Analisi I, (Mir–Pet) A.A.2009–2010

Dimostrazione di alcuni risultati non presenti sul libro di testo

12/10/09

Sappiamo che $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, e $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, con $b_n \neq 0$, $b \neq 0$. Vogliamo mostrare che $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{a}{b}$.

Sappiamo che $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ n_\varepsilon : n > n_\varepsilon \implies |a_n - a| < \varepsilon$ e $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ n'_\varepsilon : n > n'_\varepsilon \implies |b_n - b| < \varepsilon$

$|b_n| = |(b_n - b) + b| \geq |b| - |b_n - b| \geq |b_n|/2$, se $|b_n - b| \leq |b|/2$. Ciò è possibile se prendiamo $\varepsilon < |b|/2$. Si noti come essenziale sia avere $b \neq 0$. Possiamo quindi scrivere

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b}\right| = \left|\frac{a_n b - b_n a}{b b_n}\right| = \left|\frac{(a_n - a)b + a(b - b_n)}{b b_n}\right| \leq \frac{\varepsilon|b| + \varepsilon|a|}{|b|\frac{|b|}{2}} = 2\frac{|a| + |b|}{b^2}\varepsilon$$

16/11/09

Teorema 1. Derivata di una funzione composta *Siano $f\colon [c,d] \to \mathbf{R}$ e $g\colon [a,b] \to [c,d]$ funzioni derivabili. Allora la funzione $(f \circ g)(x)$ è derivabile anch'essa e $(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$*

Dimostrazione Usiamo la definizione di derivabilità $h(z) = h(z_0) + h'(z_0)(z - z_0) + o(z - z_0)$. Scriviamo

$$\begin{aligned}
&f(g(x_0 + h)) - f(g(x_0)) = f(g(x_0) + g'(x_0)h + o(h)) - f(g(x_0)) = \\
&f(g(x_0)) + f'(g(x_0))(g'(x_0)h + o(h)) + o(g'(x_0)h + o(h)) - f(g(x_0)) = \\
&f'(g(x_0))g'(x_0)h + f'(g(x_0))o(h)) + o(g'(x_0)h + o(h))
\end{aligned}$$

Poi dividiamo tutto per h ed otteniamo

$$\frac{f(g(x_0 + h)) - f(g(x_0))}{h} = f'(g(x_0))g'(x_0) + \frac{f'(g(x_0))o(h)) + o(g'(x_0)h + o(h))}{h}$$

Ora se $g'(x_0) \neq 0$ abbiamo $o(g'(x_0)h + o(h)) = o(g'(x_0)h) = o(h)$. Infatti possiamo scrivere

$$\frac{o(g'(x_0)h + o(h))}{h} = \frac{o(g'(x_0)h + o(h))}{g'(x_0)h + o(h)} \frac{(g'(x_0)h + o(h))}{h}$$

Il primo termine tende a zero per definizione di $o(\cdot)$ ed il secondo tende a $g'(x_0)$.

Se invece $g'(x_0) = 0$ abbiamo $o(o(h)) = o(h)$ e questo sta sul libro. Il risultato è

$$\lim_{h\to 0} \frac{f'(g(x_0))o(h)) + o(g'(x_0)h + o(h))}{h} = 0$$

ossia

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(g(x_0 + h)) - f(g(x_0))}{h} = f'(g(x_0))g'(x_0)$$

Teorema 2. Relazione tra limite della derivata e limite del rapporto incrementale. *Sia* $f\colon(a,b)\to\mathbf{R}$ *derivabile e tale che esiste* $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x)=l\in\mathbf{R}\cup\{+\infty\}\cup\{-\infty\}$. *Allora* $\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h}\big(f(x_0+h)-f(x_0)\big)=l$

Osservazione Il significato del teorema è : se sappiamo che f è derivabile e possiamo calcolare $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x)=l$, allora l è il valore della la derivata di f in x_0.

Osservazione Se in un punto la funzione ammette solo derivata destra o sinistra le affermazioni valgono ugualmente ovviamente restringendosi ai limiti destro oppure sinistro. Ad esempio se la funzione è definita in $[a,b]$ ed è derivabile, allora se esiste $\lim\limits_{x\to a^+} f'(x)=l^+$, tale limite è la derivata in $x=a$.

Dimostrazione Chiaramente se $x_0=a$ si intende solo la derivata destra e sinistra se $x_0=b$. Dal teorema di Lagrange abbiamo

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\big(f(x_0+h)-f(x_0)\big)=f'(c_h),\qquad x_0+\frac{h-|h|}{2}<c_h<x_0+\frac{h+|h|}{2}$$

Dal teorema del confronto, se $h\to 0$ abbiamo $c_h\to 0$ e quindi $f'(c_h)\to f'(x_0)$ mentre a destra abbiamo esattamente la derivata da cui il risultato.$\blacksquare$

Dal Teorema appena dimostrato segue che una funzione avente discontinuità di salto oppure eliminabile non può essere la derivata di alcuna funzione. Vediamo perché.

Supponiamo di avere una funzione $h(x)$ con una discontinuità di salto in un punto x_0 e quindi esistono i limiti $\lim\limits_{x\to x_0} h(x)=l^\pm$ con $l^+\neq l^-$. Supponiamo ora che tale funzione sia la derivata di una funzione $H(x)$ ossia $H'(x)=h(x)$ con $x\in[x_0-\delta,x_0+\delta]$ per un qualche $\delta>0$. Possiamo dire che

1) esistono i limiti $\lim\limits_{x\to x_0} H'(x)=l^\pm$ per ipotesi in quanto $H'(x)\equiv h(x)$

2) Dal teorema appena dimostrato segue che $\lim\limits_{x\to x_0} H'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h}\big(H(x_0+h)-H(x_0)\big)$

Essendo però $H(x)$ derivabile, deve essere $\lim\limits_{h\to 0^+}\frac{1}{h}\big(H(x_0+h)-H(x_0)\big)=\lim\limits_{h\to 0^-}\frac{1}{h}\big(H(x_0+h)-H(x_0)\big)$ ossia $l^+=l^-$ ma questo è escluso per ipotesi. Dalla contraddizione se ne esce dicendo che non esiste $H(x)$ con le caratteristiche volute.

