ESERCIZIO 1.

Verificare le condizioni di CAUCHY-RIEMANN per

1) $f(z)=\frac{1}{z}$, 2) $f(z)=z\cdot e^{-z}$ 3) $f(z)=\operatorname{sen} z$

1) Se $f(z)=\frac{1}{z}=\frac{\bar{z}}{|z|^2}=\frac{x}{x^2+y^2}-i\frac{y}{x^2+y^2}$ per $z\neq 0$.

Sia $u=Re(f)$ e $v=Im(z)$ allora

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2},\quad \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{-x^2-y^2+2y^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2},$$

e quindi $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$ e $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$.

2) Se $f(z)=ze^{-z}=(x+iy)\,e^{-x-iy}=(x+iy)\,e^{-x}(\cos y-i\operatorname{sen} y)$

$$=e^{-x}(x\cos y+y\operatorname{sen} y)+ie^{-x}(y\cos y-x\operatorname{sen} y).$$

Sia $u=Re(f)$ e $v=Im(z)$ allora

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-e^{-x}(x\cos y+y\operatorname{sen} y)+e^{-x}\cos y,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=e^{-x}(-x\operatorname{sen} y+\operatorname{sen} y+y\cos y),$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-e^{-x}(y\cos y-x\operatorname{sen} y)-e^{-x}\operatorname{sen} y=-\frac{\partial u}{\partial y},$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=e^{-x}(\cos y-y\operatorname{sen} y-x\cos y)=\frac{\partial u}{\partial x}.$$

3) Se $f(z)=\operatorname{sen} z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2}=\operatorname{sen} x\cosh y+i\cos x\cdot\operatorname{senh} y$

Sia $u=Re(f)$ e $v=Im(y)$ allora ricordando che $(\cosh y)'=\operatorname{senh} y$ e $(\operatorname{senh} y)'=\cosh y$ si ha che

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \cos x \cdot \cosh y \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{senh} y$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\operatorname{sen} x \cdot \operatorname{senh} y = -\frac{\partial u}{\partial y} \ , \ \frac{\partial v}{\partial y} = \cos x \cosh y = \frac{\partial u}{\partial x} .$$

ESERCIZIO 2.

Verificare che le funzioni $\operatorname{sen} z$ e $\cos z$ non sono limitate in $\mathbb{C}$ e che le loro parti reali e immaginarie sono funzioni armoniche in $\mathbb{C}$.

Sia $t \in \mathbb{R}$, allora

$$\operatorname{sen}(it) = \operatorname{sen} 0 \cdot \cosh t + i \cos 0 \cdot \operatorname{senh} t = i \operatorname{senh} t$$

quindi $\lim\limits_{t \to +\infty} |\operatorname{sen}(it)| = \lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{e^t - e^{-t}}{2} = +\infty$.

In modo simile

$$\cos(it) = \cosh t \quad \text{e} \quad \lim_{t \to +\infty} |\cos(it)| = \lim_{t \to +\infty} \frac{e^t + e^{-t}}{2} = +\infty$$

Inoltre se $f(z) = \operatorname{sen}(z) = u(x,y) + i v(x,y)$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(\cos x \cosh y) = -\operatorname{sen} x \cosh y$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(\operatorname{sen} x \cdot \operatorname{senh} y) = \operatorname{sen} x \cdot \cosh y$$

e quindi $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, ossia u è armonica.

Analogamente $\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} = -\cos x \operatorname{senh} y + \cos x \operatorname{senh} y = 0$.

La verifica per $f(z) = \cos z$ è simile.

ESERCIZIO 3.

Verificare che

1) $e^z \neq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$

2) $\sin z = 0$ se e solo se $z = k\pi$ per $k \in \mathbb{Z}$

3) $\cos z = 0$ se e solo se $z = \frac{\pi}{2} + k\pi$ per $k \in \mathbb{Z}$.

4) $\operatorname{sen}^2 z + \cos^2 z = 1 \quad \forall z \in \mathbb{C}$

1) Posto $z = x+iy$, la condizione

$$e^z = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y) = 0$$

è equivalente a

$$\operatorname{Re}(e^z) = e^x \cos y = 0 \text{ e } \operatorname{Im}(e^z) = e^x \operatorname{sen} y = 0$$

Dato che $e^x \neq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$ dovremmo avere che $\cos y = 0$ e $\operatorname{sen} y = 0$, ma questo è impossibile perché $\cos^2 y + \operatorname{sen}^2 y = 1 \ \forall y \in \mathbb{R}$.

2) $\sin z = 0$ se e solo se $\begin{cases} \operatorname{sen} x \cosh y = 0 \\ \cos x \operatorname{senh} y = 0 \end{cases}$

La funzione $\cosh y = \dfrac{e^y + e^{-y}}{2} > 0 \ \forall y \in \mathbb{R}$ quindi questo implica che $\operatorname{sen} x = 0$ ossia $x = k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$. Inoltre $\operatorname{senh} y = \dfrac{e^y - e^{-y}}{2}$ e quindi

$$\cos x \cdot \operatorname{senh} y = \overbrace{\cos(k\pi)}^{(-1)^k} \cdot \left(\frac{e^y - e^{-y}}{2}\right) = 0$$

implica che $e^y - e^{-y} = 0$, ossia $e^{2y} = 1$ e quindi $y = 0$. Possiamo dunque concludere che

$$\operatorname{sen} z = 0 \text{ se e solo se } z = k\pi + i \cdot 0 = k\pi \text{ con } k \in \mathbb{Z}.$$

3) $\cos z = 0$ se e solo se $\begin{cases} \cos x \cosh y = 0 \\ \operatorname{sen} x \operatorname{senh} y = 0 \end{cases}$

In modo simile a prima $\cosh y > 0$ implica che $\cos x = 0$ e $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ per $k \in \mathbb{Z}$.

Così che

$$0 = \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{senh} y = \overbrace{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)}^{(-1)^k} \left(\frac{e^y - e^{-y}}{2}\right)$$

implica che $e^y = e^{-y}$ ossia che $y = 0$.

4) Per definizione di $\operatorname{sen} z$ e $\cos z$ si ha che

$$(\operatorname{sen} z)^2 + (\cos z)^2 = \left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right)^2 + \left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\right)^2$$

$$= -\frac{1}{4}\left(\cancel{e^{2iz}} - 2 + \cancel{e^{-2iz}}\right) + \frac{1}{4}\left(\cancel{e^{2iz}} + 2 + \cancel{e^{-2iz}}\right)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

ESERCIZIO 4.

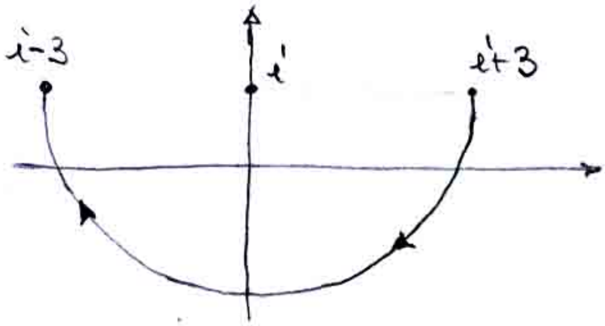
Se si pone che $z^w \overset{\text{def}}{=} e^{w \log z}$ dove $\log z$ è il logaritmo principale, quanto vale i^i?

$$i^i = e^{i \log(i)} = e^{i(\log|i| + i \arg(i))}$$

$$= e^{i(\log 1 + i \cdot \frac{\pi}{2})} = e^{-\frac{\pi}{2}}.$$

ESERCIZIO 5.

