ANALISI COMPLESSA

1. Introduzione alle funzioni olomorfe

Sia Ω un sottoinsieme di $\mathbb{C}$. Una funzione $f(z)$ che associa ad ogni numero complesso $z \in \Omega$ un numero complesso $f(z)$ si dice FUNZIONE DI VARIABILE COMPLESSA e si indica con

$$\Omega \ni z \longmapsto f(z) \in \mathbb{C}.$$

Ogni funzione di questo tipo può essere pensata come una funzione da un sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^2$: posto $z = x + iy \in \Omega$ con x, y numeri reali si ha che

$$f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$$

dove

$$u(x,y) = \mathrm{Re}(f(z)) \quad e \quad v(x,y) = \mathrm{Im}(f(z))$$

sono rispettivamente la FUNZIONE PARTE REALE e la FUNZIONE PARTE IMMAGINARIA associate a f. Ad esempio la funzione reciproco $f(z) = \frac{1}{z}$ è definita in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$

e si può scrivere come

$$f(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}.$$

In tal caso $f(z) = u(x,y) + i v(x,y)$ con

$$u(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2} \quad \text{e} \quad v(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2}.$$

Altri esempi di funzione di variabile complessa che possono essere considerate "elementari" sono:

1) Il coniugato

$$f(z) = \overline{z} = x - iy \quad \text{per } z \in \mathbb{C}$$

2) I polinomi

$$f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0 \quad \text{per } z \in \mathbb{C}$$

con i coefficienti $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$.

3) Le funzioni razionali

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} \quad \text{per } z \in \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} : Q(z) = 0\}$$

con P e Q polinomi a coefficienti in $\mathbb{C}$.

4) L'esponenziale complesso

$$f(z) = e^z = e^{x+iy} \overset{def}{=} e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y) \quad \text{per } z \in \mathbb{C}.$$

5) Il seno complesso e il coseno complesso

$$f(z) = \operatorname{sen} z \overset{\text{def}}{=} \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \frac{e^{ix-y} - e^{-ix+y}}{2i}$$

$$= e^{-y}(\cos x + i \operatorname{sen} x) \cdot \frac{1}{2i}$$
$$- e^{y}(\cos x - i \operatorname{sen} x) \cdot \frac{1}{2i}$$

$$= \operatorname{sen} x \cdot \cosh y + i \cos x \operatorname{senh} y$$

dove

$$\cosh y = \frac{e^{y} + e^{-y}}{2} \quad e \quad \operatorname{senh} y = \frac{e^{y} - e^{-y}}{2}$$

sono rispettivamente il coseno iperbolico e il seno iperbolico (sono funzioni reali!)

Si noti che

$$\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1 \quad e \quad \cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1.$$

La definizione del coseno complesso è

$$f(z) = \cos z \overset{\text{def}}{=} \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos x \cosh y - i \operatorname{sen} x \operatorname{senh} y.$$

6) Il logaritmo complesso

L'idea della definizione è di estendere il logaritmo reale: Se $z = |z| e^{i\theta} \neq 0$ allora "formalmente":

$$\log z = \log(|z| e^{i\theta}) = \log |z| + i\theta$$

Il termine $\log |z|$ è il "solito" logaritmo reale valutato in $|z| > 0$.

La parte immaginaria è invece uguale a θ.
Ora nella notazione esponenziale $z=|z|e^{i\theta}$ l'angolo θ ha infiniti valori possibili:

$$\theta = \theta_0 + 2k\pi \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

dove $\theta_0 \overset{def}{=} \arg(z) \in (-\pi, \pi]$ si dice ARGOMENTO PRINCIPALE. Questo comporta che ci sono infiniti modi di definire il logaritmo complesso. Uno dei modi è il cosiddetto LOGARITMO PRINCIPALE;

$$\log z \overset{def}{=} \log|z| + i\arg(z) \quad \text{per } z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}.$$

7) La radice n-sima complessa

Anche in questo caso il problema è che dato un numero complesso $z \neq 0$ ci sono n radici n-sime distinte (se $z=0$ c'è una sola radice ossia 0): le soluzioni dell'equazione $w^n = z = |z|e^{i\arg(z)}$ sono

$$w_k = \sqrt[n]{|z|}\cdot e^{i\left(\frac{\arg(z)}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right)}$$

per $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$

Si definisce la radice n-sima complessa PRINCIPALE come

$$f(z) = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\, e^{i\frac{\arg(z)}{n}} \quad \text{per } z \in \mathbb{C}.$$

Anche per le funzioni di variabile complessa possiamo introdurre il concetto di limite, continuità e derivabilità.

Sia Ω un insieme aperto di $\mathbb{C}$ e sia $f: \Omega \to \mathbb{C}$.

Se $z_0 \in \Omega$ si dice che

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = w$$

se $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ tale che se $0 < |z - z_0| < \delta$ e $z \in \Omega$ allora $|f(z) - w| < \varepsilon$. Questo è equivalente a dire che se $z = x + iy$, $z_0 = x_0 + iy_0$; $f(x,y) = u(x,y) + iv(x,y)$ e $w = a + ib$ allora

$$\lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} u(x,y) = a \quad \text{e} \quad \lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} v(x,y) = b.$$

f si dice CONTINUA in z_0 se $\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$.

f si dice DERIVABILE (in senso complesso) in z_0 se esiste finito il limite

$$f'(z_0) \overset{\text{Def}}{=} \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

ovvero, per $z \to z_0$,

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0) \cdot (z - z_0) + o(|z - z_0|).$$

Come nel caso reale, se una funzione è derivabile in z_0, allora in z_0 è anche continua.

Inoltre per la derivata in senso complesso valgono delle regole di calcolo analoghe al caso reale.

TEOREMA 1.

Se f, g sono derivabili in $z_0 \in \mathbb{C}$ allora anche $f+g$, $f \cdot g$ e f/g (se $g(z_0) \neq 0$) lo sono e

$$(f+g)'(z_0) = f'(z_0) + g'(z_0)$$

$$(fg)'(z_0) = f'(z_0)\, g(z_0) + f(z_0) \cdot g'(z_0)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) = \frac{f'(z_0) g(z_0) - f(z_0) \cdot g'(z_0)}{(g(z_0))^2}$$

Se f e' derivabile in z_0 e g e' derivabile in $f(z_0)$ allora $g(f(z))$ e' derivabile in z_0 e

$$\left(g(f(z))\right)' = g'(f(z_0)) \cdot f'(z_0).$$

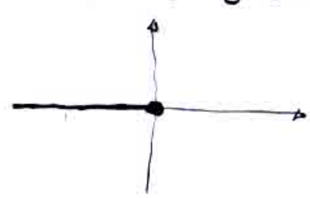
Tra le funzioni elementari, i polinomi, le funzioni razionali, e^z, $\operatorname{sen} z$, $\cos z$ sono derivabili nel loro insieme di definizione con i "soliti" risultati. Ad esempio

$$(z^2)' = 2z, \quad \left(\frac{1}{z}\right)' = -\frac{1}{z^2}, \quad (e^z)' = e^z,$$

$$(\operatorname{sen} z)' = \cos z, \quad (\cos z)' = -\operatorname{sen} z$$

$\log z$ e $\sqrt{z}$ sono derivabili in $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ con

$$(\log z)' = \frac{1}{z} \quad \text{e} \quad (\sqrt{z})' = \frac{1}{2\sqrt{z}}$$



La funzione coniugio non è invece derivabile in nessun punto $z_0 \in \mathbb{C}$. Ad esempio, per $z_0 = 0$

$$\lim_{z \to 0} \frac{\bar{z}}{z} = \lim_{z \to 0} \frac{\bar{z}^2}{|z|^2} = \lim_{(x,y)\to 0} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + i \lim_{(x,y)\to 0} \frac{-2xy}{x^2+y^2}$$

e tali limiti in due variabili non esistono.

Veniamo alla definizione "centrale" dell'analisi complessa.

Sia Ω aperto di $\mathbb{C}$ e $f: \Omega \to \mathbb{C}$. f si dice OLOMORFA in Ω se f è derivabile in ogni punto $z \in \Omega$.

Il seguente teorema permette di riconoscere una funzione olomorfa $f = u + iv$ attraverso la verifica di alcune condizioni per u e v.

TEOREMA 2.

Una funzione $f: \Omega \to \mathbb{C}$ con $f = u + iv$ è olomorfa in Ω se e solo se u e v sono differenziabili con le loro derivate parziali continue in Ω e si verificano le condizioni di CAUCHY-RIEMANN:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{in ogni punto di } \Omega.$$

Inoltre se f è olomorfa

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) - i \frac{\partial u}{\partial y}(x,y)$$

dove $z = x + iy \in \Omega$.

dim.

Dimostriamo solo che la derivabilità in un punto $z_0 \in \Omega$ implica la verifica delle condizioni di CAUCHY-RIEMANN.