Supponiamo ora che una funzione avente *discontinuità eliminabile* sia la derivata prima di una funzione. Assumiamo quindi che $\lim\limits_{x\to x_0^+} h(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-} h(x)=l$ ma $h(x_0)\neq l$ e che esista una funzione $H(x)$ tale che $H'(x)\equiv h(x)$ in un certo intorno di x_0. Stavolta abbiamo $l^+=\lim\limits_{h\to 0^+}\frac{1}{h}\big(H(x_0+h)-H(x_0)\big)$ e $\lim_{h\to 0^-}\frac{1}{h}\big(H(x_0+h)-H(x_0)\big)=l^-$ grazie al teorema ed $l^+=l^-$ per ipotesi di discontinuità eliminabile. Ma $\lim\limits_{h\to 0^+}\frac{1}{h}\big(H(x_0+h)-H(x_0)\big)=H'(x_0)=h(x_0)\neq l^+$ da cui la contraddizione.

Invece una funzione avente una discontinuità di seconda specie può benissimo essere la derivata di una funzione. Ad esempio la funzione $h(x)=2x\sin 1/x-\cos 1/x$ per $x\neq 0$ e $h(0)=0$ (che ha una discontinuità di seconda specie nell'origine) è la derivata della funzione $H(x)=x^2\sin 1/x$ per $x\neq 0$ e $H(0)=0$. Il teorema in questo caso non dice nulla in quanto manca l'ipotesi fondamentale secondo cui esiste $\lim\limits_{x\to x_0} h(x)$ (h corrisponde a f' nel teorema 2).

18/11/2009

Teorema 3. *Sia* $f\colon [a,b] \to \mathbf{R}$ *derivabile* n *volte. Allora* $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k$ *è l'unico polinomio per cui* $f(x) - P_n(x) = o((x-x_0)^n)$

Dimostrazione Dimostriamo solo l'unicità in quanto per l'esistenza, ossia il fatto che $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-P_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0$, va bene quella del libro di testo. Prima enunciamo un argomento teso a far capire come mai $P_n(x)$ è unico. Per quanto riguarda l'unicità , supponiamo che esista un polinomio $T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k(x-x_0)^k$, diverso da $P_n(x)$, tale che $f(x) - T_n(x) = o((x-x_0)^n)$. Dire che $T_n(x) \neq P_n(x)$ equivale a dire che almeno uno dei coefficienti c_k è diverso dal corrispondente coefficiente $f^{(k)}(x_0)/k!$. Osserviamo

$P_n(x) - T_n(x) = (P_n(x) - f(x)) + (f(x) - T_n(x)) = o((x-x_0)^n) + o((x-x_0)^n) = o((x-x_0)^n)$

Ne segue che in particolare che $P_n(x) - T_n(x) = o(1)$ e quindi $P_n(x) - T_n(x)$ tende a zero. Ma

$$P_n(x) - T_n(x) = f(x_0) - c_0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k - \sum_{k=1}^{n} c_k(x-x_0)^k$$

ed osserviamo che $\lim_{x\to x_0} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k - \sum_{k=1}^{n} c_k(x-x_0)^k \right) = 0$. Se vogliamo quindi che $P_n(x) - T_n(x) = o(1)$, siamo costretti ad porre $c_0 = f(x_0)$. Quindi $T_n(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} c_k(x-x_0)^k$. Se $n = 0$ la dimostrazione è finita. Sia ora $n > 1$. Siccome $P_n(x) - T_n(x) = o((x-x_0))$, ciò si vede scrivendo $P_n(x) - T_n(x) = \frac{o((x-x_0)^n)}{(x-x_0)}(x-x_0) = \frac{o((x-x_0)^n)}{(x-x_0)^n}(x-x_0)^n$ allora segue che $\lim_{x\to x_0} \frac{P_n(x) - T_n(x)}{x - x_0} = 0$ da cui

$$\frac{P_n(x) - T_n(x)}{x - x_0} = (f'(x_0) - c_1) + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^{k-1} - \sum_{k=2}^{n} c_k(x-x_0)^{k-1}$$

Se vogliamo che il limite sia zero dobbia o porre $c_1 = f'(x_0)$. Quindi $T_n(x)$ diventa $f(x_0) + f'(x_0) + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k$. Possiamo andare avanti sulla stessa falsariga fino ad un n qualsiasi.

La dimostrazione passa attraverso l'induzione. Supponiamo che per $0 \le n \le n_0 - 1$, $P_n(x)$ è l'unico polinomio che verifica $f(x) - P_n(x) = o((x-x_0)^n)$. Vogliamo far vedere che $P_{n_0}(x)$ è l'unico polinomio che verifica $f(x) - P_{n_0}(x) = o((x-x_0)^{n_0})$. Per $n_0 = 1$, sappiamo che $P_0(x)$ è l'unico e l'argomento è già stato dato. Supponiamo che $P_{n_0}(x)$ non sia unico. Per ipotesi abbiamo l'unicità per ogni $0 \le n \le n_0 - 1$. Un polinomio diverso da $P_{n_0}(x)$ è dato da $T_n(x_0) = \sum_{k=0}^{n_0-1} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k + c_{n_0}(x-x_0)^{n_0}$ e $c_{n_0} \neq \frac{1}{k!} f^{(n_0)}(x_0)$. Essendo $P_{n_0}(x) - T_{n_0}(x) = o((x-x_0)^{n_0})$ abbiamo che

$$\lim_{x\to x_0} \frac{P_{n_0}(x) - T_{n_0}(x)}{(x-x_0)^n} = \frac{1}{n_0} f^{(n_0)}(x_0) - c_{n_0} = 0$$

e questo è possibile solo se $\frac{1}{n_0} f^{(n_0)}(x_0) = c_{n_0}$. ∎

03/12/2009

Proposizione: additività dell'integrale rispetto all'intervallo

Sia $f \in \mathcal{R}([a,b])$. *Detto* $c \in [a,b]$ *si ha* $f \in \mathcal{R}([a,c])$ *e* $f \in \mathcal{R}([c,b])$ *ed inoltre* $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$. *Viceversa se abbiamo* $f \in \mathcal{R}([a,c])$ *e* $f \in \mathcal{R}([c,b])$ *allora* $f \in \mathcal{R}([a,b])$ *e vale la stessa relazione fra gli integrali.*