Calcolare $\int_\gamma \frac{1}{(z-i)^2}\,dz$ dove γ è l'arco della circonferenza di centro i, raggio 3, contenuta nel semipiano $\mathrm{Im}(z) \leq 1$, percorsa in senso orario.



Calcolo diretto: γ è data da

$$z(t) = 3\cos t + i(1+3\sin t) = i + 3e^{it} \quad t \in [\pi, 2\pi]$$

quindi

$$\int_\gamma \frac{1}{(z-i)^2}\,dz = -\int_\pi^{2\pi} \frac{1}{(3e^{it})^2} \cdot 3i e^{it}\,dt = -\frac{i}{3}\int_\pi^{2\pi} e^{-it}\,dt$$

$$= -\frac{i}{3}\left[\frac{e^{-it}}{-i}\right]_\pi^{2\pi} = \frac{1}{3}\left(e^{-2\pi i} - e^{-i\pi}\right) = \frac{2}{3}.$$

D'altra parte

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{-1}{(z-i)}\right) = \frac{1}{(z-i)^2}.$$

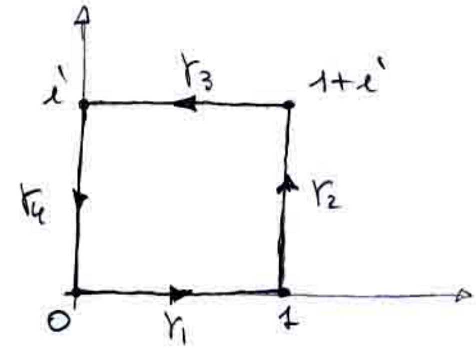
Così

$$\int_\gamma \frac{1}{(z-i)^2} = \left[-\frac{1}{z-i}\right]_{i+3}^{i-3} = \frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}.$$

ESERCIZIO 6.

Calcolare $\int_\gamma |z|^2 dz$ dove γ è il seguente percorso

$\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \gamma_4$



Calcolo diretto: $|z|^2 = Re(z)^2 + Im(z)^2$ e inoltre

γ_1: $z(t) = t$ con $t \in [0,1]$,

γ_2: $z(t) = 1 + it$ con $t \in [0,1]$,

γ_3^-: $z(t) = t + i$ con $t \in [0,1]$,

γ_4^-: $z(t) = t \cdot i$ con $t \in [0,1]$.

Così

$$\int_\gamma |z|^2 dz = \int_0^1 t^2 dt + \int_0^1 (1+t^2) \cdot i \, dt - \int_0^1 (t^2+1) dt - \int_0^1 t^2 \cdot i \, dt$$

$$= \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1 + i\left[t + \frac{t^3}{3}\right]_0^1 - \left[\frac{t^3}{3} + t\right]_0^1 - i\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1 = -1 + i.$$

Si noti che

$$|z|^2 = |x+iy|^2 = \overbrace{x^2+y^2}^{u} + i \cdot \overbrace{0}^{v}$$

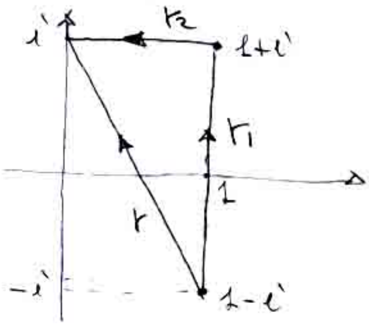
non è olomorfa in nessun aperto di $\mathbb{C}$ perché

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x = \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad e \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2y = -\frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

se e solo se $x = 0$ e $y = 0$.

ESERCIZIO 7

Calcolare $\int_\gamma \frac{4}{z}\,dz$ dove γ è il percorso rettilineo da $1-i$ a i.



$$\gamma:\ z(t) = 1-i+t\,(i-(1-i)) = 1-i+t\,(2i-1) \quad \text{per } t\in[0,1]$$

Proviamo prima con un calcolo diretto

$$4\int_\gamma \frac{1}{z}\,dz = 4\int_0^1 \frac{1}{(1-i)+t(2i-1)}\,(2i-1)\,dt$$

$\frac{1}{z}=\frac{\bar z}{|z|^2}$

$$= 4\int_0^1 \frac{(1-t)-i\,(2t-1)}{(1-t)^2+(2t-1)^2}\cdot(2i-1)\,dt$$

$$= 4\int_0^1 \frac{5t-3}{5t^2-6t+2}\,dt + 4i\int_0^1 \frac{1}{5t^2-6t+2}\,dt$$

$$= 2\left[\log(5t^2-6t+2)\right]_0^1 + 4i\left[\operatorname{arctg}(5t-3)\right]_0^1$$

$$= -2\log 2 + 4i\,(\operatorname{arctg}2+\operatorname{arctg}3)$$

$$= -2\log 2 + 4i\left(-\frac{\pi}{4}+\pi\right) = -2\log 2 + 3\pi i$$

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}2+\operatorname{arctg}3) = \frac{2+3}{1-2\cdot 3} = -1 \Rightarrow \operatorname{arctg}2+\operatorname{arctg}3 = -\frac{\pi}{4}+k\pi$$

con $k=1$.

Questo calcolo può essere semplificato usando il teorema di CAUCHY: $f(z)=4/z$ è olomorfa in D (perché $0\notin D$) e quindi

$$\int_{\gamma\cup\gamma_1\cup\gamma_2} f(z)\,dz = 0 \Rightarrow \int_\gamma f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz$$

dove $\quad \gamma_1: z(t) = 1 + it \quad$ per $t \in [-1, 1]$

$\quad\quad \bar{\gamma}_2: z(t) = i + t \quad$ per $t \in [0, 1]$.

così

$$4\int_\gamma \frac{1}{z}dz = 4\int \frac{\bar{z}}{|z|^2}dz + 4\int_{\gamma_2} \frac{\bar{z}}{|z|^2}dz$$

$$= 4\int_{-1}^{1} \frac{1-it}{1+t^2}\, i\,dt - 4\int_0^1 \frac{-i+t}{1+t^2}\,dt$$

$$= 4i\left[\operatorname{arctg} t\right]_{-1}^{1} + \frac{4}{2}\left[\log(1+t^2)\right]_{-1}^{1}$$

$$+4i\left[\operatorname{arctg} t\right]_0^1 - \frac{4}{2}\left[\log(1+t^2)\right]_0^1$$

$$= 4i\cdot\frac{\pi}{2} + 0 + 4i\frac{\pi}{4} - 2\log 2 = 3\pi i - 2\log 2.$$

Un altro modo per effettuare questo calcolo consiste nell'osservare che il logaritmo complesso (principale) $\log z$ lungo il percorso γ soddisfa

$$\frac{d}{dz}(\log z) = \frac{1}{z}$$

e quindi

$$4\int_\gamma \frac{1}{z}dz = 4\left[\log z\right]_{1-i}^{i} = 4\log i - 4\log(1-i)$$

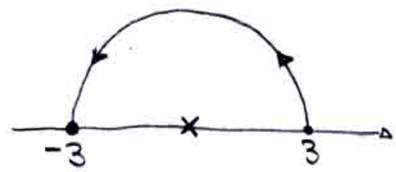
$$= 4\left(\log|i| + i\arg(i)\right) - 4\left(\log|1-i| + i\arg(1-i)\right)$$

$$= 4i\cdot\frac{\pi}{2} - 4\left(\log\sqrt{2} + i\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = 3\pi i - 2\log 2.$$

ESERCIZIO 8.

