,\ |y|\le\varphi(x)\}$.

Quindi

$$|S|=2\iint_D\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy$$

$$=2\iint_D\sqrt{1+\frac{(\varphi(x)\cdot\varphi'(x))^2}{\varphi(x)^2-y^2}+\frac{(-y)^2}{\varphi^2(x)-y^2}}\,dx\,dy$$

$$=2\int_{x=a}^{b}\sqrt{1+(\varphi'(x))^2}\left(\int_{y=-\varphi(x)}^{\varphi(x)}\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{y}{\varphi(x)}\right)^2}}\,dy\right)dx$$

$$=2\int_{x=a}^{b}\sqrt{1+(\varphi'(x))^2}\cdot\varphi(x)\cdot\underbrace{\left[\arcsin\left(\frac{y}{\varphi(x)}\right)\right]_{y=-\varphi(x)}^{\varphi(x)}}_{\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\pi}\,dx$$

e quindi

$$|S| = 2\pi \int_a^b \varphi(x) \cdot \sqrt{1+\varphi'(x)^2}\, dx$$

ESEMPIO 19.

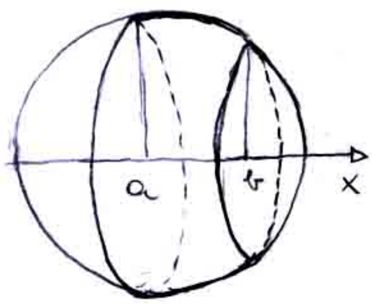
Calcolare l'area della parte della sfera

$$x^2+y^2+z^2=R^2$$

compresa tra i due piani paralleli

$$x=a \text{ e } x=b$$

con $-R \leq a < b \leq R$.



Possiamo considerare la funzione

$$\varphi(x) = \sqrt{R^2-x^2}$$

e applicare la formula precedente.

$$|S| = 2\pi \int_a^b \sqrt{R^2-x^2} \cdot \sqrt{1+\frac{(-x)^2}{R^2-x^2}}\, dx$$

$$= 2\pi \int_a^b \cancel{\sqrt{R^2-x^2}} \cdot \frac{R}{\cancel{\sqrt{R^2-x^2}}}\, dx$$

$$= 2\pi R(b-a)$$

Quindi tale area dipende solo dalla distanza dei due piani e dal raggio della sfera. Se $b=R$ e $a=-R$ si ottiene l'area della sfera $4\pi R^2$.

- Centro di massa e momento d'inerzia.

Per un solido che occupa una regione di spazio D e avente densità continua $\delta(x,y,z)$, il CENTRO DI MASSA $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ è dato da

$$\bar{x} = \frac{\iiint_D x \cdot \delta \, dx\,dy\,dz}{\iiint_D \delta \, dx\,dy\,dz},$$

$$\bar{y} = \frac{\iiint_D y \cdot \delta \, dx\,dy\,dz}{\iiint_D \delta \, dx\,dy\,dz},$$

$$\bar{z} = \frac{\iiint_D z \cdot \delta \, dx\,dy\,dz}{\iiint_D \delta \, dx\,dy\,dz}.$$

Analoghe formule valgono per distribuzioni di massa 2-dimensionali o 1-dimensionali.

Il MOMENTO D'INERZIA dello stesso solido attorno ad un asse ℓ è dato da

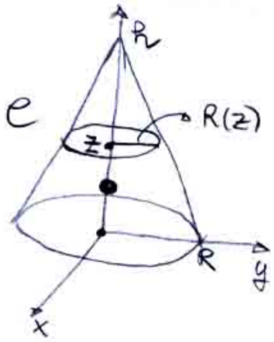
$$I = \iiint_D \mathrm{dist}((x,y,z),\ell)^2 \cdot \delta \, dx\,dy\,dz$$

dove $\mathrm{dist}((x,y,z),\ell)$ indica la distanza del punto (x,y,z) dalla retta ℓ.

ESEMPIO 20

Calcolare il centro di massa di un cono omogeneo di altezza h e raggio di base R.

Posizioniamo il cono nel seguente modo.



Possiamo supporre che $\delta = 1$.

Per simmetria $\bar{x} = \bar{y} = 0$.

Resta da calcolare $\bar{z}$.