Riscrivendo il rapporto incrementale $\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ quando l'incremento $z-z_0 = \Delta z = \Delta x + i\Delta y$ è solo reale (ossia se $\Delta y = 0$), abbiamo che

$$\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = \frac{u(x_0+\Delta x, y_0) - u(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

$$+ i\,\frac{v(x_0+\Delta x, y_0) - v(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

Quindi per $z \to z_0$ si ha che $\Delta x \to 0$ e otteniamo

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0). \qquad (1)$$

In modo simile, se l'incremento è solo immaginario (ossia $\Delta x = 0$), si ha che

$$\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = \frac{u(x_0, y_0+\Delta y) - u(x_0,y_0)}{i\Delta y}$$

$$+ i\,\frac{v(x_0, y_0+\Delta y) - v(x_0,y_0)}{i\Delta y}$$

e quindi per $z \to z_0$, $\Delta y \to 0$ e

$$f'(z_0) = -i\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) + \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0). \qquad (2)$$

Confrontando le parti reali e immaginarie della (1) e la (2), otteniamo la tesi. $\square$

ESEMPIO 1.

Verificare le condizioni di CAUCHY-RIEMANN per $f(z) = e^z = e^x \cos y + i e^x \operatorname{sen} y$. Quindi

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial (e^x \cos y)}{\partial x} = e^x \cos y, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial (e^x \cos y)}{\partial y} = -e^x \operatorname{sen} y$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial (e^x \operatorname{sen} y)}{\partial x} = e^x \operatorname{sen} y, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial (e^x \operatorname{sen} y)}{\partial y} = e^x \cos y$$

e $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$.

La funzione coniugio $f(z) = \bar{z} = x - iy$ (che non è derivabile e dunque non olomorfa) non soddisfa entrambe le condizioni in nessun punto di $\mathbb{C}$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1 \neq \frac{\partial v}{\partial y} = -1, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0 = -\frac{\partial v}{\partial x} = 0.$$

Analogamente, anche $f(z) = |z|^2 = x^2 + y^2$ non è olomorfa in nessun aperto di $\mathbb{C}$. Infatti

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x = \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2y = -\frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

implica che le condizioni sarebbero soddisfatte soltanto nel punto $z = 0$.

Osservazione. Se $f = u + iv$ è olomorfa e u e v hanno le derivate seconde continue allora

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{SCHWARZ}}}{=} \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) = -\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

ossia $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$. Una funzione che soddisfa tale condizione si dice FUNZIONE ARMONICA.

In modo simile si verifica che anche v è armonica.

2. Integrale curvilineo per funzioni di v.c.

Sia $f: \Omega \to \mathbb{C}$ una funzione di variabile complessa continua in Ω aperto di $\mathbb{C}$. Sia $\gamma = (x(t), y(t))$ con $t \in [a, b]$ una curva semplice e regolare allora

$$\int_\gamma f(z)\,dz \overset{\text{Def}}{=} \int_a^b f(\underbrace{x(t)+iy(t)}_{z(t)}) \cdot (\underbrace{x'(t)+iy'(t)}_{z'(t)})\,dt$$

$$= \int_\gamma (u\,dx - v\,dy) + i\int_\gamma (v\,dx + u\,dy)$$

dove $f = u + iv$.

TEOREMA 3.
Nelle ipotesi della definizione precedente valgono le seguenti proprietà:

1) LINEARITÀ: $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$

$$\int_\gamma (\alpha f(z) + \beta g(z))\,dz = \alpha \int_\gamma f(z)\,dz + \beta \int_\gamma g(z)\,dz$$

2) ADDITIVITÀ: se $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz$$

3) Se γ^- è la curva percorsa in direzione opposta rispetto a γ

$$\int_{\gamma^-} f(z)\,dz = -\int_\gamma f(z)\,dz$$

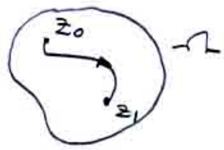
4) Se $M \geq 0$ e $|f(z)| \leq M$ per z appartenenti al sostegno di γ allora

$$\left| \int_\gamma f(z)\,dz \right| \leq M \cdot |\gamma|$$

dove $|\gamma|$ rappresenta la lunghezza di γ.

5) (TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE PER FUNZIONI DI V.C.) Sia Ω aperto e connesso.
Se $F: \Omega \to \mathbb{C}$ è olomorfa in Ω e $f(z) = F'(z)$ allora

$$\int_\gamma f(z)\,dz = F(z_1) - F(z_0)$$



dove γ è una qualunque curva semplice regolare in Ω con punto iniziale z_0 e punto finale z_1.

dim.

Diamo solo le dimostrazioni di 4) e 5).
Per quanto riguarda la 4)

$$\left| \int_\gamma f(z)\,dz \right| \leq \int_a^b |f(x(t)+iy(t))| \cdot |x'(t)+iy'(t)|\,dt$$

$$\leq M \int_a^b \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\,dt = M|\gamma|$$

Per la 5), posto $z(t) = x(t) + iy(t)$, si ha che

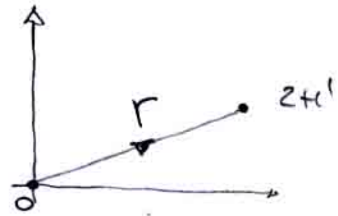
$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(z(t)) \cdot z'(t)\,dt = \int_a^b \frac{d}{dt}\left(F(z(t))\right)dt$$

$$= F(z(b)) - F(z(a)) = F(z_1) - F(z_0)$$

dove $z_0 = z(a)$ e $z_1 = z(b)$.

ESEMPIO 2.

Calcolare
$$\int_\gamma \bar{z}\,dz\ ,\quad \int_\gamma z^2\,dz\ ,\quad \int_\gamma e^{\pi z}\,dz$$
dove γ è il percorso rettilineo da 0 a $2+i$.



γ può essere parametrizzato come $z(t)=x(t)+iy(t)$
$=(2+i)\cdot t$ con $t\in[0,1]$. Così $z'(t)=x'(t)+iy'(t)=2+i$ e
$$\int_\gamma \bar{z}\,dz=\int_0^1 \overline{(2+i)t}\cdot(2+i)\,dt=|2+i|^2\int_0^1 t\,dt=5\cdot\left[t^2/2\right]_0^1=\frac{5}{2}.$$

In modo simile
$$\int_\gamma z^2\,dz=\int_0^1 (2+i)^2\cdot t^2\cdot(2+i)\,dt=(2+i)^3\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1=\frac{2+11i}{3}.$$

Allo stesso risultato si può arrivare osservando che $\left(z^3/3\right)'=z^2$ e quindi
$$\int_\gamma z^2\,dz=\left[\frac{z^3}{3}\right]_0^{2+i}=\frac{(2+i)^3}{3}=\frac{2+11i}{3}.$$

Inoltre l'esistenza della primitiva complessa implica che $\int_\gamma z^2\,dz=\frac{2+11i}{3}$ per qualunque percorso che unisce 0 a $2+i$. Allo stesso modo $\left(e^{\pi z}/\pi\right)'=e^{\pi z}$
$$\int_\gamma e^{\pi z}\,dz=\left[\frac{e^{\pi z}}{\pi}\right]_0^{2+i}=\frac{e^{2\pi+i\pi}}{\pi}-\frac{1}{\pi}=-\frac{e^{2\pi}+1}{\pi}.$$

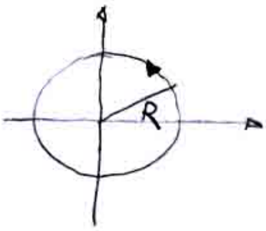
ESEMPIO 3.

Calcolare $\displaystyle\int_\gamma z^n \, dz$ per $n \in \mathbb{Z}$

dove γ è la circonferenza di raggio R centrata in O percorsa in senso anti-orario.

Per γ possiamo usare la parametrizzazione

$z(t) = Re^{it} = R\cos t + iR\sin t$ per $t \in [0, 2\pi]$



Allora $z'(t) = Rie^{it}$ e

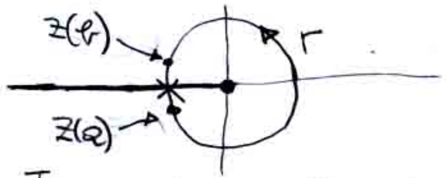
$$\int_\gamma z^n dz = \int_0^{2\pi} R^n e^{int} \cdot Rie^{it} dt$$

$$= iR^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t} dt =$$

$$= \begin{cases} iR^{n+1} \left[\dfrac{e^{i(n+1)t}}{i(n+1)} \right]_0^{2\pi} = 0 & \text{se } n \neq -1, \\ i \cdot R^0 \cdot 2\pi = 2\pi i & \text{se } n = -1. \end{cases}$$

Si può arrivare alla medesima conclusione osservando che per $n \neq -1$ $\left(\dfrac{z^{n+1}}{n+1}\right)' = z^n$ lungo tutto il percorso γ e dato che γ è una curva chiusa, la variazione della primitiva agli estremi vale 0.

Per $n=-1$ si ha che $(\log z)' = \frac{1}{z}$ in $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ e quindi tale relazione non vale sull'intero



percorso γ. Tenendo conto di questo fatto si può considerare il seguente integrale "improprio":

$$\int_\gamma \frac{1}{z}\,dz = \lim_{\substack{a\to-\pi \\ b\to\pi}} \int_a^b \frac{1}{z(t)} \cdot z'(t)\,dt =$$

$$= \lim_{\substack{a\to-\pi \\ b\to\pi}} \Big(\log(z(b)) - \log(z(a))\Big)$$

$$= (\cancel{\log} R + i\pi) - (\cancel{\log} R - i\pi) = 2\pi i.$$

Osservazione: se γ è una curva regolare, semplice e chiusa percorsa in senso antiorario allora

$$\int_\gamma \bar{z}\,dz = 2i|D|$$

Infatti

$$\int_\gamma \bar{z}\,dz = \int_\gamma (x-iy)(dx+i\,dy) = \int_\gamma (x\,dx + y\,dy) + i\int_\gamma (-y\,dx + x\,dy)$$

$$\overset{GG}{=} \iint_D \Big(\underbrace{\frac{\partial y}{\partial x}}_{=0} - \underbrace{\frac{\partial x}{\partial y}}_{=0}\Big)dx\,dy + i\iint_D \Big(\underbrace{\frac{\partial x}{\partial x}}_{=1} - \underbrace{\frac{\partial(-y)}{\partial y}}_{=-1}\Big)dx\,dy = 2i|D|.$$

Si noti che $\bar{z}$ non è olomorfa.