Dimostrazione. Cominciamo supponendo che $f \in \mathcal{R}([a,c])$ e $f \in \mathcal{R}([c,b])$. Sappiamo quindi che

$$\forall\ \varepsilon\ \exists\ P_\varepsilon^{(1)} : S(P_\varepsilon^{(1)}) - s(P_\varepsilon^{(1)}) < \varepsilon, \qquad \forall\ \varepsilon\ \exists\ P_\varepsilon^{(2)} : S(P_\varepsilon^{(2)}) - s(P_\varepsilon^{(2)}) < \varepsilon$$

Prendiamo la partizione $P_\varepsilon = P_\varepsilon^{(1)} \cup P_\varepsilon^{(2)}$ di $[a,b]$. Abbiamo $s(P_\varepsilon) = s(P_\varepsilon^{(1)}) + s(P_\varepsilon^{(2)})$ e $S(P_\varepsilon) = S(P_\varepsilon^{(1)}) + S(P_\varepsilon^{(2)})$ e

$$0 < S(P_\varepsilon) - s(P_\varepsilon) = S(P_\varepsilon^{(1)}) - s(P_\varepsilon^{(1)}) + S(P_\varepsilon^{(2)}) - s(P_\varepsilon^{(2)}) < 2\varepsilon$$

da cui deduciamo che $f \in \mathcal{R}([a,b])$. Ora dimostriamo $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

$$s(P_\varepsilon) - S(P_\varepsilon^{(1)}) - S(P_\varepsilon^{(2)}) \le \int_a^b f(x)dx - \int_a^c f(x)dx - \int_c^b f(x)dx \le S(P_\varepsilon) - s(P_\varepsilon^{(1)}) - s(P_\varepsilon^{(2)})$$

D'altra parte

$$s(P_\varepsilon) - S(P_\varepsilon^{(1)}) - S(P_\varepsilon^{(2)}) = s(P_\varepsilon) - S(P_\varepsilon) \qquad \text{e} \qquad S(P_\varepsilon) - s(P_\varepsilon^{(1)}) - s(P_\varepsilon^{(2)}) = S(P_\varepsilon) - s(P_\varepsilon)$$

da cui

$$-\varepsilon < s(P_\varepsilon) - S(P_\varepsilon) \le \int_a^b f(x)dx - \int_a^c f(x)dx - \int_c^b f(x)dx \le S(P_\varepsilon) - s(P_\varepsilon) < \varepsilon$$

e quindi

$$\left| \int_a^b f(x)dx - \int_a^c f(x)dx - \int_c^b f(x)dx \right| \le \varepsilon$$

Supponiamo ora che $f \in \mathcal{R}([a,b])$ ossia $S(P_\varepsilon) - s(P_\varepsilon) < \varepsilon$ per una opportuna partizione P_ε avente n_ε punti. Dobbiamo dimostrare che $f \in \mathcal{R}([a,c])$ e $f \in \mathcal{R}([c,b])$ dove $c \in [a,b]$.

Dobbiamo distinguere due casi. Il primo è quello per cui c è un punto della partizione ossia $c = x_r$ con $0 < r < n_\varepsilon$. Se $c = x_0 = a$ oppure $c = x_{n_\varepsilon} = b$ non c'è nulla da dimostrare. In tal caso possiamo scrivere $P_\varepsilon = P_\varepsilon^{(1)} \cup P_\varepsilon^{(2)}$ dove $P_\varepsilon^{(1)}$ è una partizione dell'intervallo $[a,c]$ e $P_\varepsilon^{(2)}$ dell'intervallo $[c,b]$. Abbiamo

$$\begin{aligned} 0 < S(P_\varepsilon) - s(P_\varepsilon) &= S(P_\varepsilon^{(1)}) + S(P_\varepsilon^{(2)}) - s(P_\varepsilon^{(1)}) - s(P_\varepsilon^{(2)}) = \\ &= S(P_\varepsilon^{(1)}) - s(P_\varepsilon^{(1)}) + S(P_\varepsilon^{(2)}) - s(P_\varepsilon^{(2)}) < \varepsilon \end{aligned}$$

e quindi

$$0 < S(P_\varepsilon^{(1)}) - s(P_\varepsilon^{(1)}) < \varepsilon, \qquad 0 < S(P_\varepsilon^{(2)}) - s(P_\varepsilon^{(2)}) < \varepsilon$$

ossia il risultato.

Il secondo caso è quello in cui c non è un elemento della partizione P_ε. In tal caso consideriamo la partizione $P_\varepsilon \cup \{c\} \doteq \hat{P}_\varepsilon$ e definiamo $\hat{P}_\varepsilon^{(1)}$, $\hat{P}_\varepsilon^{(2)}$, le due partizioni degli intervalli $[a,c]$, e $[c,d]$ ottenute considerando i punti della partizione $\hat{P}_\varepsilon$ che cadono rispettivamente in $[a,c]$ e $[c,d]$. Come prima abbiamo

$$0 < S(\hat{P}_\varepsilon) - s(\hat{P}_\varepsilon) = S(\hat{P}_\varepsilon^{(1)}) - s(\hat{P}_\varepsilon^{(1)}) + S(\hat{P}_\varepsilon^{(2)}) - s(\hat{P}_\varepsilon^{(2)}) \le S(P_\varepsilon) - s(P_\varepsilon) < \varepsilon$$

in quanto $\hat{P}_\varepsilon$ è più fine di P_ε. Ne segue che

$$0 < S(\hat{P}_\varepsilon^{(1)}) - s(\hat{P}_\varepsilon^{(1)}) < \varepsilon \qquad 0 < S(\hat{P}_\varepsilon^{(2)}) - s(\hat{P}_\varepsilon^{(2)}) < \varepsilon$$

ossia $f \in \mathcal{R}([a,c])$ e $f \in \mathcal{R}([c,b])$. *Fine della dimostrazione*

Qualora ve ne fossero, il seguente esempio serve a fugare i dubbi circa la necessità di considerare partizioni più fini. Sia data la funzione $f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x < 3, \\ \lambda, & 3 \le x \le 6 \end{cases}$ e si considerino le due partizioni $P_1 = \{0, 1, 3, 4, 5, 6\}$ e $P_2 = \{0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3, , 5, 6\}$. P_2 ha più punti di P_1 ma $s(P_1) = \lambda(6-4)$ e $s(P_2) = \lambda(6-5)$

07/12/2009

Dimostriamo il risultato seguente.