Calcolare $\displaystyle\int_\gamma \left(\frac{Re(z)}{z}\right)^2 dz$ dove γ è la semi-circonferenza centrata in 0 di raggio 3 percorsa in senso antiorario da $z_1 = 3$ a $z_2 = -3$.

$\gamma: z(t) = 3e^{it}$ per $t \in [0, \pi]$.



$$\int_\gamma \left(\frac{Re(z)}{z}\right)^2 dz = \int_0^\pi \left(\frac{\cancel{3}\cos t}{\cancel{3}e^{it}}\right)^2 \cdot 3i e^{it} dt$$

$$= 3i \int_0^\pi \cos^2 t \cdot e^{-it} dt = 3i \int_0^\pi \cos^2 t (\cos t - i \sin t) dt$$

$$= 3i \int_0^\pi \cos^3 t \, dt - 3 \int_0^\pi \cos^2 t \, d(\cos t)$$

$$= 3i \cdot 0 - \cancel{3}\left[\frac{\cos^3 t}{\cancel{3}}\right]_0^\pi = 2.$$

Si osservi che la funzione $f(z) = \left(\frac{Re(z)}{z}\right)^2$ non è olomorfa in nessun aperto di $\mathbb{C}$.

La verifica può essere fatta individuando

$$u = Re(f(z)) = x^2 Re\left(\frac{1}{z^2}\right) = \frac{x^2 Re(\bar{z}^2)}{|z|^4} = \frac{x^2(x^2 - y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

e

$$v = Im(f(z)) = \frac{x^2 Im(\bar{z}^2)}{|z|^4} = \frac{-2x^3 y}{(x^2+y^2)^2}$$

dove $z = x + iy$.

ESERCIZIO 9.

Calcolare $\int_{\gamma_R} \frac{3z-2}{z(z-1)}\,dz$ dove γ_R è la circonferenza centrata in 0 e raggio $R>0$ percorsa in senso positivo.

La funzione razionale da integrare si decompone

$$\frac{3z-2}{z(z-1)} = \frac{2}{z} + \frac{1}{z-1}$$

e per la formula integrale di CAUCHY

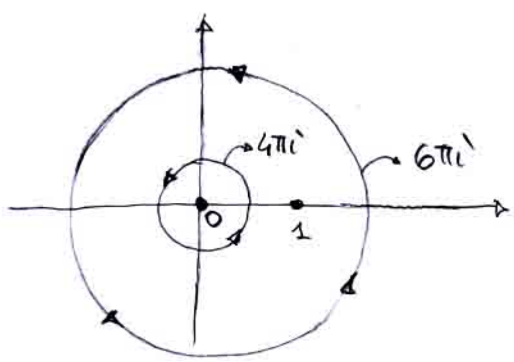
$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_R} \frac{2}{z}\,dz = 2 \quad \text{per } R>0 \quad \text{e} \quad \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_R} \frac{1}{z-1}\,dz = \begin{cases} 1 & \text{se } R>1 \\ 0 & \text{se } 0<R<1 \end{cases}.$$

Quindi per $R>0$ e $R\neq 1$ si ha che

$$\int_{\gamma_R} \frac{3z-2}{z(z-1)}\,dz = \int_{\gamma_R} \frac{2}{z}\,dz + \int_{\gamma_R} \frac{1}{z-1}\,dz$$

$$= \begin{cases} 4\pi i & \text{per } 0<R<1 \\ 6\pi i & \text{per } R>1. \end{cases}$$

Per $R=1$ l'integrale non è definito.



ESERCIZIO 10.

Calcolare il raggio di convergenza delle serie di potenze

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty} n\cdot 2^n\cdot z^n \quad e \quad 2)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$$

e determinare le loro somme all'interno del cerchio di convergenza (centrato in 0).

1) $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n2^n} = \lim_{n\to\infty} 2e^{\frac{\log n}{n}} = 2 = \frac{1}{R} \Rightarrow R=\frac{1}{2}$,

oppure

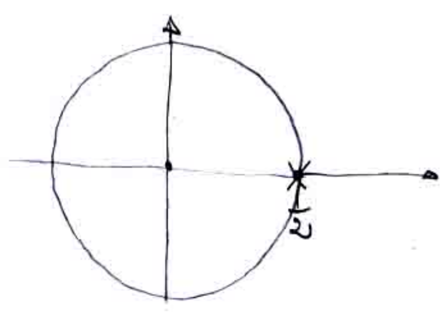
$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)2^{n+1}}{n\cdot 2^n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot 2 = 2 = \frac{1}{R} \Rightarrow R=\frac{1}{2}$.

Notiamo che per $|z|<\frac{1}{2}$ vale la derivazione termine a termine e

$$\sum_{n=1}^{\infty} n2^nz^n \underset{\substack{\uparrow\\ w=2z}}{=} 2z\sum_{n=1}^{\infty} n w^{n-1} = 2z\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d}{dw}(w^n)$$

$$= 2z\frac{d}{dw}\left(\sum_{n=1}^{\infty} w^n\right) = 2z\frac{d}{dw}\left(\sum_{n=0}^{\infty} w^n\right)$$

$$= 2z\frac{d}{dw}\left(\frac{1}{1-w}\right) = 2z\cdot\frac{1}{(1-w)^2} = \frac{2z}{(1-2z)^2}.$$



2) $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1 = \frac{1}{R} \Rightarrow R=1$

oppure

$\lim_{n\to+\infty} \frac{1/n+1}{1/n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = 1 = \frac{1}{R} \Rightarrow R=1$

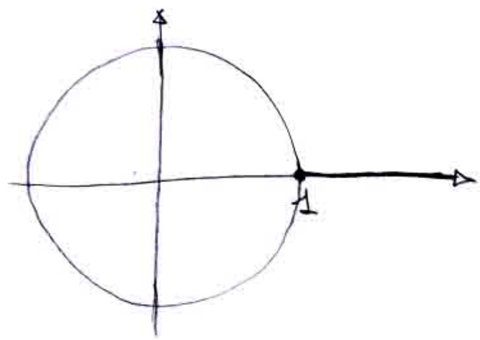
Per $|z|<1$ vale l'integrazione termine e termine e quindi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_\gamma z^{n-1} dz = \int_\gamma \left(\sum_{n=1}^{\infty} z^{n-1}\right) dz$$

$$= \int_\gamma \left(\sum_{n=0}^{+\infty} z^n\right) dz = \int_\gamma \frac{1}{1-z} dz = \Big[-\log(1-z)\Big]_0^z =$$

$$= -\log(1-z)$$

dove γ è un percorso rettilineo da 0 a z.



Si noti che per come è definito il logaritmo principale, $\log(1-z)$ è olomorfa nell'insieme dei z per cui $1-z \notin (-\infty, 0]$ ossia per

$$z \notin [1, +\infty).$$

ESERCIZIO 11:

Calcolare le parti principali dello sviluppo di LAURENT di $f(z) = \frac{e^{-3z}}{z^3(1-z^2)}$ nelle sue singolarità.

$f(z)$ è olomorfa in $\mathbb{C} \setminus \{0, 1, -1\}$.