3. Il teorema di CAUCHY e sue applicazioni

TEOREMA 3. (teorema di CAUCHY)
Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ un insieme aperto e semplicemente connesso. Se $f: \Omega \to \mathbb{C}$ è una funzione olomorfa in Ω e γ è una curva semplice, regolare e chiusa contenuta in Ω allora

$$\int_\gamma f(z)\, dz = 0$$

dim.

Sia $f = u + iv$. Per il teorema 2, le funzioni u e v sono differenziabili e le loro derivate sono continue in Ω.
Dato che le ipotesi del teorema di GAUSS-GREEN sono soddisfatte possiamo concludere che

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_\gamma (u\,dx - v\,dy) + i\int_\gamma (v\,dx + u\,dy)$$

$$\overset{GG}{=} \iint_D \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) dx\,dy + i \iint_D \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) dx\,dy$$

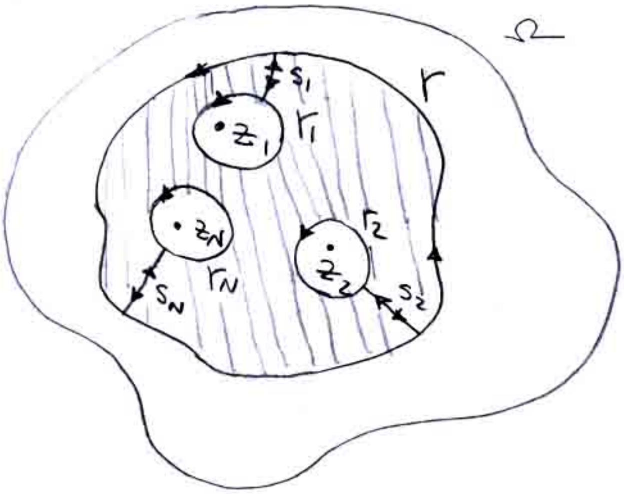
$$= 0$$

Se f è olomorfa in Ω allora valgono le condizioni di CAUCHY-RIEMANN:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad e \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \qquad in\ D \subset \Omega .$$

Osservazioni

1) Il teorema di CAUCHY può essere esteso a domini più generali e a curve chiuse non necessariamente semplici e regolari: In particolare se Ω è un aperto semplicemente connesso, f è olomorfa in $\Omega \setminus \{z_1, \dots, z_N\}$ dove $z_k \in \Omega$ per $k = 1, 2, \dots, N$ allora



$$\int_{\Gamma} f(z)\,dz = 0$$

con

$$\Gamma = \gamma \cup s_1 \cup \gamma_1^- \cup s_1^- \cup s_2 \cup \gamma_2^- \cup s_2^- \dots \cup s_N \cup \gamma_N^- \cup s_N^-$$

Quindi

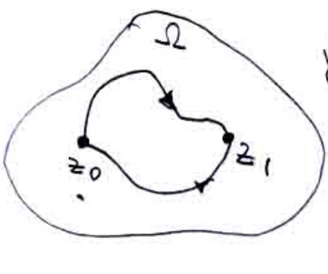
$$\int_{\gamma} f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{N} \int_{\gamma_k} f(z)\,dz$$

dove $\gamma, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N$ sono curve semplici, regolari chiuse percorse in senso antiorario tali che γ contiene tutti i punti $z_1, \dots, z_N$ mentre γ_k contiene solo z_k per $k = 1, 2, \dots, N$.

2) Nelle ipotesi del teorema di CAUCHY, se $z_1, z_0 \in \Omega$ allora

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_{\gamma_2} f(z)\,dz$$

$\forall \gamma_1, \gamma_2$ curve in Ω che partono da z_0 e arrivano in z_1



ESEMPIO 4.

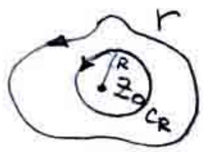
Verificare che per $z_0 \in \mathbb{C}$ e $n \in \mathbb{Z}$ si ha

$$\int_\gamma (z-z_0)^n \, dz = \begin{cases} 0 & \text{se } n \neq -1 \\ 2\pi i & \text{se } n = -1 \end{cases}$$

dove γ è una curva semplice, regolare chiusa che contiene al suo interno il punto z_0.

Per il punto 1) dell'osservazione precedente

$$\int_\gamma (z-z_0)^n \, dz = \int_{C_R} (z-z_0)^n \, dz$$



dove C_R è una circonferenza centrata in z_0 di raggio $R>0$ percorsa in senso antiorario.
La conclusione deriva dall'esempio 3 tenendo conto della traslazione da 0 in z_0.

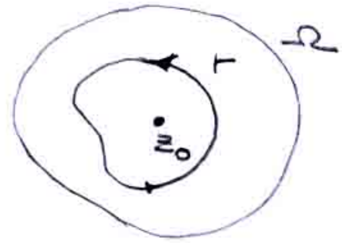
Si osservi che se la curva γ non "gira" intorno al punto z_0, allora, per il teorema di CAUCHY, dato che $(z-z_0)^n$ è olomorfa "dentro" γ,

$$\int_\gamma (z-z_0)^n \, dz = 0$$

Il prossimo teorema fornisce una formula integrale che generalizza la situazione descritta in questo esempio.

TEOREMA 4 (FORMULA INTEGRALE DI CAUCHY)

Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ un insieme aperto e semplicemente connesso. Se $f : \Omega \to \mathbb{C}$ è una funzione olomorfa in Ω e γ è una curva semplice, regolare e chiusa contenuta in Ω e orientata positivamente allora



$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz$$

per ogni punto z_0 all'interno di γ.

dim

Sia C_R una circonferenza orientata positivamente centrata in z_0 con $0 < R < R_0$ dove R_0 è tale che C_{R_0} sta "dentro" γ. Allora per il teorema di CAUCHY (vedi osservazione 1),

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz$$

Aggiungendo e togliendo $f(z_0)$ al numeratore otteniamo

$$= \frac{1}{2\pi i} f(z_0) \int_{C_R} \frac{1}{z - z_0}\, dz + \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\, dz. \quad (1)$$

Per l'esempio 4 il primo termine di (1) vale $f(z_0)$. Per quanto riguarda il secondo termine di (1), dato che f è olomorfa in Ω, f è derivabile in z_0

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0)$$

Questo implica che esiste M tale che

$$\left|\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\right| \leq M \quad \text{per } |z-z_0| \leq R_0$$

(una funzione che ammette un limite in un punto è limitata in un intorno di quel punto).

Dunque per $0<R<R_0$

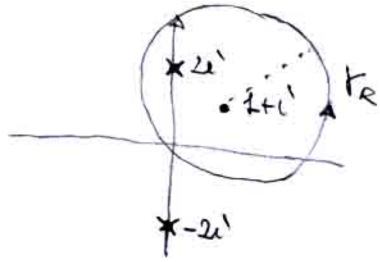
$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{C_R}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\,dz\right| \leq \frac{1}{2\pi}\cdot M\cdot|C_R| = M\cdot R \xrightarrow{\text{per } R\to 0} 0.$$

e il secondo termine di (1) vale 0. □

ESEMPIO 5.

Calcolare

$$\int_{\gamma_R}\frac{z^2}{z^2+4}\,dz$$



dove γ_R è la circonferenza centrata in $1+i$ di raggio R percorsa in senso antiorario.

La funzione

$$\frac{z^2}{z^2+4} = \frac{z^2}{(z+2i)(z-2i)} = \frac{\frac{1}{2}z}{z+2i} + \frac{\frac{1}{2}z}{z-2i}$$

è olomorfa in $\mathbb{C}\setminus\{2i,-2i\}$.

Dato che $|1+i-2i| = \sqrt{2}$ e $|1+i-(-2i)| = \sqrt{10}$, se $0<R<\sqrt{2}$ allora γ_R non contiene né $2i$ né $-2i$ e per il teorema di CAUCHY

$$\int_{\gamma_R}\frac{z^2}{z^2+4}\,dz = 0$$

Se $\sqrt{2} < R < \sqrt{10}$ allora γ_R contiene solo $2i$ e

$$\int_{\gamma_R} \frac{z^2}{z^2+4}\,dz = \int_{\gamma_R} \frac{\frac{z}{2}}{z+2i}\,dz + \int_{\gamma_R} \frac{\frac{z}{2}}{z-2i}\,dz$$

$$= 0 + \underbrace{2\pi i \cdot \left(\frac{2i}{2}\right)}_{\substack{\text{Per la formula} \\ \text{integrale}}} = -2\pi$$

In modo simile, se $\sqrt{10} < R$ allora γ_R contiene sia $2i$ che $-2i$ e quindi

$$\int_{\gamma_R} \frac{z^2}{z^2+4}\,dz = 2\pi i \cdot \left(\frac{-2i}{2}\right) + 2\pi i \left(\frac{2i}{2}\right) = 0$$

Per $R = \sqrt{2}$ o $R = \sqrt{10}$ il calcolo non può essere fatto perchè γ_R attraversa uno dei punti dove la funzione $z^2/(z^2+4)$ non è definita.