Proposizione *Sia $f \in \mathcal{R}([a,b])$ e sia $g(x)$ la funzione* $g(x) = \begin{cases} f(x) & x \ne \overline{x} \in [a,b] \\ y_0 & x = \overline{x}, \end{cases}$, $y_0 \ne f(\overline{x})$. *Allora pure $g \in \mathcal{R}([a,b])$ e* $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx$

Dimostrazione Per ipotesi sappiamo che esiste una partizione $P_\varepsilon = \{x_0 = a, x_1, x_2, \ldots, x_n = b\}$ tale che $S(P_\varepsilon, f) - s(P_\varepsilon, f) < \varepsilon$. Sia ora $\overline{x} \in P_\varepsilon$ ad esempio $\overline{x} = x_k$. Consideriamo la partizione più fine $P'_\varepsilon = \{x_0 = a, x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, \overline{x} - \delta, \overline{x}, \overline{x} + \delta, x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n = b\}$ (δ è arbitrario) e confrontiamo $s(P'_\varepsilon, f)$ con $s(P'_\varepsilon, g)$. $s(P'_\varepsilon, g) = \displaystyle\sum_{j=1}^{k-1} m_j(x_j - x_{j-1}) + \big(\inf_{x \in [x_{k-1}, \overline{x} - \delta]} f(x)\big)(\overline{x} - \delta - x_{k-1}) + \big(\inf_{x \in [\overline{x} - \delta, \overline{x}]} g(x)\big)\delta + \big(\inf_{x \in [\overline{x}, \overline{x} + \delta]} g(x)\big)\delta + \big(\inf_{x \in [\overline{x} + \delta, x_{k+1},]} f(x)\big)(\overline{x} + \delta - x_{k+1}) + \sum_{j=k+1}^{n} m_j(x_j - x_{j-1})$

Per come è definita, si ha $s(P'_\varepsilon, f) = \displaystyle\sum_{j=1}^{k-1} m_j(x_j - x_{j-1}) + \big(\inf_{x \in [x_{k-1}, \overline{x} - \delta]} f(x)\big)(\overline{x} - \delta - x_{k-1}) + \big(\inf_{x \in [\overline{x} - \delta, \overline{x}]} f(x)\big)\delta + \big(\inf_{x \in [\overline{x}, \overline{x} + \delta]} f(x)\big)\delta + \big(\inf_{x \in [\overline{x} + \delta, x_{k+1}]} f(x)\big)(\overline{x} + \delta - x_{k+1}) + \sum_{j=k+1}^{n} m_j(x_j - x_{j-1})$

e quindi la loro differenza è

$$s(P'_\varepsilon, g) - s(P'_\varepsilon, f) = \big(\inf_{x \in [\overline{x} - \delta, \overline{x}]} g(x)\big)\delta + \big(\inf_{x \in [\overline{x}, \overline{x} + \delta]} g(x)\big)\delta - \big(\inf_{x \in [\overline{x} - \delta, \overline{x}]} f(x)\big)\delta - \big(\inf_{x \in [\overline{x}, \overline{x} + \delta]} f(x)\big)\delta$$

Per ipotesi di integrabilità sappiamo che $-M \le f(x) \le M$ e quindi $-|y_0| - M \le g(x) \le M + |y_0|$ da cui

$$|s(P'_\varepsilon, g) - s(P'_\varepsilon, f)| \le (2M + 2(M + |y_0|))\delta$$

La stessa cosa accade per le somme superiori e quindi possiamo scrivere

$S(P'_\varepsilon,g)-s(P'_\varepsilon,g) = \big(S(P'_\varepsilon,g)-S(P'_\varepsilon,f)\big)-\big(s(P'_\varepsilon,g)-s(P'_\varepsilon,f)\big)+\big(S(P'_\varepsilon,f)-S(P'_\varepsilon,f)\big) < \varepsilon+4(2M+|y_0|)\delta<2\varepsilon$ non appena $\delta<\varepsilon/(4(2M+|y_0|))$ e ricordo che δ è arbitrario.

Facciamo ora vedere che $\displaystyle\int_a^b f(x)dx=\int_a^b g(x)dx$.

$s(P'_\varepsilon,f)-S(P'_\varepsilon,g) < \displaystyle\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx < S(P'_\varepsilon,f)-s(P'_\varepsilon,g)$ per definizione di somme superiori e inferiori. Quindi otteniamo

$-2\varepsilon-\varepsilon < (s(P'_\varepsilon,f)-s(P'_\varepsilon,g))+(s(P'_\varepsilon,g)-S(P'_\varepsilon,g)) = s(P'_\varepsilon,f)-S(P'_\varepsilon,g) < \displaystyle\int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx < S(P'_\varepsilon,f)-s(P'_\varepsilon,g) = (S(P'_\varepsilon,f)-S(P'_\varepsilon,g))+(S(P'_\varepsilon,g)-s(P'_\varepsilon,g)) < 2\varepsilon+\varepsilon$

Fine della dimostrazione

Proposizione Sia $f\colon[a,b]\to\mathbf{R}$ monotona. Allora f è integrabile.

Dimostrazione Prendiamo una partizione equispaziata in cui il singolo intervallo è $(b-a)/n$. La differenza fra somme superiori e inferiori è $\displaystyle\sum_{k=1}^n (M_k-m_k)(x_k-x_{k-1}) = \sum_{k=1}^n (M_k-m_k)\frac{b-a}{n} = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^n (M_k-m_k) = \frac{b-a}{n}(f(b)-f(a)) < \varepsilon$ se $n>\dfrac{1}{\varepsilon}(b-a)(f(b)-f(a)$ e la dimsotrazione è conclusa. Nel passaggio $\displaystyle\sum_{k=1}^n (M_k-m_k)=f(b)-f(a)$ abbiamo usato la monotonia che abbiamo supposto crescente.