La singolarità $z_0 = 0$ ha ordine 3 e

$$f(z) = \frac{1}{z^3}\left(1 - 3z + \frac{9z^2}{2} + O(z^3)\right) \cdot \left(1 + z^2 + O(z^4)\right)$$

$$= \frac{1}{z^3}\left(1 + z^2 - 3z + \frac{9z^2}{2} + O(z^3)\right)$$

$$= \underbrace{\frac{1}{z^3} - \frac{3}{z^2} + \frac{11/2}{z}}_{\text{Parte principale}} + \underbrace{h(z)}_{\text{parte olomorfa}}.$$

Conoscendo l'ordine di $z_0 = 0$ si possono anche calcolare i coefficienti a_{-3}, a_{-2}, a_{-1} usando il teorema 8.

$$a_{-3} = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_2} \frac{f(z)}{z^{-2}}\, dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_2} \frac{\frac{e^{-3z}}{1-z^2}}{z}\, dz = \left(\frac{e^{-3z}}{1-z^2}\right)_{z=0} = 1$$

$$a_{-2} = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_2} \frac{f(z)}{z^{-1}}\, dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_2} \frac{\frac{e^{-3z}}{1-z^2}}{z^2}\, dz = \left(\left(\frac{e^{-3z}}{1-z^2}\right)'\right)_{z=0}$$

$$= \left(\frac{-3e^{-3z}(1-z^2) - e^{-3z}(-2z)}{1-z^2}\right)_{z=0} = -3.$$

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_2} f(z)\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_2} \frac{\frac{e^{-3z}}{1-z^2}}{z^3}\,dz$$

$$= \frac{1}{2}\left(\left(\frac{e^{-3z}}{1-z^2}\right)''\right)_{z=0} = \frac{1}{2}\left(9e^{-3z} + 2\,\frac{(-3e^{-3z}z+e^{-3z})(1-z^2)-e^{-3z}z(-2z)}{(1-z^2)^2}\right)_{z=0}$$

$$= \frac{11}{2}.$$

La singolarità $z_0=1$ ha ordine 1 e quindi

$$a_{-1} = \operatorname{Res}(f,1) = \left(\frac{e^{-3z}\,\overset{-1}{\cancel{(z-1)}}}{z^3\cancel{(1-z)}(1+z)}\right)_{z=1} = -\frac{e^{-3}}{2}$$

e la parte principale per $z_0=1$ è

$$-\frac{e^{-3}}{2}\,\frac{1}{z-1}.$$

In modo simile si tratta la singolarità $z_0=-1$

$$a_{-1} = \operatorname{Res}(f,-1) = \left(\frac{e^{-3z}\cancel{(z+1)}}{z^3(1-z)\cancel{(1+z)}}\right)_{z=-1} = -\frac{e^{3}}{2}$$

e la parte principale per $z_0=-1$ è

$$-\frac{e^{3}}{2}\cdot\frac{1}{z+1}.$$

ESERCIZIO 12.

Calcolare $\operatorname{Res}\left(\frac{\cos(\pi z)}{z(z^3-1)^2}, 1\right)$.

Il punto 1 è una singolarità di ordine 2 perché $\cos\pi \neq 0$ e $(z^3-1)^2 = (z-1)^2(z^2+z+1)^2$.

$$\operatorname{Res}\left(\frac{\cos(\pi z)}{z(z^3-1)^2}, 1\right) = \left(\frac{d}{dz}\left(\frac{\cos(\pi z)}{z(z^2+z+1)^2}\right)\right)_{z=1}$$

$$\overset{(*)}{=}\left(\frac{\cos(\pi z)}{z(z^2+z+1)^2}\cdot\left(\frac{-\operatorname{sen}(\pi z)\cdot\pi}{\cos(\pi z)} - \frac{1}{z} - \frac{2(z^2+z+1)\cdot(2z+1)}{(z^2+z+1)^2}\right)\right)_{z=1}$$

$$= \frac{-1}{1\cdot 9}\left(0 - 1 - \frac{2\cdot 3\cdot 3}{3^2}\right) = \frac{1}{3}.$$

Si noti che (*) vale perché:

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{a\cdot b}{c\cdot d}\right) = \left(\frac{a\cdot b}{c\cdot d}\right)\cdot\left(\frac{a'}{a} + \frac{b'}{b} - \frac{c'}{c} - \frac{d'}{d}\right).$$

ESERCIZIO 13.

Calcolare $\operatorname{Res}\left(\frac{\operatorname{sen} z}{z^4(z^2+1)}, 0\right)$.

Il punto 0 è una singolarità di ordine 3 $\left(\lim_{z\to 0}\frac{\operatorname{sen} z}{z} = 1\right)$

Quindi per evitare il calcolo di una derivata seconda conviene ragionare con gli sviluppi

$$\frac{\operatorname{sen} z}{z^4(z^2+1)} = \frac{1}{z^4}\left(z - \frac{z^3}{6} + O(z^5)\right)\left(1 - z^2 + O(z^4)\right)$$

$$= \frac{1}{z^3} + \underbrace{\left(-\frac{1}{6} - 1\right)}_{-7/6}\cdot\frac{1}{z} + \text{parte olomorfa}$$

e così $\quad a_{-1} = -7/6.$

ESERCIZIO 14.

Sia $tg\, z = \frac{\operatorname{sen} z}{\cos z}$ per $z \in \mathbb{C} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ per } k \in \mathbb{Z} \right\}$.

$tg\, z$ è olomorfa nel suo insieme di definizione. Calcolare i residui nelle singolarità.

Si osserva che la parte iniziale dello sviluppo di Taylor delle funzioni olomorfe $\operatorname{sen} z$ e $\cos z$ in $z_0 = \frac{\pi}{2} + k\pi$ è

$$\operatorname{sen} z = \operatorname{sen}(z_0) + O(z - z_0) = (-1)^k + O(z - z_0),$$

$$\begin{aligned}\cos z &= \cos(z_0) + (-\operatorname{sen}(z_0))(z - z_0) + O((z - z_0)^2) \\ &= -(-1)^k (z - z_0) + O((z - z_0)^2).\end{aligned}$$

Quindi

$$tg(z) = \frac{(-1)^k + O(z - z_0)}{-(-1)^k (z - z_0) + O((z - z_0)^2)} = \frac{-1}{z - z_0} + \text{parte olomorfa}$$

e così $\operatorname{Res}\left(tg(z), \frac{\pi}{2} + k\pi\right) = -1$.

Sapendo che le singolarità $z_0 = \frac{\pi}{2} + k\pi$ è di ordine 1, il residuo in z_0 si può calcolare anche così

$$\operatorname{Res}\left(tg\, z, \frac{\pi}{2} + k\pi\right) = \lim_{z \to z_0} \frac{(z - z_0) \cdot \operatorname{sen} z}{\cos z}$$

$$\overset{H}{=} \lim_{z \to z_0} \frac{\operatorname{sen} z + (z - z_0) \cos z}{-\operatorname{sen} z} = -1.$$

ESERCIZIO 15.

Sia $f(z) = \frac{\operatorname{sen}(i\pi z)}{(z^2+1)^2}$, calcolare $\int_\gamma f(z)\,dz$ per

1) $\gamma = C(i,1)$ 2) $\gamma = C(0,2)$

dove $C(w,r)$ è la circonferenza di centro $w \in \mathbb{C}$ e raggio $r>0$ percorsa in senso anti-orario.