ESEMPIO 6.

Calcolare $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{\cos z}{z(z+\pi/2)}\,dz$ dove si intende che $|z|=1$ indica la circonferenza centrata in 0 di raggio 1 percorsa in senso positivo.

$|z|=1$ contiene 0 e $f(z) = \dfrac{\cos z}{z+\pi/2}$ è olomorfa in $|z|<1$ (perchè $|-\pi/2|>1$). Quindi per la formula integrale

$$\int_{|z|=1} \frac{f(z)}{z}\,dz = 2\pi i \cdot f(0) = 2\pi i \cdot \frac{2}{\pi} = 4i.$$

Osservazione. Nelle ipotesi del teorema 4 si può dimostrare che se $f : \Omega \to \mathbb{C}$ è olomorfa in Ω allora non solo esiste la derivata prima in senso complesso in ogni punto di Ω, ma pure tutte le derivate di ordine $n \geq 1$.
Inoltre vale la formula integrale per le derivate

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz$$

dove γ è una curva chiusa semplice che "gira" in senso positivo intorno a z_0.
La formula si può ottenere da quella del teorema "derivando sotto il segno di integrale" rispetto a z_0.

ESEMPIO 7.

Calcolare $\displaystyle\int_{|z-1|=2} \frac{e^{2z}}{z^4} dz$ e $\displaystyle\int_{|z-1|=\frac{1}{2}} \frac{e^{2z}}{z^4} dz$

Posto $f(z) = e^{2z}$ e $z_0 = 0$ abbiamo che

$$\int_{|z-1|=2} \frac{f(z)}{(z-z_0)^4} dz \underset{\substack{\uparrow \\ z_0 = 0 \\ \text{"dentro" } |z-1|=2}}{=} \frac{2\pi i}{3!} \cdot f^{(3)}(z_0) = \frac{2\pi i \cdot 8}{6} = \frac{8\pi i}{3}$$

mentre

$$\int_{|z-1|=1/2} \frac{e^{2z}}{z^4} dz \underset{\substack{\uparrow \\ z_0=0 \text{ è "fuori"} \\ \text{da } |z-1|=1/2}}{=} 0$$ (per il teorema di CAUCHY).

Osservazione. Nelle ipotesi del teorema 4 abbiamo che per le funzioni olomorfe vale la PROPRIETA' DELLA MEDIA: sia $z_0 \in \Omega$ e sia $\gamma: z(t) = z_0 + Re^{it}$ con $t \in [0, 2\pi]$ ossia la circonferenza $|z - z_0| = R$ con $R > 0$ sufficientemente piccolo in modo che sia contenuta in Ω allora

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{t=0}^{2\pi} \frac{f(z_0 + Re^{it})}{Re^{it}} \cdot \underbrace{(z_0 + Re^{it})'}_{iRe^{it}} dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + Re^{it})\, dt.$$

Tale uguaglianza può essere letta nel seguente modo: $f(z_0)$ è la media dei valori della f lungo ogni circonferenza di centro z_0, contenute in Ω.

ESEMPIO 8.
Verificare la proprietà della media per $f(z) = z^2$.
Se $z_0 \in \mathbb{C}$ e $R > 0$ allora

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (z_0 + Re^{it})^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (z_0^2 + 2Re^{it} + R^2 e^{2it}) dt$$

$$= z_0^2 + \frac{R}{\pi} \left[\frac{e^{it}}{i} \right]_0^{2\pi} + \frac{R^2}{2\pi} \left[\frac{e^{2it}}{2i} \right]_0^{2\pi} = z_0^2$$

Per $f(z) = |z|$ (che non è olomorfa) la proprietà della media non vale perché per $R > 0$ e $z_0 = 0$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |Re^{it}|\, dt = R \neq |z_0| = 0.$$

4 Serie numeriche e serie di potenze.

Data una successione di numeri complessi $\{z_n\}_{n\geq 0}$ consideriamo la somma finita

$$S_N = z_0 + z_1 + \dots + z_N = \sum_{n=0}^{N} z_n$$

detta SOMMA PARZIALE. Se esiste il $\lim_{N\to+\infty} S_N = \ell \in \mathbb{C}$ si dice che la SERIE NUMERICA

$$\sum_{n=0}^{\infty} z_n = \ell \quad \text{(converge a } \ell\text{)}.$$

Si osserva facilmente che se una serie converge allora il suo termine generico è infinitesimo

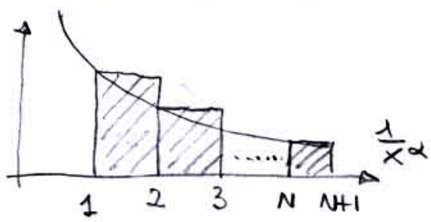
$$z_N = S_N - S_{N-1} \to \ell - \ell = 0.$$

In generale non vale il viceversa ossia se $z_n \to 0$ non è detto che la serie $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ sia convergente.

ESEMPIO 9.

Se $\alpha > 0$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ converge se e solo se $\alpha > 1$. (Si noti che $\frac{1}{n^\alpha} \to 0$ per $\alpha > 0$). ~~Inf~~

Infatti se $0 < \alpha \leq 1$ allora

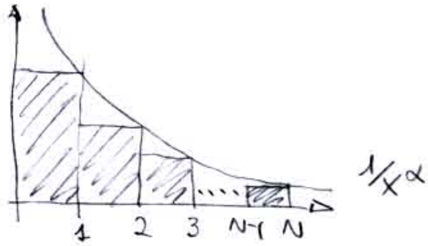


e quindi

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^\alpha} = \underset{\text{rettangoli}}{\text{somma aree}} \geq \int_1^{N+1} \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \begin{cases} \alpha=1: & [\ln x]_1^{N+1} \to +\infty \\ 0<\alpha<1: & \left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_1^{N+1} \to +\infty \end{cases}$$

e per confronto $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} = +\infty$.

Se invece $\alpha > 1$ allora



e quindi

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^\alpha} = \begin{matrix}\text{somma aree}\\ \text{rettangoli}\end{matrix} \leq 1 + \int_1^N \frac{1}{x^\alpha}\,dx = 1 + \left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_1^N \to 1 + \frac{1}{\alpha-1}$$

e per confronto la somma parziale $S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^\alpha}$ è crescente e limitata e dunque converge.

Uno strumento utile per verificare se una serie converge è il CRITERIO DEL CONFRONTO:
se $\exists n_0 \geq 0 : \ \forall n \geq n_0 \quad |z_n| \leq c_n$
e la serie reale a termini non negativi $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ converge allora anche la serie $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ converge.

Osservazione. Anche se la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ converge (si noti che $\left|\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right| = \frac{1}{n}$)
Infatti se $S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ allora

$$S_{2N} = \overbrace{\left(1 - \frac{1}{2}\right)}^{>0} + \overbrace{\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right)}^{>0} + \dots + \overbrace{\left(\frac{1}{2N-1} - \frac{1}{2N}\right)}^{>0} = \sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}\right) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2n(2n-1)}$$

$$\leq \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(2n-1)^2} \leq \sum_{n=1}^{2N-1} \frac{1}{n^2} < +\infty \ (\text{perché } \alpha = 2 > 1)$$

Quindi $S_{2N} \to \ell$ e $S_{2N+1} = S_{2N} + \frac{1}{2N+1} \to \ell + 0 = \ell$
Così $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ell$. Si può dimostrare che $\ell = \log 2$.

Una SERIE DI POTENZE è una funzione $f(z)$ di variabile complessa che a $z \in D \subset \mathbb{C}$ associa la somma della serie

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n \overset{\text{DEF}}{=} \lim_{N \to +\infty} \sum_{n=0}^{N} a_n (z-z_0)^n$$

con $\{a_n\}$ successione di numeri complessi detti COEFFICIENTI DELLA SERIE mentre $z_0 \in \mathbb{C}$ è detto CENTRO DELLA SERIE.

L'insieme D si dice DOMINIO DI CONVERGENZA DELLA SERIE e contiene i numeri complessi z per cui la serie numerica converge.

La SERIE GEOMETRICA $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ è una particolare serie di potenze di centro $z_0 = 0$ e con tutti i coefficienti $a_n = 1$. Dato che

$$(1-z)(z^N + z^{N-1} + \dots + z + 1) = 1 - z^{N+1}$$

si ottiene facilmente una formula esplicita per la somma parziale

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} z^n = \begin{cases} \dfrac{1-z^{N+1}}{1-z} & \text{se } z \neq 1, \\ N+1 & \text{se } z = 1. \end{cases}$$

Quindi, siccome la successione z^{N+1} converge se e solo se $|z|<1$, abbiamo che il dominio di convergenza di $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$ è $D = \{ z : |z| < 1 \}$ e

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z} \quad \text{per } |z|<1$$

TEOREMA 5.

Sia $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ una serie di potenze di dominio $D\subset\mathbb{C}$.