14/12/2009

Si è enunciata la proposizione senza dimostrazione:

Siano $P(x)$ e $Q(x)$ due polinomi tali che il grado di P (n) è minore del grado di Q (m). Il rapporto $P(x)/Q(x)$ è scrivibile come

$$\Big(\frac{A_{11}}{x-a_1}+\ldots+\frac{A_{1n_1}}{(x-a_1)^{n_1}}\Big)+\Big(\frac{A_{21}}{x-a_2}+\ldots+\frac{A_{2n_2}}{(x-a_2)^{n_2}}\Big)+\ldots+\Big(\frac{A_{l1}}{x-a_l}+\ldots+\frac{A_{ln_l}}{(x-a_l)^{n_l}}\Big)$$
$$+\Big(\frac{C_{11}x+D_{11}}{x^2+c_1x+d_1}+\ldots+\frac{C_{1m_1}x+D_{1m_1}}{(x^2+c_1x+d_1)^{m_1}}\Big)+\Big(\frac{C_{21}x+D_{21}}{x^2+c_2x+d_2}+\ldots+\frac{C_{2m_2}x+D_{2m_2}}{(x^2+c_2x+d_2)^{m_2}}\Big)$$
$$+\ldots+\Big(\frac{C_{k1}x+D_{k1}}{x^2+c_kx+d_k}+\ldots+\frac{C_{km_k}x+D_{km_k}}{(x^2+c_kx+d_k)^{m_k}}\Big)$$

e $\displaystyle\sum_{j=1}^l n_j+\sum_{r=1}^k 2m_r$ è pari al grado di $Q(x)$.

21/12/2009

Teorema del confronto per integrali impropri. *Sia $f\colon[a,b)\to\mathbf{R}$ tale che $f\in\mathcal{R}([a,a'])$ per ogni $a<a'<b$ (b può essere $+\infty$). Sia inoltre $g\colon[a,b)\to\mathbf{R}$ integrabile in senso improprio e supponiamo che $0\le f(x)\le g(x)$ per ogni $x\in[a,b)$. Allora anche $f(x)$ è integrabile in senso improprio. Se invece $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ diverge, allora diverge pure $\displaystyle\int_a^b g(x)dx$*

Dimostrazione Sia $a\le\xi\le b$. Abbiamo $F(\xi)=\displaystyle\int_a^\xi f(x)dx\le\int_a^\xi g(x)dx\le\int_a^b g(x)dx=I<$

$+\infty$ (lo studente giustifichi ogni $\leq$). Ne segue che la funzione $F(\xi)$ è limitata. Essendo anche crescente, ammette limite $\xi \to b^-$ ossia esiste l'integrale improprio $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$. Allo stesso modo se $\displaystyle\lim_{\xi\to b^-} F(\xi) = +\infty$, allora anche $\displaystyle\lim_{\xi\to b^-} \int_a^\xi g(x)dx = +\infty$ *Fine della dimostrazione*

Domanda 1 Dove si usa il fatto che $f \in \mathcal{R}([a, a'])$ per ogni $a < a' < b$?

Criteri sufficienti per gli integrali impropri

Corollario del teorema del confronto *Sia* $f\colon [a, +\infty) \to \mathbf{R}$ *infinitesima,* $f(x) \geq 0$, $f \in \mathcal{R}([a, a'])$ *per ogni* $a' > a$, *allora si ha*

1) Se $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^\alpha f(x) = l \neq +\infty$ *per un qualsiasi* $\alpha > 1$, $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *converge*

2) Se $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^\alpha f(x) = l \neq 0$ *(e quindi* $l > 0$*) per un qualsiasi* $\alpha \leq 1$, $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *non converge*

Sia $f\colon [a, b) \to \mathbf{R}$ *infinita,* $f \in \mathcal{R}([a, a'])$ *per ogni* $a' < b$, *allora si ha*

3) Se $\displaystyle\lim_{x\to b^-} (x-b)^\alpha f(x) = l \neq +\infty$ *per un qualsiasi* $\alpha < 1$, $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ *converge*

4) Se $\displaystyle\lim_{x\to b^-} (x-b)^\alpha f(x) = l \neq 0$ *(e quindi* $l > 0$*) per un qualsiasi* $\alpha \geq 1$, $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ *non converge*

Dimostrazione

1) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^\alpha f(x) = l \neq +\infty$ implica che $f(x) \leq l/x^\alpha$ per $x \geq x_0$. Spezzando $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)dx = \int_a^{x_0} f(x)dx + \int_{x_0}^{+\infty} f(x)dx$ osserviamo che il primo è un normale integrale di Riemann e per il secondo applichiamo il Teorema del confronto essendo $0 \leq f(x) \leq l/x^\alpha$ e $\alpha > 1$.

2) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^\alpha f(x) = l \neq 0$ implica che $l - \varepsilon < x^\alpha f(x) < l + \varepsilon$ definitivamente in x da cui, essendo $l > 0$, $f(x) > (l-\varepsilon)/x^\alpha$ e $l - \varepsilon > 0$ potendo prendere ε piccolo a piacere. Quindi dalla seconda parte del Teorema del confronto, essendo $\alpha \leq 1$, l'integrale diverge.

3) $\displaystyle\lim_{x\to b^-} (x-b)^\alpha f(x) = l \neq +\infty$ implica che $f(x) \leq l/(x-b)^\alpha$ per $b - \delta < x < b$. Spezzando $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)dx = \int_a^{b-\delta} f(x)dx + \int_{b-\delta}^b f(x)dx$, osserviamo che il primo è un normale integrale di Riemann e per il secondo applichiamo il Teorema del confronto essendo $0 \leq f(x) \leq l/(x-b)^\alpha$ e $\alpha < 1$.

4) $\displaystyle\lim_{x\to b^-} (x-b)^\alpha f(x) = l \neq 0$ implica che $l - \varepsilon < x^\alpha f(x) < l + \varepsilon$ definitivamente in x per $x \to b^-$ da cui, essendo $l > 0$, $f(x) > (l-\varepsilon)/(x-b)^\alpha$ e $l - \varepsilon > 0$ potendo prendere ε piccolo a piacere. Quindi dalla seconda parte del Teorema del confronto, essendo $\alpha \geq 1$, l'integrale diverge. *Fine della dimostrazione*

I criteri appena enunciati sono sufficienti ma non necessari. Si verifichi infatti che $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x\ln^2 x}$ converge ma 1) non si applica.

• La convergenza si può dimostrare in due modi diversi.
Primo modo. Esiste la primitiva della funzione integranda ossia $F(x) = -(\ln x)^{-1} + c$ e quindi l'integrale è $\displaystyle\lim_{y\to+\infty} F(y) - F(2) = 1/(\ln 2)$

Secondo modo. Sostituiamo $x = e^t$ nell'integrale $\int_2^A f(x)dx$ ottenendo $\int_{\ln 2}^{\ln A} t^{-2}dt = \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln A}$ e nel limite otteniamo $1/\ln 2$.