Il denominatore si fattorizza

$$(z^2+1)^2 = (z-i)^2(z+i)^2$$

mentre lo sviluppo di TAYLOR del numeratore in i è

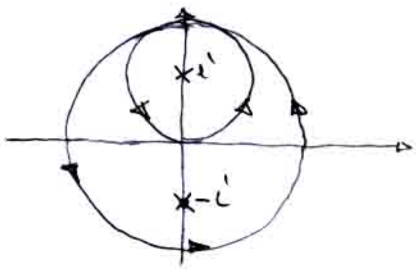
$$\operatorname{sen}(i\pi z) = 0 - \pi i(z-i) + O(z-i)$$

e quello in $-i$ è

$$\operatorname{sen}(i\pi z) = 0 - \pi i(z+i) + O(z+i).$$

Quindi le singolarità di $f(z)$ sono i e $-i$ e sono entrambe di ordine 1.

Dato che



è necessario calcolare il residuo sia in i che in $-i$.

$$\operatorname{Res}(f,i) = \lim_{z\to i} \frac{\cancel{(z-i)}\operatorname{sen}(i\pi z)}{(z+i)^2(z-i)^{\cancel{2}}}$$

$$= \lim_{z\to i} \frac{-\pi i\cancel{(z-i)}}{(z+i)^2\cancel{(z-i)}} = \frac{-\pi i}{(2i)^2} = \frac{\pi i}{4}$$

Con un calcolo simile si trova che

$$\operatorname{Res}(f,-i) = \lim_{z\to -i} \frac{-\pi i\cancel{(z+i)}}{\cancel{(z+i)}(z-i)^2} = \frac{\pi i}{4}$$

Quindi

$$\int_{C(i,1)} f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f,i) = -\frac{\pi^2}{2},$$

$$\int_{C(0,2)} f(z)\,dz = 2\pi i \left(\operatorname{Res}(f,i) + \operatorname{Res}(f,-i)\right) = -\pi^2.$$

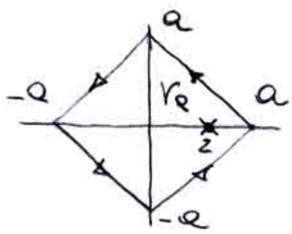
ESERCIZIO 16.

Sia $f(z) = \dfrac{\cos(\pi z)}{(z-2)^2 e^{i\pi z}}$ e γ_a la curva chiusa con sostegno $\{z \in \mathbb{C} : |Re(z)| + |Im(z)| = a\}$ percorsa in senso antiorario. Calcolare $\int_{\gamma_a} f(z)\,dz$ per $a > 0$.

Dato che $e^{i\pi z} \neq 0$ $\forall z \in \mathbb{C}$ e $\cos(2\pi) = 1 \neq 0$, $f(z)$ ha una sola singolarità in 2 di ordine 2.

$$\operatorname{Res}(f,2) = \left(\frac{d}{dz}\left(\frac{\cos(\pi z)}{e^{i\pi z}}\right)\right)_{z=2}$$
$$= \left(-i\pi e^{-i\pi z}\cos(\pi z) + e^{-i\pi z}(-\operatorname{sen}(\pi z)\cdot \pi)\right)_{z=2} = -i\pi.$$

Ora, γ_a è il bordo del seguente quadrato:

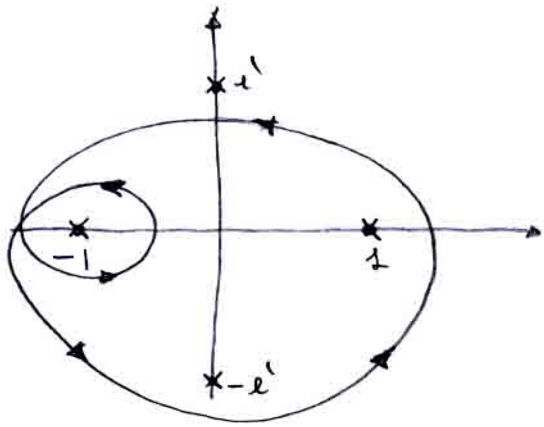


e dunque

$$\int_{\gamma_a} f(z)\,dz = \begin{cases} 0 & \text{se } a<2 \ (\gamma_a \text{ non contiene } 2), \\ \text{non definito} & \text{se } a=2 \ (\gamma_a \text{ attraversa } 2), \\ 2\pi i \cdot (-i\pi) = 2\pi^2 & \text{se } a>2 \ (\gamma_a \text{ contiene } 2). \end{cases}$$

ESERCIZIO 17.

Calcolare $\int_\gamma \frac{z+2}{z^4-1}\,dz$ dove γ è il percorso chiuso di seguito rappresentato



Le singolarità sono date dalle soluzioni dell'equazione

$$0 = z^4-1 = (z-1)(z+1)(z-i)(z+i)$$

e quindi sono $1, -1, i, -i$ tutte di ordine 1.

Dato che

$$n(\gamma,1)=1,\ n(\gamma,-1)=2,\ n(\gamma,i)=0,\ n(\gamma,-i)=1$$

è necessario calcolare i residui in $1, -1$ e $-i$.

$$\operatorname{Res}\left(\frac{z+2}{z^4-1}, 1\right) = \left(\frac{z+2}{(z^4-1)'}\right)_{z=1} = \left(\frac{z+2}{4z^3}\right)_{z=1} = \frac{3}{4}$$

e analogamente

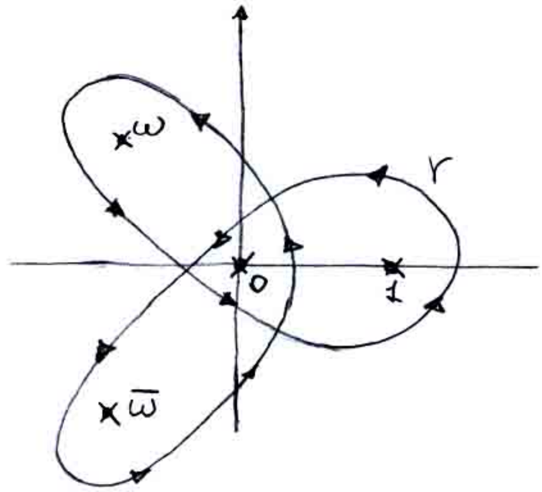
$$\operatorname{Res}\left(\frac{z+2}{z^4-1}, -1\right) = \left(\frac{z+2}{4z^3}\right)_{z=-1} = -\frac{1}{4}\,,\quad \operatorname{Res}\left(\frac{z+2}{z^4-1}, -i\right) = \frac{-i+2}{4(-i)^3} = -\frac{1}{4}-\frac{i}{2}.$$

Così

$$\int_\gamma \frac{z+2}{z^4-1}\,dz = 2\pi i\left(1\cdot\frac{3}{4}+2\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)+1\cdot\left(-\frac{1}{4}-\frac{i}{2}\right)\right) = \pi.$$

ESERCIZIO 18.

Calcolare $\displaystyle\int_\gamma \frac{1}{z(z^3-1)}\,dz$ dove γ è il seguente percorso chiuso



$z(z^3-1)=0$

$\hookrightarrow z\in\{0,1,\omega,\overline{\omega}\}$

Le singolarità sono tutte di ordine 1 e sono

$0,\ 1,\ \omega=e^{\frac{2\pi i}{3}}$ e $\overline{\omega}=e^{-\frac{2\pi i}{3}}$.