Sia
$$\frac{1}{R}\overset{\text{Def}}{=}\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|}\quad(\text{se il limite esiste})$$

con la convenzione che se il limite vale $+\infty$ allora $R=0$ e se il limite vale 0 allora $R=+\infty$.

R si dice RAGGIO DI CONVERGENZA. Inoltre

1) $\frac{1}{R}=\lim_{n\to+\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ (se il limite esiste)

2) La serie converge per $|z-z_0|<R$ ossia
$$\{z : |z-z_0|<R\}\subset D$$

3) La serie non converge per $|z-z_0|>R$ ossia
$$D\subset\{z : |z-z_0|\leq R\}$$

dim.

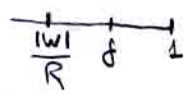
Dimostriamo solo la 2).

La dimostrazione di 3) è simile.

Per definizione di limite

$\forall\varepsilon>0\ \exists n_\varepsilon\geq 0 :\ \frac{1}{R}-\varepsilon<\sqrt[n]{|a_n|}\overset{(*)}{<}\frac{1}{R}+\varepsilon$ per $n\geq n_\varepsilon$

Sia $|W|<R$ allora $\exists\varepsilon>0 :\ \delta\overset{\text{def}}{=}\frac{|W|}{R}+\varepsilon|W|<1$



e quindi, per $(*)$, abbiamo che se $W=z-z_0$ allora

$$|a_n(z-z_0)^n|=|a_nW^n|<\left(\frac{|W|}{R}+\varepsilon|W|\right)^n=\delta^n\quad\text{per } n\geq n_\varepsilon.$$

Per confronto con la serie geometrica convergente $\sum_{n=n_\varepsilon}^{\infty} \delta^n$ anche la serie $\sum_{n=n_\varepsilon}^{\infty} |a_n(z-z_0)|^n$ è convergente ossia la serie $\sum_{n=n_\varepsilon}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ converge assolutamente.

Dato che la convergenza assoluta implica la convergenza semplice, abbiamo la tesi. □

Prima di vedere degli esempi completiamo il quadro teorico con due altri teoremi.

TEOREMA 6.

Sia $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ una serie di potenze con raggio di convergenza $R>0$ allora

1) f è olomorfa in $\{z : |z-z_0|<R\}$ e la derivata (complessa) di ordine k è ancora una serie di potenze con lo stesso raggio di convergenza

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)\, a_n (z-z_0)^{n-k}$$

(FORMULA DI DERIVAZIONE TERMINE A TERMINE)

2) Se γ è una curva semplice, contenuta in $\{z : |z-z_0|<R\}$ allora

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_\gamma (z-z_0)^n dz = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left[\frac{(z-z_0)^{n+1}}{n+1}\right]_{z_1}^{z_2}$$

dove z_1 e z_2 sono rispettivamente il punto iniziale e finale della curva.

(FORMULA DI INTEGRAZIONE TERMINE A TERMINE)

TEOREMA 7.

Sia Ω un aperto connesso e sia $f: \Omega \to \mathbb{C}$ una funzione olomorfa in Ω. Allora $\forall z_0 \in \mathbb{C}$, $f(z)$ è esprimibile come una serie di potenze centrata in z_0:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z-z_0)^n$$

Tale serie è detta SERIE DI TAYLOR di f in z_0 e ha come raggio di convergenza il raggio del più grande cerchio centrato in z_0 e contenuto in Ω. Inoltre lo sviluppo in z_0 è unico ovvero se $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ in $\{z : |z-z_0| < r\}$ allora necessariamente $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$.

Osservazione.

Alcune delle serie di Taylor valide nel campo reale si estendono nel piano complesso:

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n \quad , \quad z_0 = 0, R = \infty ;$$

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}, \quad z_0 = 0, R = \infty ;$$

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} \quad , \quad z_0 = 0, R = \infty ;$$

$$\log(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cdot z^n \quad , \quad z_0 = 0, R = 1.$$

5. Serie di LAURENT

Se una funzione f è olomorfa in un insieme aperto Ω meno un suo punto z_0 allora, per quanto visto nel teorema 7, f è sviluppabile in ogni punto di $\Omega \setminus \{z_0\}$, ma non in z_0. Nel teorema seguente si descrive un modo di rappresentare la funzione f in un intorno di z_0, che estende la nozione di serie di TAYLOR.

TEOREMA 8. (SVILUPPO DI LAURENT)

Sia f olomorfa nell'ANELLO $\Omega = \{ z : R_1 < |z - z_0| < R_2 \}$ con $0 < R_1 < R_2$. Allora per ogni $z \in \Omega$ si ha che

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$$

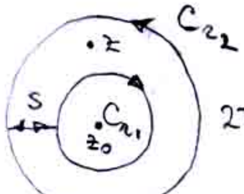
dove

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} \, dz \quad \text{per } n \in \mathbb{Z}.$$

e γ è una qualunque curva chiusa semplice e regolare contenuta in Ω e percorsa in senso antiorario.

dim.

Sia $z \in \Omega$ con $r = |z - z_0|$ e siano r_1, r_2 tali che $R_1 < r_1 < r < r_2 < R_2$. Per la formula integrale di CAUCHY applicata al percorso $C_{r_2} \cup S \cup C^-_{r_1} \cup S^-$ abbiamo che



$$2\pi i f(z) = \int_{C_{r_2} \cup S \cup C^-_{r_1} \cup S^-} \frac{f(w)}{w - z} \, dw = \int_{C_{r_2}} \frac{f(w)}{w - z} \, dw - \int_{C_{r_1}} \frac{f(w)}{w - z} \, dw \quad (*)$$

Per $w \in C_{r_2}$ si ha che $r_2 = |w-z_0| > |z-z_0| = r$ onde $\left|\frac{z-z_0}{w-z_0}\right| < 1$. Quindi il primo integrale di (*) diventa

$$\int_{C_{r_2}} \frac{f(w)}{w-z}\,dw = \int_{C_{r_2}} \frac{f(w)}{w-z_0} \cdot \frac{1}{1-\frac{z-z_0}{w-z_0}}\,dw$$

$$\overset{\substack{\text{serie} \\ \text{geom}}}{=} \int_{C_{r_2}} \frac{f(w)}{w-z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^n dw$$

e integrando termine a termine (vedi teorema 6) otteniamo

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (z-z_0)^n \cdot \overbrace{\int_{C_{r_2}} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}\,dw}^{2\pi i \cdot a_n}$$

Analogamente, se $w \in C_{r_1}$ si ha che $r_1 = |w-z_0| < |z-z_0| = r$ ossia $\left|\frac{w-z_0}{z-z_0}\right| < 1$. Quindi il secondo integrale di (*) diventa

$$-\int_{C_{r_1}} \frac{f(w)}{w-z}\,dw = \int_{C_{r_1}} \frac{f(w)}{z-z_0} \cdot \frac{1}{1-\frac{w-z_0}{z-z_0}}\,dw$$

$$= \int_{C_{r_1}} \frac{f(w)}{z-z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{w-z_0}{z-z_0}\right)^n dw = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z-z_0)^{n+1}} \overbrace{\int_{C_{r_1}} f(w)(w-z_0)^n\,dw}^{2\pi i\, a_{-(n+1)}}$$

Infine riunendo i risultati abbiamo la tesi

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n + \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n}$$

□

Osservazione. Sia Ω un insieme aperto.
Lo sviluppo di LAURENT in un punto z_0 di una funzione $f(z)$ olomorfa in $\Omega \setminus \{z_0\}$ è la somma di due serie univocamente determinate:

$$f(z) = \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n}_{\text{PARTE OLOMORFA}} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n}}_{\text{PARTE PRINCIPALE}}$$

Se $f(z)$ è olomorfa in Ω allora la parte principale vale 0 e la parte olomorfa coincide con la serie di TAYLOR in z_0.
Se almeno uno dei coefficienti a_{-n} della parte principale è diverso da 0 allora si dice che f ha una SINGOLARITÀ (isolata) in z_0.
Se solo un numero finito dei coefficienti a_{-n} è diverso da 0 allora si dice che f ha una singolarità di ORDINE d dove $d \geq 1$ è l'indice più grande tale che $a_{-d} \neq 0$
Se ci sono infiniti coefficienti a_{-n} diversi da 0 allora la singolarità si dice ESSENZIALE.

Vediamo qualche esempio esplicito di serie di LAURENT.

ESEMPIO 10.

Ecco un elenco di funzioni e il loro sviluppo di LAURENT in certi punti

1) $\frac{(z+1)^2}{z} = \frac{1}{z} + 2 + z$ per $|z|>0$

quindi $z_0=0$ è una singolarità di ordine 1.

2) $\frac{1}{z^2(1-z)} = \frac{1}{z^2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} z^n$ per $0<|z|<1$.

quindi $z_0=0$ è una singolarità di ordine 2.

$$\frac{1}{z^2(1-z)} = \frac{-1}{(1+(z-1))^2(z-1)} = \frac{1}{z-1}\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{1+(z-1)}\right)$$

$$= \frac{1}{z-1}\frac{d}{dz}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^n\right)$$

$$= \frac{1}{z-1}\sum_{n=0}^{\infty} n(-1)^n(z-1)^{n-1}$$

$$= \frac{-1}{z-1} + \sum_{n=2}^{\infty} n(-1)^n(z-1)^{n-2}$$

$$= \frac{-1}{z-1} + \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(-1)^n(z-1)^n \quad \text{per } 0<|z-1|<1$$

quindi $z_0=1$ è una singolarità di ordine 1.