Il secondo modo va tenuto presente anche perché se si dovesse calcolare $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x\ln^2(1+x)}$, la primitiva non sarebbe disponibile e la convergenza non può essere dedotta da 1). Infatti abbiamo $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{x(\ln(1+x))^2} = +\infty$ per qualsiasi $\alpha > 1$.

La sostituzione precedente condurrebbe a $\int_{\ln 2}^{\ln A} \frac{dt}{\ln^2(1+e^t)} = \int_{\ln 2}^{\ln A} \frac{t^2}{\ln^2(1+e^t)} \frac{dt}{t^2}$ e certamente $\frac{t^2}{\ln^2(1+e^t)} \frac{1}{t^2} \geq \frac{t^2}{2}$ definitivamente per $t \to +\infty$ da cui la divergenza dell'integrale in questione.

• Facciamo vedere ora che $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x\ln x}$ diverge ma 2) non si applica. Anche qui abbiamo la primitiva (privilegio assai raro) $F(x) = \ln(\ln x)$ e quindi $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x\ln x} = \lim_{A\to+\infty} F(A) - \ln(\ln 2) = +\infty$.

La sostituzione di prima porta a $\int_{\ln 2}^{\ln A} \frac{dt}{t} = \ln(\ln A) - \ln(\ln 2) \xrightarrow[A\to+\infty]{} +\infty$

la 2) non si applica. Infatti abbiamo $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{x\ln x} = 0$ per ogni $\alpha \leq 1$.

Se avessimo $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x\ln(1+x)}$, sostituendo avremmo $\int_{\ln 2}^{\ln A} \frac{dt}{\ln(1+e^t)}$. Scriviamo $\frac{1}{\ln(1+e^t)} = \frac{t}{\ln(1+e^t)} \frac{1}{t} \geq \frac{1}{2t}$ definitivamente in t e quindi l'integrale diverge.

• Si verifichi che $\int_0^{1/2} \frac{dx}{x(\ln x)^2}$ converge ma 3) non si applica.

Primo modo. La stessa primitiva di prima ci dà $\lim_{\varepsilon\to0^+} (\ln\varepsilon)^{-1} + \ln 2 = \ln 2$

Secondo modo. Sostituendo $y = 1/x$ otteniamo $\lim_{\varepsilon\to0^+} \int_2^{1/\varepsilon} \frac{dy}{y(\ln y)^2}$ ossia lo stesso integrale improprio di prima.

Terzo modo. Sostituiamo $x = e^t$ e quindi $\lim_{\varepsilon\to0^+} \int_{\ln\varepsilon}^{-\ln 2} \frac{dt}{t^2} = \lim_{\varepsilon\to0^+} (\frac{1}{\ln\varepsilon} + \frac{1}{\ln 2}) = 1/\ln 2$

Verifichiamo ora che 3) non si applica in quando dovremmo avere $\lim_{x\to0^+} \frac{x^a}{x(\ln x)^2} = l(\neq +\infty)$ per un certo $\alpha < 1$ ma questo è impossibile.

• Si verifichi che $\int_0^{1/2} \frac{dx}{x\ln x}$ diverge ma 4) non si applica. Lascio questa parte agli studenti diligenti.

• Studiamo la convergenza dell'integrale improprio $\int_0^{1/2} \frac{dx}{x|\ln(x+\sqrt{x})|^a}$ al variare di a.

Sia $a > 0$. Cambiamo variable $t = \ln x$ ed otteniamo $\int_{-\infty}^{-\ln 2} \frac{dt}{|\ln(e^t + e^{t/2})|^a}$. Abbiamo $\ln(e^t +$

$e^{t/2}) = \ln e^{t/2} + \ln(1+e^{t/2}) = \frac{t}{2} + \ln(1+e^{t/2})$ per cui $|\frac{t}{2} + \ln(1+e^{t/2})| \geq \frac{|t|}{2} - |\ln(1+e^{t/2})| \geq \frac{|t|}{4}$ definitivamente per $t \to -\infty$ ossia per $t < t_0 < -\ln 2$ con un certo t_0. Si noti che $\ln(1+e^{t/2})$ tende a zero per $t \to -\infty$. Ne segue $\displaystyle\int_{-\infty}^{t_0} \frac{dt}{|\ln(e^t + e^{t/2})|^a} \leq \int_{-\infty}^{t_0} \frac{dt}{(|t|/4)^a}$ che converge se $a > 1$.

Se invece $0 < a \leq 1$ allora stimiamo $|\frac{t}{2} + \ln(1+e^{t/2})| \leq \frac{|t|}{2} + |\ln(1+e^{t/2})| \geq |t|$ definitivamente per $t \to -\infty$ ossia per $t < t_1 < -\ln 2$ con un certo t_1. Ne segue $\displaystyle\int_{-\infty}^{t_1} \frac{dt}{|\ln(e^t + e^{t/2})|^a} \geq \int_{-\infty}^{t_1} \frac{dt}{|t|^a}$ che diverge se $a \leq 1$.

Il criterio sufficiente 3) non si applica alla funzione $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{dx}{x|\ln(x+\sqrt{x})|^a}$ in quanto

$\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{x^\alpha}{x|\ln(x+\sqrt{x})|^a} = +\infty$ per qualsiasi valore di a se $\alpha < 1$.

Se $a = 0$ la funzione vale 1 e quindi l'integrale diverge.

Se $a < 0$ la funzione diverge a $+\infty$ e quindi l'integrale improprio diverge.

11/01/2010

Teorema sulla convergenza di integrali impropri di funzioni non aventi segno definito. *Sia $I \subseteq \mathbf{R}$ un intervallo e sia $f\colon I \to \mathbf{R}$ una funzione integrabile secondo Riemann in ogni intervallo chiuso e limitato $J \subset I$. Se $|f|$ è integrabile in senso improprio su I anche f lo è ed inoltre* $\displaystyle\Big|\int_I f(x)dx\Big| \leq \int_I |f(x)|dx$