I residui sono

$$\mathrm{Res}\left(\frac{1}{z(z^3-1)},z_0\right)=\frac{1}{4z_0^3-1}=\begin{cases}-1 & \text{se } z_0=0\\ \frac{1}{3} & \text{se } z_0=1,\omega,\overline{\omega}\end{cases}$$

Quindi

$$\int_\gamma \frac{1}{z(z^3-1)}\,dz = 2\pi i\Big(\overset{2}{\overset{\shortparallel}{n(\gamma,0)}}\cdot(-1)+\overset{1}{\overset{\shortparallel}{n(\gamma,1)}}\cdot\frac{1}{3}$$

$$+\overset{1}{\overset{\shortparallel}{n(\gamma,\omega)}}\cdot\frac{1}{3}+\overset{1}{\overset{\shortparallel}{n(\gamma,\overline{\omega})}}\cdot\frac{1}{3}\Big)$$

$$=-2\pi i.$$

ESERCIZIO 19.

Sia $f(z) = \frac{z}{e^z - 1}$. Calcolare i residui in tutte le singolarità.

Notiamo che

$$e^z = e^x \cdot (\cos y + i \operatorname{sen} y) = 1 \iff \begin{cases} e^x \cos y = 1 \\ e^x \operatorname{sen} y = 0 \end{cases}$$

ovvero se $z = x + iy = 0 + 2\pi i k$ per $k \in \mathbb{Z}$.

Per $z_0 = 0$ la singolarità è eliminabile:

$$f(z) = \frac{z}{\cancel{1} + z + \frac{z^2}{2} + O(z^3) - \cancel{1}} = \frac{1}{1 + \frac{z}{2} + O(z^2)} = 1 - \frac{z}{2} + O(z^2)$$

e quindi $\operatorname{Res}(f, 0) = 0$.

Sia $z_0 = 2\pi i k$ con $k \neq 0$. In tal caso

$$e^z = e^{z_0} + e^{z_0}(z - z_0) + \frac{e^{z_0}}{2!}(z - z_0)^2 + O((z - z_0)^3)$$
$$= 1 + (z - 2\pi i k) + \frac{1}{2}(z - 2\pi i k)^2 + O((z - 2\pi i k)^3)$$

Così è facile verificare che in tal caso l'ordine della singolarità è 1:

$$\operatorname{Res}\left(\frac{z}{e^z - 1}, 2\pi i k\right) = \lim_{z \to 2\pi i k} \frac{z(z - 2\pi i k)}{e^z - 1}$$
$$\overset{H}{=} \lim_{z \to 2\pi i k} \frac{2z - 2\pi i k}{e^z} = 2\pi i k.$$

ESERCIZIO 20.

Calcolare $\int_\gamma \frac{dz}{(z-\frac{\pi}{2})\cos z}$ dove γ è $|z|=2$ percorso in senso anti-orario.

La funzione $\frac{1}{(z-\frac{\pi}{2})\cos z}$ ha una singolarità in $\frac{\pi}{2}$ di ordine 2 mentre le restanti singolarità $\frac{\pi}{2}+k\pi$ per $k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$ sono di ordine 1.

Nel nostro caso γ "gira" attorno solo a $\frac{\pi}{2}$ e $-\frac{\pi}{2}$

$$\operatorname{Res}\left(\frac{1}{(z-\frac{\pi}{2})\cos z},\frac{\pi}{2}\right)=\lim_{z\to\frac{\pi}{2}}\frac{d}{dz}\left(\frac{(z-\frac{\pi}{2})}{\cos z}\right)$$

$$=\lim_{z\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos z+(z-\frac{\pi}{2})\cdot\sin z}{\cos^2 z}\overset{H}{=}\lim_{z\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cancel{-\sin z}+\cancel{\sin z}+(z-\frac{\pi}{2})\cos z}{2\cos z(-\sin z)}$$

$$=\lim_{z\to\frac{\pi}{2}}-\frac{(z-\frac{\pi}{2})}{2\sin z}=0.$$

$$\operatorname{Res}\left(\frac{1}{(z-\frac{\pi}{2})\cos z},-\frac{\pi}{2}\right)=\lim_{z\to-\frac{\pi}{2}}\frac{(z+\frac{\pi}{2})}{(z-\frac{\pi}{2})\cos z}$$

$$\overset{H}{=}\lim_{z\to-\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\cos z+(z-\frac{\pi}{2})(-\sin z)}=-\frac{1}{\pi}.$$

Quindi

$$\int_\gamma\frac{dz}{(z-\frac{\pi}{2})\cos z}=2\pi i\left(0-\frac{1}{\pi}\right)=-2i.$$

ESERCIZIO 21.

Sia $f(z) = \frac{2z^3+3i}{(z^2+2z+2)^2}$. Calcolare i residui nelle singolarità e in ∞.

Dato che $z^2+2z+2=0$ è risolta per $z=-1\pm\sqrt{1-2}=-1\pm i$.

le singolarità sono $-1\pm i$ e sono di ordine 2.

$$\mathrm{Res}(f(z),-1+i) = \left(\frac{d}{dz}\left(\frac{2z^3+3i}{(z+1+i)^2}\right)\right)\Bigg|_{z=-1+i}$$

$$= \frac{6z^2\cdot(z+1+i)^2-(2z^3+3i)\cdot 2(z+1+i)}{(z+1+i)^4}$$

$$\underset{(-1+i)^2=-2i}{\overset{\uparrow}{=}} \frac{-12i\cdot(-4)-(4i(-1+i)+3i)\cdot 4i}{16} = \frac{7}{4}+2i$$

In modo simile si ottiene che

$$\mathrm{Res}(f(z),-1-i) = \frac{1}{4}-2i.$$

Infine

$$\mathrm{Res}(f(z),\infty) = \mathrm{Res}\left(-\frac{1}{z^2}f\left(\frac{1}{z}\right),0\right)$$

$$=\mathrm{Res}\left(-\frac{2+3iz^3}{z(1+2z+2z^2)^2},0\right)$$

$$=\left(-\frac{2+3iz^3}{(1+2z+2z^2)^2}\right)\Bigg|_{z=0} = -2.$$

Come controllo possiamo verificare che la somma di questi residui è zero

$$\left(\frac{7}{4}+2i\right)+\left(\frac{1}{4}-2i\right)+(-2)=0.$$

ESERCIZIO 22.

Sia $f(z)=\dfrac{z^3+4}{(z-1)^2(z^2+4)}$. Calcolare i residui nelle singolarità e in ∞.

Le singolarità sono: 1 di ordine 2 e $\pm 2i$ di ordine 1.

$$\operatorname{Res}(f,1)=\left(\frac{d}{dz}\left(\frac{z^3+4}{z^2+4}\right)\right)_{z=1}=\left(\frac{3z^2(z^2+4)-(z^3+4)\cdot 2z}{(z^2+4)^2}\right)_{z=1}=\frac{1}{5},$$

$$\operatorname{Res}(f,2i)=\left(\frac{z^3+4}{(z-1)^2(z+2i)}\right)_{z=2i}=\frac{8i^3+4}{(2i-1)^2\cdot 4i}=\frac{1-2i}{(2i-1)^2}\cdot(-i)$$

$$=\frac{i}{2i-1}=\frac{i(-2i-1)}{5}=\frac{2}{5}-\frac{i}{5},$$

$$\operatorname{Res}(f,-2i)=\left(\frac{z^3+4}{(z-1)^2(z-2i)}\right)_{z=-2i}=\frac{2}{5}+\frac{i}{5},$$

$$\operatorname{Res}(f,\infty)=\operatorname{Res}\left(-\frac{1}{z^2}\cdot f\left(\frac{1}{z}\right),0\right)=$$

$$=\operatorname{Res}\left(-\frac{1+4z^3}{(1-z)^2(1+4z^2)z},0\right)$$

$$=\left(-\frac{1+4z^3}{(1-z)^2(1+4z^2)}\right)_{z=0}=-1.$$

La somma di "tutti" i residui è, come ci si aspetta, nulla:

$$\frac{1}{5}+\left(\frac{2}{5}-\frac{i}{5}\right)+\left(\frac{2}{5}+\frac{i}{5}\right)+(-1)=0.$$

ESERCIZIO 23.