3) $\frac{\operatorname{sen} z}{z} = \frac{1}{z}\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots\right) = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} + \dots$ per $|z|>0$.

quindi $z_0=0$ non è una singolarità. Formalmente la funzione $\operatorname{sen} z/z$ non è definita per $z_0=0$ e allora si può anche dire che z_0 è una SINGOLARITÀ ELIMINABILE.

4) $e^{2/z} = 1 + \frac{2}{z} + \frac{4}{2z^2} + \frac{8}{3!\,z^3} + \dots$

quindi $z_0=0$ è una singolarità essenziale.

Osservazione.

Ogni funzione razionale $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ con P e Q polinomi è olomorfa in $\mathbb{C}$ meno i punti che annullano $Q(z)$.

Se $Q(z) = a \cdot (z-z_1)^{\alpha_1} (z-z_2)^{\alpha_2} \cdots (z-z_r)^{\alpha_r}$ con $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ interi positivi, allora possiamo dire z_k è una singolarità per f di ordine α_k per $k=1,\dots r$.

(stiamo supponendo che P non abbia fattori in comune con Q ossia che $P(z_k) \neq 0$ per $k=1,\dots,r$).

6. Residui e il loro calcolo

Sia f olomorfa in $\{z : 0 < |z-z_0| < R\}$ per un certo $R > 0$ si consideri lo sviluppo di LAURENT di f in z_0

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \quad \text{per } 0 < |z-z_0| < R.$$

Allora il coefficiente a_{-1} si dice RESIDUO di f in z_0 e si indica con $\mathrm{Res}(f, z_0)$.

Dal teorema 8 sappiamo che

$$\mathrm{Res}(f, z_0) = a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} f(z)\, dz.$$

dove C_r è la circonferenza centrata in z_0 di raggio $0 < r < R$ percorsa in senso antiorario.

ESEMPIO 11.

Dall'esempio 10 si deduce che

1) $\mathrm{Res}\left(\frac{(z+1)^2}{z}, 0\right) = 1$

2) $\mathrm{Res}\left(\frac{1}{z^2(1-z)}, 0\right) = 1$, $\mathrm{Res}\left(\frac{1}{z^2(1-z)}, 1\right) = -1$.

3) $\mathrm{Res}\left(\frac{\sin z}{z}, 0\right) = 0$

4) $\mathrm{Res}\left(e^{2/z}, 0\right) = 2$

Si noti che se z_0 non è una singolarità ossia se f è olomorfa in $\{z: |z-z_0|<R\}$ allora $\mathrm{Res}(f, z_0) = 0$.

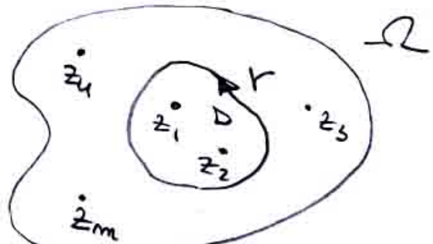
Il seguente risultato illustra come un integrale curvilineo di una funzione olomorfa a meno di un certo numero di singolarità possa essere scritto in termini di residui.

TEOREMA 9. (DEI RESIDUI)

Sia Ω un aperto semplicemente connesso e siano $z_1, z_2, \dots, z_m \in \Omega$. Se f è una funzione olomorfa in $\Omega \setminus \{z_1, z_2, \dots, z_m\}$ e γ è una curva chiusa semplice percorsa in senso antiorario che non attraversa nessuno dei punti z_k con $k=1,\dots,m$ allora

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{z_k \in D} \mathrm{Res}(f, z_k)$$

dove la somma è fatta su tutti i punti z_k con $k=1,\dots m$ che sono contenuti nell'insieme D delimitato da γ.



dim.

Per l'osservazione fatta dopo il teorema 3 (CAUCHY) abbiamo che

$$\int_\gamma f(z)dz = \sum_{z_k\in D} \int_{C_{r_k}(z_k)} f(z)dz = 2\pi i \sum_{z_k\in D} Res(f, z_k)$$

dove $C_{r_k}(z_k)$ è una circonferenza di centro z_k e raggio $r_k>0$ sufficientemente piccolo in modo che $C_{r_k}(z_k)$ sia dentro D e non abbia al suo interno altre singolarità oltre a z_k. □

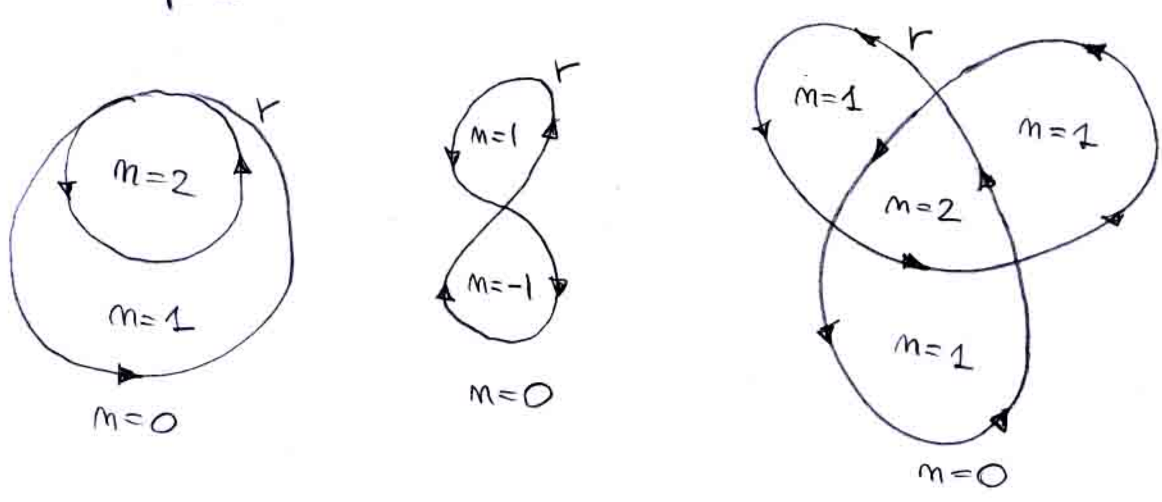
Osservazione.

Nelle ipotesi del teorema precedente vale una formula più generale nel caso la curva non sia semplice:

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{m} n(\gamma, z_k) Res(f, z_k)$$

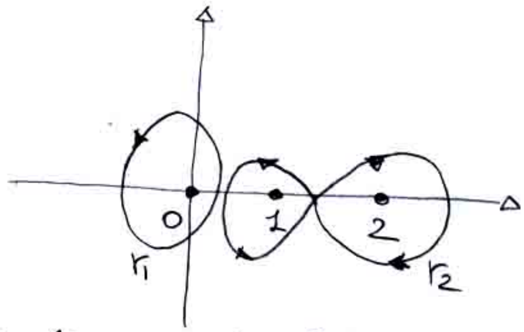
dove $n(\gamma, z_k) \in \mathbb{Z}$ indica il numero di volte che γ si "avvolge" intorno a z_k contando positivamente i "giri" in senso antiorario e negativamente i "giri" in senso orario.

Ad esempio



ESEMPIO 12.

Sia $f(z) = \dfrac{1}{z(z-1)(z-2)}$. Calcolare $\int_{\gamma_1} f(z)\,dz$ e $\int_{\gamma_2} f(z)\,dz$ dove



0, 1, 2 sono le singolarità di f (ordine 1)

La funzione razionale $f(z)$ si può decomporre come

$$f(z) = \frac{A}{z} + \frac{B}{z-1} + \frac{C}{z-2} = \frac{1/2}{z} + \frac{-1}{z-1} + \frac{1/2}{z-2}$$

e quindi

$$\mathrm{Res}(f,0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_r(0)} f(z)\,dz \overset{\text{Parte principale in 0}}{=} \frac{1}{2\pi i}\int_{C_r(0)} \frac{1/2}{z}\,dz \overset{\text{Esempio 4}}{=} \frac{1}{2}$$

dove r è sufficientemente piccolo.

Analogamente si trova che

$$\mathrm{Res}(f,1) = -1 \quad e \quad \mathrm{Res}(f,2) = 1/2$$

Dunque, dato che la curva γ_1 si avvolge 1 volta in senso positivo attorno a 0 e 0 volte attorno a 1 e a 2:

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = 2\pi i \cdot \mathrm{Res}(f,0) = \frac{2\pi i}{2} = \pi i$$

Infine, dato che la curva γ_2 si avvolge 1 volta in senso positivo attorno a 1, 1 volta in senso negativo attorno a 2 e 0 volte attorno a 0:

$$\int_{\gamma_2} f(z)\,dz = 2\pi i\left(\mathrm{Res}(f,1) - \mathrm{Re}(f,2)\right)$$
$$= 2\pi i\left(-1 - \frac{1}{2}\right) = -3\pi i.$$

Il seguente teorema fornisce un metodo di calcolo alternativo alla definizione per il residuo di singolarità di ordine finito.

TEOREMA 10.

Sia z_0 una singolarità isolata di ordine m per $f(z)$ olomorfa in $\{z : 0<|z-z_0|<R\}$ per un certo $R>0$. Allora

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(m-1)!}\left(\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[(z-z_0)^m f(z)\right]\right)_{z=z_0}$$

dim

Sia $f(z) = \dfrac{a_{-m}}{(z-z_0)^m} + \dfrac{a_{-(m-1)}}{(z-z_0)^{m-1}} + \dots + \dfrac{a_{-1}}{(z-z_0)} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$

lo sviluppo di LAURENT in z_0.