Dimostrazione Sia $f_+ \doteq \frac{1}{2}(f+|f|)$, $f_- = \frac{1}{2}(f-|f|)$ per cui $f = f_+ + f_-$. Evidentemente si ha $f_+ \geq 0$ e $f_- \leq 0$. Dimostriamo che tanto f_+ che f_- sono integrabili in senso improprio e quindi f è integrabile in senso improprio. Per quanto riguarda f_+ osserviamo che $0 \leq f_+ \leq \frac{1}{2}(|f|+|f|) = |f|$ ed essendo $|f|$ integrabile in senso improprio per ipotesi, per il teorema del **21/12/2009**, concludiamo che f_+ è integrabile in senso improprio. Per quanto riguarda f_- osserviamo che $-|f| \leq f_- \leq 0$ e quindi ne segue la stessa conclusione. Inoltre abbiamo

$$\Big|\int_I f(x)dx\Big| = \Big|\int_I (f_+(x)+f_-(x))dx\Big| \leq \Big|\int_I f_+(x)dx\Big| + \Big|\int_I f_-(x)dx\Big| = \int_I f_+(x)dx + \Big|\int_I f_-(x)dx\Big| \leq$$
$$\leq \int_I f_+(x)dx + \int_I |f_-(x)|dx = \int_I \Big(\frac{1}{2}(f+|f|) + \frac{1}{2}(|f|-f)\Big)dx = \int_I |f(x)|dx$$

Osservazioni l'estremo sinistro di I può essere $-\infty$ e l'estremo destro $+\infty$.

- Dimostrazione che $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin x^\gamma dx$, $\gamma > 1$ converge
- Dimostrazione che $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$, converge

13/01/2010

Dimostrazione che $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ diverge. Scriviamo

$$S_{2^n}=1+\frac{1}{2}+\underbrace{\Big(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\Big)}_{\geq 2/4}+\underbrace{\Big(\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{8}\Big)}_{\geq 4/8}+\underbrace{\Big(\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{16}\Big)}_{\geq 8/16}+\ldots+\underbrace{\Big(\frac{1}{17}+\ldots+\frac{1}{32}\Big)}_{\geq 16/32}\geq$$

$$\underbrace{\Big(\frac{1}{2^{n-1}+1}+\ldots+\frac{1}{2^n}\Big)}_{\geq 2^{n-1}/2^n}\geq 1+\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{4}{8}+\ldots+\frac{2^{n-1}}{2^n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(n-1)=1+\frac{n}{2}\to+\infty$$

Essendo $S_{n+1}\geq S_n$, ossia è monotona non decrescente, ne segue che converge al suo estremo superiore. Poiché $\lim\limits_{n\to+\infty}S_{2^n}=+\infty$, S_n diverge a $+\infty$.

Dimostrazione che $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^p}$ con $p>1$ converge. Sia n il più piccolo numero intero per cui $m\leq 2^n-1$. Abbiamo

$$\begin{aligned}S_m&=1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\ldots+\frac{1}{m^p}\leq\\&=1+\underbrace{\Big(\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}\Big)}_{\leq 2/2^p}+\underbrace{\Big(\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{7}\Big)}_{\leq 4/4^p}+\underbrace{\Big(\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{15}\Big)}_{\leq 8/8^p}+\ldots+\underbrace{\Big(\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{31}\Big)}_{\leq 16/16^p}+\ldots+\\&\underbrace{\Big(\frac{1}{2^{n-1}}+\ldots+\frac{1}{2^n-1}\Big)}_{\leq 2^{n-1}/2^{(n-1)p}}\leq 1+\frac{1}{2^{p-1}}+\frac{1}{4^{p-1}}+\frac{1}{8^{p-1}}+\frac{1}{16^{p-1}}+\ldots+\frac{2^{n-1}}{2^{(n-1)p}}=\\&=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{2^{k(p-1)}}\leq\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{2^{k(p-1)}}=\frac{2^{p-1}}{1-2^{p-1}}=\frac{1}{2^{p-1}-1}\end{aligned}$$

Dunque la successione $\{S_m\}_{m=1}^{\infty}$ è limitata ed essendo non decrescente, converge ad un limite.

Abbiamo leggermente modificato la dimostrazione rispetto al caso precedente in quanto stavolta S_{2^n} converge e non diverge. S_n è sempre una successione non decrescente ma la sottosuccessione S_{2^n} stavolta converge e quindi non siamo più autorizzati a dire che tutta la successione S_n converge. Si pensi ad esempio alla successione

$$S_n=\Big\{1,\frac{1}{2},1,\frac{1}{4},1,\frac{1}{6},1,\frac{1}{8},1,\frac{1}{10},\ldots\Big\}$$

In tal caso si ha che S_n non converge ma la sottosuccessione S_{2n} converge a zero. Anche la successione $\{S_{2^n}\}$, che è una sottosuccessione di $\{S_n\}$, converge a zero. La successione $\{a_n\}$ che genera la $\{S_n\}$ è data da

$$a_1=S_1,\quad a_2=S_2-S_1,\quad a_3=S_3-S_2,\ldots,a_n=S_n-S_{n-1}$$

Si è dimostrato il seguente risultato.

Proposizione Sia $\{a_k\}$ una successione tale che $\sum_{k=1}^{+\infty}|a_k|$ converge. Allora converge pure la serie $\sum_{k=1}^{+\infty}a_k$.

Dimostrazione Possiamo scrivere:

$$\forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ n_\varepsilon :\ n, m > n_\varepsilon \implies \Big|\sum_{k=n}^{m} a_k\Big| \leq \sum_{k=n}^{m} |a_k| < \varepsilon$$

Il primo $\leq$ deriva dalle proprietà dei moduli. Il secondo $\leq$ deriva dalla proprietà di Cauchy delle serie convergenti ossia $\sum_{k=n}^{m} |a_k|$. Ne segue che la proprietà di Cauchy vale anche per $\{a_k\}$ e quindi la serie $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ converge.

14/01/2010

Criterio di convergenza di serie tramite confronto con integrali *Sia* $f\colon [k_0, +\infty) \to \mathbf{R}$, $k_0 \in \mathbf{Z}$ *tale che* $f \geq 0$ *e monotona decrescente(crescente). Allora la serie* $\sum_{k=1}^{+\infty} f(k)$ *converge se e solo se converge l'integrale* $\int_{k_0}^{+\infty} f(x)dx$

Dimostrazione Un disegno consente subito di scrivere $\int_{n}^{n+1} f(x)dx \leq f(n) \leq \int_{n-1}^{n} f(x)dx$ e quindi $\int_{k_0+1}^{m+1} f(x)dx \leq \sum_{k=k_0+1}^{m} f(k) \leq \int_{k_0}^{m} f(x)dx \leq \int_{k_0}^{+\infty} f(x)dx$. Se $\int_{k_0}^{+\infty} f(x)dx$ converge la successione $\left\{\sum_{k=k_0+1}^{n} f(k)\right\}_{n=k_0+1}^{\infty}$ è limitata ed essendo crescente converge al suo estremo superiore che è finito. Se $\int_{k_0}^{+\infty} f(x)dx = +\infty$ allora la successione $\left\{\int_{k_0+1}^{m+1} f(k)\right\}_{m=k_0}^{\infty}$ è illimitata superiormente e quindi, essendo crescente, diverge a $+\infty$.