Calcolare $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^3-i}\,dx$

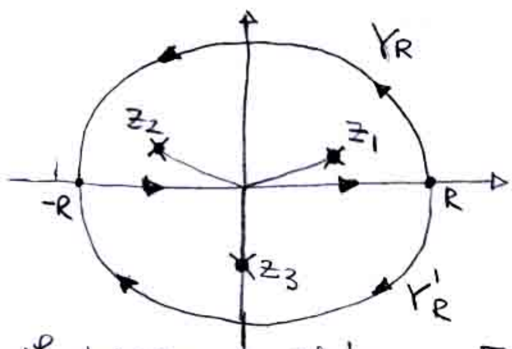
Le singolarità sono date dalle soluzioni di

$$z^3 = i = e^{i\pi/2}$$

ossia

$$z_1 = e^{i\pi/6}, \quad z_2 = e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}\right)} = e^{i\frac{5\pi}{6}}, \quad z_3 = e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{4\pi}{3}\right)} = -i.$$

Tutte le singolarità sono di ordine 1.



Se usiamo il percorso chiuso $[-R,R]\cup\gamma_R$ l'integrale è uguale a

$$= \lim_{R\to\infty} \int_{[-R,R]\cup\gamma_R} \frac{1}{z^3-i}\,dz = 2\pi i\left(\mathrm{Res}\left(\frac{1}{z^3-i}, z_1\right) + \mathrm{Res}\left(\frac{1}{z^3-1}, z_2\right)\right)$$

Ricordiamo che $\displaystyle\int_{\gamma_R} \frac{1}{z^3-i}\,dz \to 0$ e allo stesso modo anche $\displaystyle\int_{\gamma_R'} \frac{1}{z^3-i}\,dz \to 0$. Quindi l'integrale è anche uguale a

$$= \lim_{R\to\infty} \int_{[-R,R]\cup\gamma_R'} \frac{1}{z^3-i}\,dz \overset{\substack{\text{percorso}\\\text{orario}}}{=} -2\pi i\,\mathrm{Res}\left(\frac{1}{z^3-i}, -i\right)$$

In questo caso il calcolo è più semplice

$$= -2\pi i\cdot\left(\frac{1}{3z^2}\right)_{z=-i} = \frac{2\pi i}{3}.$$

ESERCIZIO 24.

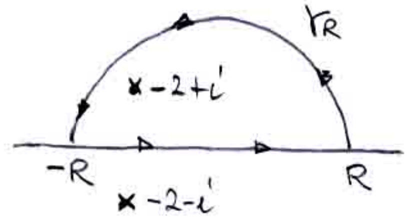
Calcolare $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+4x+5)^2}\,dx$.

Le singolarità sono

$$z_{1,2} = -2 \pm \sqrt{4-5} = -2 \pm i$$

entrambe di ordine 2. Dato che solo $-2+i$ è contenuto nel semipiano $\mathrm{Im}(z)>0$, abbiamo che l'integrale è uguale a

$$= \lim_{R\to\infty} \int_{[-R,R]\cup\gamma_R} \frac{1}{(z^2+4z+5)^2}\,dz$$



$$= 2\pi i \,\mathrm{Res}\left(\frac{1}{(z^2+4z+5)^2}, -2+i\right)$$

$$= 2\pi i \cdot \left(\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{(z+2+i)^2}\right)\right)_{z=-2+i}$$

$$= 2\pi i \left(-2(z+2+i)^{-3}\right)_{z=-2+i} = 2\pi i\left(-2(2i)^{-3}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

ESERCIZIO 25.

Calcolare $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)}\,dx$.

Le singolarità sono $\pm i$ e $\pm 2i$ tutte di ordine 1

Dato che la funzione è pari si ha che

$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)}\,dx$$

$$= \pi i \left(\mathrm{Res}\left(\frac{z^2}{(z^2+1)(z^2+4)}, i\right) + \mathrm{Res}\left(\frac{z^2}{(z^2+1)(z^2+4)}, 2i\right)\right).$$

$$= \pi i \left(\frac{z^2}{(z+i)(z^2+4)} \right)_{z=i} + \pi i \left(\frac{z^2}{(z^2+1)(z+2i)} \right)_{z=2i}$$

$$= \pi \cancel{i} \cdot \frac{-1}{2\cancel{i} \cdot (-1+4)} + \pi \cancel{i} \frac{-4}{(-4+1)\cdot 4\cancel{i}} = -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}.$$

ESERCIZIO 26.

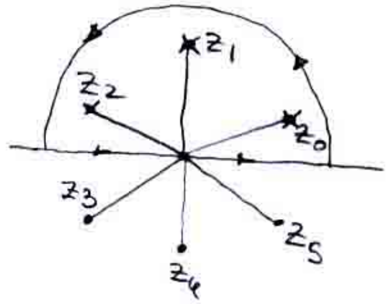
Calcolare $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^6+1}\,dx$

Le singolarità si ottengono risolvendo l'equazione $z^6 = -1 = e^{i\pi}$.

Quindi le singolarità sono tutte di ordine 1 e sono

$$z_k = e^{i\left(\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3}\right)} \quad \text{per } k = 0,1,2,3,4,5.$$

Così



$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^6+1}\,dx = 2\pi i \cdot \sum_{k=0}^{2} \mathrm{Res}\left(\frac{1}{z^6+1}, z_k \right)$$

$$= 2\pi i \sum_{k=0}^{2} \left(\frac{1}{6z^5} \right)_{z=z_k}$$

$$= 2\pi i \sum_{k=0}^{2} \left(\frac{z}{6z^6} \right)_{z=z_k}$$

$$= \frac{2\pi i}{-6} \left(e^{i\frac{\pi}{6}} + i + e^{i\frac{5\pi}{6}} \right)$$

$$= -\frac{\pi i}{3} \left(\cancel{\frac{\sqrt{3}}{2}} + \frac{i}{2} + i - \cancel{\frac{\sqrt{3}}{2}} + \frac{i}{2} \right) = \frac{2\pi}{3}.$$

ESERCIZIO 27.

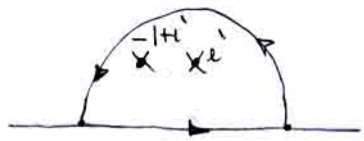
Calcolare $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{(x^2+1)^2(x^2+2x+2)}\,dx$$

Le singolarità sono

$(z^2+1)^2=0 \Rightarrow z_1=i,\ z_2=-i$ di ordine 2

$z^2+2z+2=(z+1)^2+1=0 \Rightarrow z_3=-1+i,\ z_4=-1-i$ di ordine 1.