Se si moltiplica $f(z)$ per $(z-z_0)^m$ si ottiene una funzione olomorfa in $\{z : |z-z_0|<R\}$ (è stata "eliminata" la singolarità):

$$(z-z_0)^m f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{-m+n} (z-z_0)^n$$

e per il teorema 7 per $n \geq 0$

$$a_{-m+n} = \frac{1}{n!}\left(\frac{d^n}{dz^n}\left[(z-z_0)^m f(z)\right]\right)_{z=z_0}.$$

Per ottenere il residuo a_{-1} basta scegliere $n = m-1$ da cui la tesi. □

Osservazione. Se $f(z) = g(z)/h(z)$ con g e h olomorfe e z_0 una singolarità di ordine 1 per f, allora

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \left[(z-z_0)\frac{g(z)}{h(z)}\right]_{z=z_0} \overset{h(z_0)=0}{=} \lim_{z\to z_0} \frac{g(z)}{\frac{h(z)-h(z_0)}{z-z_0}} = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}.$$

ESEMPIO 13.

Sia $f(z) = \dfrac{1}{z^2(1-z)}$. Calcolare i residui di f nelle singolarità 0 e 1.

$$\text{Res}(f,0) = \frac{1}{1!}\left(\frac{d}{dz}\left(\frac{z^2}{z^2(1-z)}\right)\right)\Bigg|_{z=0} \qquad (0 \text{ è di ordine } 2)$$

$$= \left(-\frac{1}{(1-z)^2}\cdot(-1)\right)\Bigg|_{z=0} = 1$$

$$\text{Res}(f,1) = \frac{1}{0!}\left(\frac{z-1}{z^2(1-z)}\right)\Bigg|_{z=1} = \left(\frac{-1}{z^2}\right)\Bigg|_{z=1} = -1$$

I risultati ottenuti confermano quanto già visto nell'esempio 10.

ESEMPIO 14.

La funzione $f(z) = \dfrac{1}{\operatorname{sen} z}$ ha singolarità nei punti $z = k\pi$ per $k \in \mathbb{Z}$ tutte di ordine 1.

Calcolare i residui in tali punti

$$\text{Res}(f,k\pi) = \left(\frac{z-k\pi}{\operatorname{sen} z}\right)\Bigg|_{z=k\pi} = \lim_{z\to k\pi} \frac{z-k\pi}{\sin z}.$$

$$\overset{H}{=} \left(\frac{(z-k\pi)'}{(\operatorname{sen} z)'}\right)\Bigg|_{z=k\pi} = \frac{1}{\cos(k\pi)} = (-1)^k.$$

Osservazione. Se f e g sono due funzioni olomorfe in un aperto contenente z_0 e $f(z_0) = g(z_0) = 0$, $g \not\equiv 0$, allora vale una versione "complessa" del teorema dell'HÔPITAL. Se ad esempio $g'(z_0) \neq 0$ allora

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z\to z_0} \frac{\cancel{f(z_0)} + f'(z_0)(z-z_0) + o(z-z_0)}{\cancel{g(z_0)} + g'(z_0)(z-z_0) + o(z-z_0)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}.$$

ESEMPIO 15.

La funzione $f(z)=\dfrac{e^{\pi z}}{z^4+z^2}$ ha singolarità nei punti in cui si annulla $z^4+z^2=z^2(z+i)(z-i)$ ossia in 0 di ordine 2 e in $\pm i$ di ordine 1.

I residui in tali punti sono:

$$\mathrm{Res}(f,0)=\left(\frac{d}{dz}\left(\frac{e^{\pi z}}{z^2+1}\right)\right)_{z=0}=\left(\frac{\pi e^{\pi z}(z^2+1)-2ze^{\pi z}}{(z^2+1)^2}\right)_{z=0}=\pi,$$

$$\mathrm{Res}(f,i)=\left(\frac{e^{\pi z}}{z^2(z+i)}\right)_{z=+i}=\frac{e^{i\pi}}{(i^2)(2i)}=-\frac{i}{2},$$

$$\mathrm{Res}(f,-i)=\left(\frac{e^{\pi z}}{z^2(z-i)}\right)_{z=-i}=\frac{e^{-i\pi}}{(-i)^2(-2i)}=\frac{i}{2}.$$

Osservazione.

La nozione di residuo si può estendere anche per il PUNTO ALL'INFINITO ∞ (nel piano complesso non si fa distinzione tra $\pm\infty$).

$$\mathrm{Res}(f(z),\infty)\overset{\mathrm{Def}}{=}\mathrm{Res}\left(-\frac{1}{z^2}f\left(\frac{1}{z}\right),0\right)$$

dove f è una funzione olomorfa in $\{z:|z|>R\}$ per un certo $R>0$. Vale il seguente risultato.

TEOREMA 11.

Se $f=P/Q$ è una funzione razionale allora

$$\sum_{k=1}^{m}\mathrm{Res}(f,z_k)+\mathrm{Res}(f,\infty)=0.$$

dove $z_1,z_2,\dots,z_m$ sono i POLI di f ossia gli zeri del polinomio Q.

ESEMPIO 16.

Sia $f(z) = \dfrac{1}{z^2(1-z)}$ allora

$$\mathrm{Res}(f,\infty) = \mathrm{Res}\left(-\frac{1}{z^2}\cdot f\left(\frac{1}{z}\right), 0\right)$$

$$= \mathrm{Res}\left(-\frac{1}{\cancel{z^2}}\,\frac{\cancel{z^2}}{\left(1-\frac{1}{z}\right)}, 0\right)$$

$$= \mathrm{Res}\left(\frac{-z}{z-1}, 0\right) = 0$$

Inoltre per l'esempio 13 possiamo verificare che la somma di "tutti" i residui (anche ∞) è nulla

$$\mathrm{Res}(f,0) + \mathrm{Res}(f,1) + \mathrm{Res}(f,\infty) = 1-1+0=0$$

ESEMPIO 17.

Sia $f(z) = \dfrac{2z+1}{z^2-z-2}$ allora $z^2-z-2 = (z+1)(z-2)$ e

$$\mathrm{Res}(f,-1) = \left(\frac{2z+1}{z-2}\right)_{z=-1} = \frac{1}{3},$$

$$\mathrm{Res}(f,2) = \left(\frac{2z+1}{z+1}\right)_{z=2} = \frac{5}{3},$$

$$\mathrm{Res}(f,\infty) = \mathrm{Res}\left(-\frac{1}{z^2}f\left(\frac{1}{z}\right), 0\right) = \mathrm{Res}\left(\frac{-(2+z)}{z(1-z-2z^2)}, 0\right)$$

$$= \left(\frac{-(2+z)}{1-z-2z^2}\right)_{z=0} = -2.$$

Così possiamo verificare che

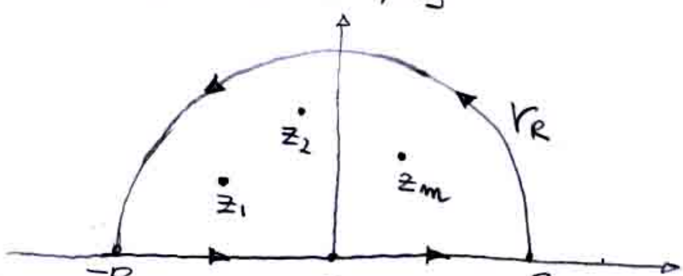
$$\mathrm{Res}(f,-1) + \mathrm{Res}(f,2) + \mathrm{Res}(f,\infty) = \frac{1}{3}+\frac{5}{3}-2=0.$$

7. Calcolo di integrali reali con i residui

Alcuni integrali definiti reali possono essere calcolati senza la determinazione di una primitiva, riconducendoli a integrali curvilinei di funzioni di variabile complessa lungo curve chiuse particolari.
In questa sezione verranno descritti tre esempi tipici di questo tipo di calcolo.

1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$ con P, Q polinomi tali che grado$(Q)-$grado$(P) > 1$ e $Q(x) \neq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Si pone $f(z) = P(z)/Q(z)$ e si considera il percorso chiuso $\gamma_R \cup [-R, R]$



dove γ_R è la semicirconferenza di centro 0 e raggio $R>0$ tale che $|z_k| < R$ per ogni zero di Q z_k con $k=1,..,m$, nel semipiano $\mathrm{Im}(z) > 0$.
Allora per il teorema 9

$$\int_{\gamma_R \cup [-R,R]} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{m} \mathrm{Res}(f, z_k).$$

Per $1 < \alpha <$ grado(Q) − grado(P) si ha che

$$\lim_{|z| \to +\infty} |z^\alpha f(z)| = 0$$

e dunque $\exists R_0 > 0$ e $\exists M > 0$ tale che

$$|f(z)| \le \frac{M}{|z|^\alpha} \quad \text{per } |z| > R_0 .$$

Quindi per $R > R_0$

$$\left| \int_{\gamma_R} f(z)\,dz \right| \le \frac{M}{R^\alpha} \cdot |\gamma_R| = \frac{M \cdot \pi}{R^{\alpha-1}} \underset{\text{per } R \to +\infty}{\longrightarrow} 0 .$$

Inoltre

$$\int_{[-R,R]} f(z)\,dz = \int_{-R}^{R} f(x)\,dx \underset{\text{per } R \to +\infty}{\longrightarrow} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx .$$

Possiamo così concludere che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{m} \operatorname{Res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)}, z_k\right) .$$

2) $\int_0^{2\pi} g(\operatorname{sen}\theta, \cos\theta)\,d\theta$ dove $g(x,y)$ è una funzione razionale nelle variabili x e y.