La sezione circolare ad altezza z ha raggio $R(z)$:

$$\frac{R(z)}{h-z} = \frac{R}{h} \implies R(z) = R\left(1 - \frac{z}{h}\right)$$

Dato che $|C| = \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot h$ allora

$$\bar{z} = \frac{3}{\pi R^2 \cdot h} \int_{z=0}^{h} z \left(\iint_{\{x^2+y^2 \le R^2(z)\}} dx\,dy \right) dz$$

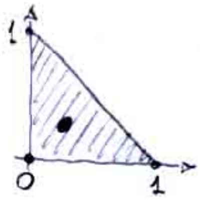
$$= \frac{3}{\cancel{\pi} R^2 \cdot h} \int_0^h z \cdot \cancel{\pi} R^2(z)\, dz$$

$$= \frac{3}{\cancel{R^2} \cdot h} \int_0^h z \cdot \cancel{R^2} \left(1 - \frac{z}{h}\right)^2 dz \underset{t = \frac{z}{h}}{=} 3 \cdot h \int_0^1 t (1-t)^2\, dt$$

$$= 3h \cdot \left[\frac{t^2}{2} - \frac{2t^3}{3} + \frac{t^4}{4} \right]_0^1 = \frac{h}{4}$$

ESEMPIO 21.

Calcolare il centro di massa del triangolo



nei seguenti due casi

1) $\delta = 1$, 2) $\delta = x$.

1) $$\overline{x} = \frac{1}{1/2} \cdot \int_{x=0}^{1} \int_{y=0}^{1-x} x \, dx dy = 2 \int_{x=0}^{1} x(1-x) \, dx = 2\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

Per simmetria $\overline{y} = \frac{1}{3}$.

2) Prima calcoliamo la massa del triangolo

$$m = \int_0^1 \int_0^{1-x} x \, dx dy = \frac{1}{6}.$$ Quindi $\overline{x}$ e $\overline{y}$.

$$\overline{x} = \frac{1}{m} \int_{x=0}^{1} \int_{y=0}^{1-x} x^2 \, dx dy = 6 \cdot \int_0^1 x^2(1-x) \, dx = \frac{1}{2}$$

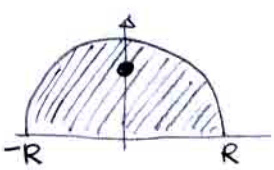
$$\overline{y} = \frac{1}{m} \int_{x=0}^{1} \int_{y=0}^{1-x} y \cdot x \, dx dy = 6 \int_0^1 x \, \frac{(1-x)^2}{2} \, dx = \frac{1}{4}$$

ESEMPIO 22.

Calcolare il centro di massa del semicerchio $(\delta = 1)$

$$D = \{(x,y) : \ x^2 + y^2 \leq R^2 \ e \ y \geq 0\}$$

Per simmetria $\overline{x} = 0$. Mentre

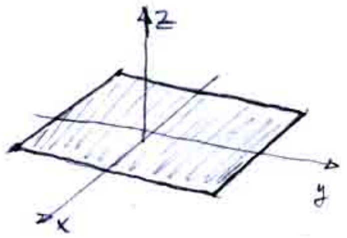


$$\overline{y} = \frac{1}{|D|} \iint_D y \, dx dy = \frac{2}{\pi R^2} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\rho=0}^{R} \rho \, \mathrm{sen}\,\theta \, \rho \, d\theta \, d\rho$$

$$= \frac{2}{\pi R^2} \left[-\cos\theta\right]_0^{\pi} \cdot \left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^R = \frac{2}{\pi R^2} \cdot 2 \cdot \frac{R^3}{3} = \frac{4R}{3\pi} \quad (< R)$$

ESEMPIO 23.

Calcolare per il rettangolo $D = [-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}] \times [-\frac{b}{2}, \frac{b}{2}]$ omogeneo il rapporto $\frac{I}{m}$ rispetto all'asse z.



$m = a \cdot b$

$$I = \iint_D (x^2+y^2)\,dx\,dy$$

$$= 4\int_{x=0}^{a/2}\int_{y=0}^{b/2} (x^2+y^2)\,dx\,dy$$

$$= 4\int_0^{a/2}\left[x^2y + \frac{y^3}{3}\right]_0^{b/2} dx = \int_0^{a/2}\left(2x^2b + \frac{b^3}{6}\right)dx =$$

$$= \left[\frac{2x^3b}{3} + \frac{b^3x}{6}\right]_0^{a/2} = \frac{a^3b}{12} + \frac{b^3a}{12} \quad \text{e quindi } I/m = \frac{a^2+b^2}{12}.$$

ESEMPIO 24.

Calcolare per la sfera di raggio R, omogenea il rapporto $\frac{I}{m}$ rispetto a una retta passante per il centro.

La massa è $m = \frac{4}{3}\pi R^3$ $(\delta = 1)$. Posso supporre che la sfera sia $\{x^2+y^2+z^2 \leq R^2\}$ e la retta sia l'asse z.