Calcoliamo i residui in i e $-1+i$.



$$\mathrm{Res}\left(\frac{z}{(z^2+1)^2(z^2+2z+2)}, i\right)$$

$$=\left(\frac{d}{dz}\left(\frac{z}{(z+i)^2(z^2+2z+2)}\right)\right)_{z=i}$$

$$=\left(\frac{z}{(z+i)^2(z^2+2z+2)}\right)_{z=i}\cdot\left(\frac{1}{z}-\frac{2\cancel{(z+i)}}{(z+i)^{\cancel{2}}}-\frac{2z+2}{z^2+2z+2}\right)_{z=i}$$

$$=\frac{i}{-4\cdot(2i+1)}\cdot\left(\cancel{\frac{1}{i}}-\cancel{\frac{1}{i}}-\frac{2i+2}{2i+1}\right)=\frac{-1+i}{(2i+1)^2}=\frac{7}{50}+\frac{i}{50}.$$

$$\mathrm{Res}\left(\frac{z}{(z^2+1)^2(z^2+2z+2)}, -1+i\right)=\left(\frac{z}{(z^2+1)^2(z+1+i)}\right)_{z=-1+i}=$$

$$=\frac{-1+i}{(-2i+1)^2\cdot 2i}=-\frac{7}{50}+\frac{i}{50}.$$

Infine

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{(x^2+1)^2(x^2+2x+2)}\,dx=2\pi i\left(\cancel{\frac{7}{50}}+\frac{i}{50}-\cancel{\frac{7}{50}}+\frac{i}{50}\right)$$

$$=-\frac{2\pi}{25}.$$

ESERCIZIO 28.

Calcolare $\int_0^{2\pi} \cos(mx)\cos(nx)\,dx$ per $m,n \in \mathbb{Z}$.

Dato che $\cos(x)=\cos(-x)$, possiamo supporre che $m,n \geq 0$.

$$\overset{z=e^{i\theta}}{=} \int_{|z|=1} \frac{1}{2}\left(z^m+\frac{1}{z^m}\right)\cdot\frac{1}{2}\left(z^n+\frac{1}{z^n}\right)\frac{dz}{iz}$$

$$=\frac{1}{4i}\int_{|z|=1} \frac{z^{m+n}+z^{m-n}+z^{n-m}+z^{-n-m}}{z}\,dz$$

La funzione da integrare è già scritta come sviluppo di LAURENT in 0 l'unica singolarità:

$$=\frac{1}{4i}\cdot 2\pi i\cdot \mathrm{Res}\left(\frac{z^{m+n}+z^{m-n}+z^{n-m}+z^{-n-m}}{z},0\right)$$

Il residuo vale 2 se $m=n$ e 0 altrimenti.

Quindi per $m,n\in\mathbb{Z}$ abbiamo che l'integrale vale

$$=\begin{cases}\pi & \text{se } |m|=|n| \\ 0 & \text{se } |m|\neq|n|\end{cases}.$$

ESERCIZIO 29.

Calcolare $\int_0^{2\pi} \sin^4(x)\,dx$.

L'integrale è equivalente a

$$\overset{z=e^{i\theta}}{=}\int_{|z|=1}\left(\frac{z-\frac{1}{z}}{2i}\right)^4\frac{dz}{iz}=\frac{1}{16}\int_{|z|=1}\left(z^4-4z^2+6-\frac{4}{z^2}+\frac{1}{z^4}\right)\frac{dz}{iz}$$

$$=\frac{2\pi \cancel{i}}{16\cdot \cancel{i}}\cdot\mathrm{Res}(\dots,0)=\frac{2\pi\cdot 6}{16}=\frac{3}{4}\pi.$$

ESERCIZIO 30.

Calcolare $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{1+\sin^2 x}\,dx$

L'integrale è equivalente a

$$\overset{z=e^{i\theta}}{=} \int_{|z|=1} \frac{1}{1+\left(\left(z-\frac{1}{z}\right)\cdot\frac{1}{2i}\right)^2}\,\frac{dz}{iz}$$

$$= -\frac{4}{i}\int_{|z|=1} \frac{1}{-4+\left(z^2+\frac{1}{z^2}-2\right)}\,\frac{dz}{z}$$

$$= -\frac{4}{i}\int_{|z|=1} \frac{z}{z^4-6z^2+1}\,dz$$

Risolviamo $z^4-6z^2+1=0$: $z^2=3\pm\sqrt{9-1}=3\pm2\sqrt{2}$

Dato che solo $3-2\sqrt{2}$ sta in $|z|<1$ abbiamo che ci sono due singolarità di ordine 1 contenute in $|z|<1$: $\sqrt{3-2\sqrt{2}}$ e $-\sqrt{3-2\sqrt{2}}$

$$= -\frac{4}{i}\cdot 2\pi i\cdot\left(\operatorname{Res}\left(\frac{z}{z^4-6z^2+1},\sqrt{3-2\sqrt{2}}\right)+\right.$$
$$\left.+\operatorname{Res}\left(\frac{z}{z^4-6z^2+1},-\sqrt{3-2\sqrt{2}}\right)\right)$$

$$= -8\pi\cdot\left(\left(\frac{z}{4z^3-12z}\right)_{\sqrt{3-2\sqrt{2}}}+\left(\frac{z}{4z^3-12z}\right)_{-\sqrt{3-2\sqrt{2}}}\right)$$

$$= -\frac{8\pi}{4}\left(\frac{1}{\cancel{3}-2\sqrt{2}-\cancel{3}}+\frac{1}{\cancel{3}-2\sqrt{2}-\cancel{3}}\right) = \pi\sqrt{2}.$$

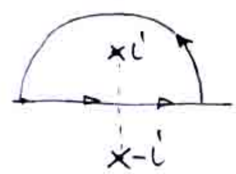
ESERCIZIO 31.

Calcolare $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{x^2+1}\,dx$ per ogni $n \in \mathbb{Z}$.

La funzione è pari e dunque

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{inx}}{x^2+1}\,dx\right)$$

$$= \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left(2\pi i\,\mathrm{Res}\left(\frac{e^{inz}}{z^2+1}, i\right)\right)$$



$z^2+1=(z+i)(z-i)$

$$= \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left(2\pi i\left(\frac{e^{inz}}{z+i}\right)_{z=i}\right)$$

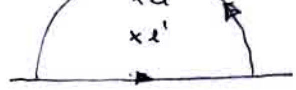
$$= \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left(\cancel{2}\pi \cancel{i}\,\frac{e^{-n}}{\cancel{2i}}\right) = \frac{\pi e^{-n}}{2}.$$

ESERCIZIO 32.

Calcolare $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{(x^2+1)(x^2+4)}\,dx$.

Le singolarità sono $\pm i$ e $\pm 2i$, tutte di ordine 1.

$$= \mathrm{Re}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{(x^2+1)(x^2+4)}\,dx$$



$$= \mathrm{Re}\left(2\pi i\left(\mathrm{Res}\left(\frac{e^{iz}}{(z^2+1)(z^2+4)}, i\right) + \mathrm{Res}\left(\frac{e^{iz}}{(z^2+1)(z^2+4)}, 2i\right)\right)\right)$$

$$= \mathrm{Re}\left(2\pi i\left(\frac{e^{iz}}{(z+i)(z^2+4)}\right)_{z=i} + 2\pi i\left(\frac{e^{iz}}{(z^2+1)(z+2i)}\right)_{z=2i}\right)$$

$$= \mathrm{Re}\left(2\pi \cancel{i}\,\frac{e^{-1}}{2\cancel{i}\cdot 3} + 2\pi \cancel{i}\,\frac{e^{-2}}{-3\cdot 4\cancel{i}}\right) = \frac{2e-1}{6e^2}\cdot\pi.$$