Sia $z = e^{i\theta}$ allora $\operatorname{sen}\theta = \frac{z - 1/z}{2i}$ e $\cos\theta = \frac{z + 1/z}{2}$.

Allora $f(z) \overset{\text{Def}}{=} g\left(\frac{z - 1/z}{2i}, \frac{z + 1/z}{2}\right)$ è una funzione razionale in z. Dato che $dz = e^{i\theta} \cdot i \cdot d\theta = iz\,d\theta$

$$\int_0^{2\pi} g(\operatorname{sen}\theta, \cos\theta)\,d\theta = \int_{|z|=1} f(z)\,\frac{dz}{iz} = 2\pi i \sum_{k=1}^{m} \operatorname{Res}\left(\frac{f(z)}{iz}, z_k\right)$$

dove $z_1, \dots, z_m$ sono le singolarità (poli) di $\frac{f(z)}{iz}$ contenute in $\{z : |z| < 1\}$.

3) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \cdot \cos(ax)\,dx$ e $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \operatorname{sen}(ax)\,dx$

dove $a>0$, P e Q sono polinomi tali che grado(Q) - grado$(P) > 0$ e $Q(x) \neq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Con considerazioni simili a quelle fatte per il punto 1), e osservando che

$$e^{aix} = \cos(ax) + i \operatorname{sen}(ax)$$

si dimostra che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \cos(ax)\,dx = \operatorname{Re}\left(2\pi i \sum_{k=1}^{m} \operatorname{Res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)} e^{aiz}, z_k \right) \right)$$

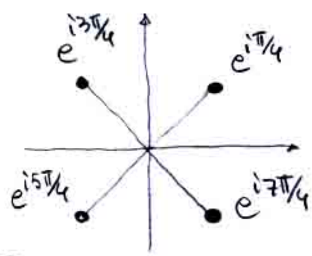
e

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \sin(ax)\,dx = \operatorname{Im}\left(2\pi i \sum_{k=1}^{m} \operatorname{Res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)} e^{aiz}, z_k \right) \right)$$

dove $z_1, \dots, z_m$ sono gli zeri di $Q(z)$ contenuti nel semipiano $\operatorname{Im}(z) > 0$.

ESEMPIO 18.
Calcolare $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4+1}$. Le singolarità di $f(z) = \dfrac{1}{z^4+1}$ sono date dalle soluzioni di $z^4+1=0$ ossia le 4 radici quarte di -1:

$$e^{i\frac{\pi}{4}},\ e^{i\frac{3\pi}{4}},\ e^{i\frac{5\pi}{4}},\ e^{i\frac{7\pi}{4}}$$



Le singolarità contenute in $\operatorname{Im}(z) > 0$ sono $e^{i\pi/4}$ e $e^{i3\pi/4}$ e sono tutte di ordine 1.

Quindi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4+1} = 2\pi i\left(\mathrm{Res}\left(\frac{1}{z^4+1}, e^{i\pi/4}\right) + \mathrm{Res}\left(\frac{1}{z^4+1}, e^{-i3\pi/4}\right)\right)$$

Dato che

$$\mathrm{Res}\left(\frac{1}{z^4+1}, e^{i\pi/4}\right) = \left(\frac{1}{(z^4+1)'}\right)_{z=e^{i\pi/4}} = \frac{1}{(4z^3)}_{z=e^{i\pi/4}} = \frac{1}{4} e^{-i3\pi/4} = \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\mathrm{Res}\left(\frac{1}{z^4+1}, e^{i3\pi/4}\right) = \frac{1}{(4z^3)}_{z=e^{i3\pi/4}} = \frac{1}{4} e^{-i\frac{9\pi}{4}} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}\right)$$

si ottiene

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4+1} = \frac{2\pi i}{4}\left(\left(-\cancel{\frac{1}{\sqrt{2}}} - \frac{i}{\sqrt{2}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{\sqrt{2}}} - \frac{i}{\sqrt{2}}\right)\right) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

ESEMPIO 19.

Calcolare $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2+\cos\theta}$.

Posto $\cos x = (z+1/z)/2$ per $z = e^{i\theta}$ otteniamo che

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2+\cos\theta} = \int_{|z|=1} \frac{1}{2+\frac{z+1/z}{2}} \frac{dz}{iz} = \frac{2}{i}\int_{|z|=1} \frac{1}{z^2+4z+1}\, dz$$

Dato che $z^2+4z+1=0$ per $z=-2+\sqrt{3}$ e $z=-2-\sqrt{3}$ e solo $|-2+\sqrt{3}|<1$ possiamo concludere che

$$= \frac{2}{\cancel{i}} \cdot 2\pi \cancel{i}\, \mathrm{Res}\left(\frac{1}{z^2+4z+1}, \sqrt{3}-2\right)$$

$$= 4\pi\left(\frac{1}{2z+4}\right)_{z=\sqrt{3}-2} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$

ESEMPIO 20.

Calcolare $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \operatorname{sen} 2x}{x^2+3} dx$ e $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \cos 2x}{x^2+3} dx$.

Gli zeri di z^2+3 sono $z=+i\sqrt{3}$ e $z=-i\sqrt{3}$ e solo $i\sqrt{3}$ è contenuto in $\operatorname{Im}(z)>0$.

Quindi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x e^{2ix}}{x^2+3} dx = 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{z e^{2iz}}{z^2+3}, i\sqrt{3}\right)$$

$$= 2\pi i \left(\frac{z e^{2iz}}{z+i\sqrt{3}}\right)_{z=i\sqrt{3}} = \frac{\cancel{2}\pi \cancel{i} \cdot \cancel{i\sqrt{3}}\, e^{-2\sqrt{3}}}{\cancel{2i\sqrt{3}}}$$

$$= i\pi e^{-2\sqrt{3}}$$

e

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \operatorname{sen} 2x}{x^2+3} dx = \pi e^{-2\sqrt{3}}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \cos 2x}{x^2+3} dx = 0.$$

Si noti che la funzione $\frac{x \operatorname{sen} 2x}{x^2+3}$ è pari e dunque

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{x \operatorname{sen} 2x}{x^2+3} dx = \frac{\pi}{2} e^{-2\sqrt{3}}$$

Il fatto che $\frac{x \cos 2x}{x^2+3}$ sia dispari (e che il suo integrale su $(-\infty,+\infty)$ è convergente) conferma che l'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \cos 2x}{x^2+3} dx = 0.$$

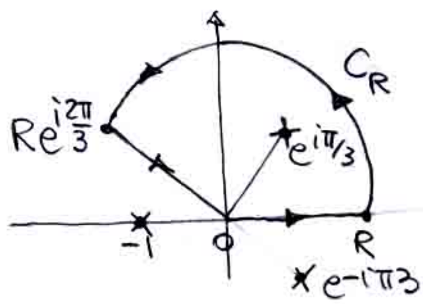
La "strategia" di calcolo illustrata in questa sezione ha molteplici varianti che dipendono dalle caratteristiche della funzione da integrare e dall'intervallo di integrazione.

Il prossimo esempio descrive una di queste varianti.

ESEMPIO 21.

Calcolare $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^3}\,dx$.

La funzione $f(z) = \frac{1}{1+z^3}$ ha 3 singolarità di ordine 1 : -1, $e^{i\pi/3}$ e $e^{-i\pi/3}$. Il percorso "conveniente" è il seguente



$\gamma = [0,R] \cup C_R \cup [Re^{i\frac{2\pi}{3}}, 0]$

Allora

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \,\mathrm{Res}\left(f, e^{i\pi/3}\right) = 2\pi i \left(\frac{1}{3z^2}\right)_{z=e^{i\pi/3}}$$
$$= -\frac{2\pi i}{3} \cdot e^{i\pi/3}$$

Ma d'altra parte

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_0^R f(x)\,dx + \int_{C_R} f(z)\,dz + \int_{t=R}^{0} f(te^{i2\pi/3})\,d(te^{i2\pi/3})$$

Per $R \to +\infty$ abbiamo che

$$\lim_{R\to\infty} \int_0^R f(x)\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^3}\,dx .$$

In modo simile a quanto visto per gli integrali di tipo 1)

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} f(z)\,dz = 0 .$$

Infine

$$\lim_{R\to\infty} \int_{t=R}^{0} f(te^{i2\pi/3})\,d(te^{i2\pi/3}) = -\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^3} \cdot e^{i2\pi/3}.$$

Così

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^3}\,dx + 0 - e^{i2\pi/3} \cdot \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^3} = -\frac{2\pi i}{3} e^{i\pi/3}$$

e quindi

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^3}\,dx = -\frac{2\pi i}{3} \cdot \frac{e^{i\pi/3}}{1-e^{i2\pi/3}}$$

$$= \frac{2\pi i}{3} \frac{1}{e^{i\pi/3} - e^{-i\pi/3}}$$

$$= \frac{2\pi i}{3} \frac{1}{2i\sin(\pi/3)} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} .$$