Così

$$I = \iiint_{\{x^2+y^2+z^2\leq R^2\}} (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz \overset{\substack{\text{coord} \\ \text{sferiche}}}{=} \int_{\varphi=0}^{\pi}\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{\rho=0}^{R} (\rho \sin\varphi)^2(\rho^2\sin\varphi)\,d\rho\,d\theta\,d\varphi$$

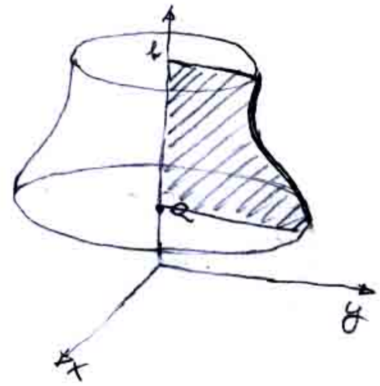
$$= 2\pi\int_0^{\pi}\sin^3\varphi\,d\varphi \cdot \int_{\rho=0}^{R}\rho^4\,d\rho = 2\pi \cdot \frac{4}{3}\cdot\frac{R^5}{5} = \frac{8\pi R^5}{15}$$

Quindi $\frac{I}{m} = \frac{2R^2}{5}$.

$$\left(\int \sin^3\varphi\,d\varphi = \int \sin\varphi(1-\cos^2\varphi)\,d\varphi = \frac{\cos^3\varphi}{3} - \cos\varphi + c\right)$$

• Volume di un solido ottenuto per rotazione.

Sia S il solido ottenuto ruotando il grafico di una funzione $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}^+$ attorno all'asse z.



$$S = \left\{ (x,y,z) : \begin{array}{l} a \le z \le b \\ 0 \le \sqrt{x^2+y^2} \le \varphi(z) \end{array} \right\}$$

allora passando alle coordinate cilindriche si ha che il volume $|S|$ di S è uguale a

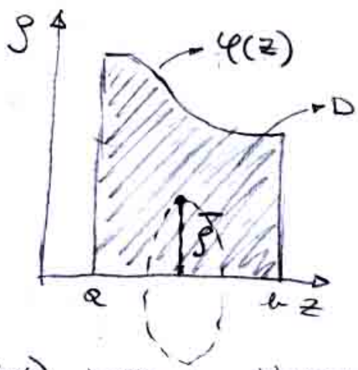
$$|S| = \iiint_S 1 \, dx\,dy\,dz = \int_{z=a}^{b} \left(\int_{\theta=0}^{2\pi} \left(\int_{\rho=0}^{\varphi(z)} \rho \, d\rho \right) d\theta \right) dz$$

$$= 2\pi \cdot \int_a^b \left[\frac{\rho^2}{2} \right]_0^{\varphi(z)} dz = \pi \int_a^b (\varphi(z))^2 \, dz$$

Inoltre possiamo anche affermare che

$$|S| = 2\pi \int_{z=a}^{b} \left(\int_{\rho=0}^{\varphi(z)} \rho \, d\rho \right) dz = 2\pi \iint_D \rho \, d\rho \, dz = 2\pi \, \bar{\rho} \, |D| \quad (*)$$

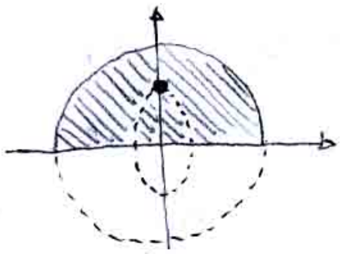
dove $\bar{\rho}$ è la coordinata $\bar{\rho}$ del centro di massa della sezione piana omogenea



La relazione (*) viene spesso indicata come la FORMULA DI PAPPO-GULDINO per i volumi.

ESEMPIO 25.

Il centro di massa del semicerchio dell'esempio 22

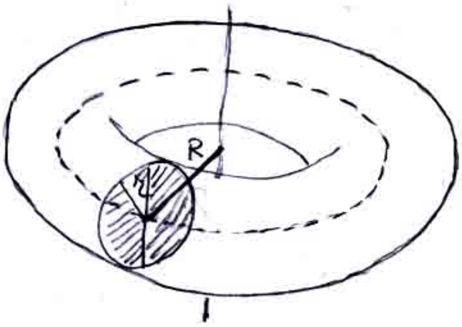


può essere anche calcolato sapendo il volume della sfera e l'area del semi'cerchio:

$$\frac{4\pi R^3}{3} = 2\pi \cdot \bar{y} \cdot \left(\frac{\pi R^2}{2}\right) \Rightarrow \bar{y} = \frac{4R}{3\pi}$$

ESEMPIO 26.

Calcolare il volume del TORO ottenuto ruotando un cerchio di raggio r attorno ad un asse distante R dal centro del disco.



Per la formula di PG, dato che il centro di massa del cerchio coincide con il centro geometrico otteniamo

$$V = 2\pi \cdot R \cdot \pi r^2$$

Tale volume è uguale al volume del cilindro che si otterrebbe "tagliando" il toro lungo il cerchio generatore e "raddrizzando".