01/02/2010

§14 Appendice 6: Le equazioni algebriche di terzo grado a coefficienti reali (una interessante applicazione dei numeri complessi; la formula di Cardano (Pavia 1501 – Roma 1576))

Sia data la equazione algebrica di terzo grado $x^3+ax^2+bx+c=0$ i cui coefficienti sono reali. La sostituzione $z=x+\frac{a}{3}$ trasforma la equazione in $z^3+pz+q=0$ con $p=b-\frac{1}{3}a^2$, $q=\frac{2}{27}a^3-\frac{ab}{3}+c$. Scriviamo $z=u+v$ ottenendo $(u+v)^3+p(u+v)+q=u^3+v^3+3uv(u+v)+p(u+v)+q=0$. A questo punto studiamo il sistema $\begin{cases} u^3+v^3=-q \\ uv=-\dfrac{p}{3}\end{cases}$ ossia $\begin{cases} u^3+v^3=-q \\ u^3v^3=-\dfrac{p^3}{27}\end{cases}$ e se poniamo $u^3=\xi$ $v^3=\eta$ il sistema diventa $\begin{cases} \xi+\eta=-q \\ \xi\eta=-\dfrac{p^3}{27}\end{cases}$. I numeri ξ e η sono le soluzioni della equazione di secondo grado $\lambda^2+q\lambda-\frac{p^3}{27}=0$ ossia $\lambda_\pm=-\frac{q}{2}\pm\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}$ e se chiamiamo $D\doteq\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}$ abbiamo $\lambda_\pm=-\frac{q}{2}\pm\sqrt{D}$. Segue chiaramente che $u=\lambda_+^{1/3}=(-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}})^{1/3}$ e $v=\lambda_-^{1/3}=(-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}})^{1/3}$ e bisogna tenere in mente che $\lambda_+^{1/3}$ dà luogo a tre risultati così come $\lambda_-^{1/3}$.

Vanno distinti 3 casi: $D>0$, $D<0$, $D=0$. Cominciamo da $D=0$ ossia $\frac{q^2}{4}=-\frac{p^3}{27}$. La estrazione della radice cubica $(-\frac{q}{2})^{1/3}$ genera tre soluzioni (due complesse ed una reale) ossia $u_1=(-\frac{q}{2})^{1/3}$, $u_2=e^{i\frac{2}{3}\pi}(-\frac{q}{2})^{1/3}$, $u_3=e^{-i\frac{2}{3}\pi}(-\frac{q}{2})^{1/3}$, e la stessa cosa per v ossia $v_1=(-\frac{q}{2})^{1/3}$, $v_2=e^{i\frac{2}{3}\pi}(-\frac{q}{2})^{1/3}$, $v_3=e^{-i\frac{2}{3}\pi}(-\frac{q}{2})^{1/3}$. Ora bisogna ricordare che $uv=-\frac{p}{3}$ da cui le uniche coppie possibili sono (u_1,v_1) (u_2,v_3) e (u_3,v_2). La soluzione $z=u+v$ è data da $z_1=u_1+v_1=-2(\frac{q}{2})^{1/3}$ nel primo caso. Nel secondo caso si ha $z_2=u_2+v_3=-(\frac{q}{2})^{1/3}(e^{i\frac{2}{3}\pi}+e^{-i\frac{2}{3}\pi})=-(\frac{q}{2})^{1/3}2Re(e^{i\frac{2}{3}\pi})=-(\frac{q}{2})^{1/3}2\cos\frac{2}{3}\pi=(\frac{q}{2})^{1/3}$. Nel terzo ed ultimo caso si ha $z_3=u_3+v_2=u_2+v_3$ da cui si evince che una delle radici è doppia. In conclusione, per $D=0$ le radici sono tutte e tre reali ed una è doppia. La seconda è uguale all'opposto della prima. In altre parole $D=0$ corrisponde ad un polinomio del tipo $(x-x_o)^2(x+x_o)=0$

Proseguiamo con il caso $D>0$. $u^3=\lambda_+=-\frac{q}{2}+\sqrt{D}$ per cui u può assumere uno dei tre valori $\lambda_+^{1/3}$, $\lambda_+^{1/3}e^{i\frac{2}{3}\pi}$ e $\lambda_+^{1/3}e^{-i\frac{2}{3}\pi}$ e v uno dei tre $\lambda_-^{1/3}$, $\lambda_-^{1/3}e^{i\frac{2}{3}\pi}$ e $\lambda_-^{1/3}e^{-i\frac{2}{3}\pi}$ dove $\lambda_-=-\frac{q}{2}-\sqrt{D}$. Dovendo essere $uv=-\frac{p}{3}$ si hanno le tre possibilità $(u,v)=(\lambda_+^{1/3},\lambda_-^{1/3})$, $(u,v)=(e^{i\frac{2}{3}\pi}\lambda_+^{1/3},e^{-i\frac{2}{3}\pi}\lambda_-^{1/3})$, $(u,v)=(e^{-i\frac{2}{3}\pi}\lambda_+^{1/3},e^{i\frac{2}{3}\pi}\lambda_-^{1/3})$. Sommando alla fine si ha $z_1=\lambda_+^{1/3}+\lambda_-^{1/3}$, $z_2=-\frac{1}{2}(\lambda_+^{1/3}+\lambda_-^{1/3})+i\frac{\sqrt{3}}{2}(\lambda_+^{1/3}-\lambda_-^{1/3})$ e $z_3=-\frac{1}{2}(\lambda_+^{1/3}+\lambda_-^{1/3})-i\frac{\sqrt{3}}{2}(\lambda_+^{1/3}-\lambda_-^{1/3})$ che è il complesso coniugato di z_2. Si hanno quindi due radici complesse coniugate ed una radice reale.

L'ultimo caso è quello in cui $D<0$ per cui $\lambda_+=-\frac{q}{2}+i\sqrt{-D}\doteq\rho_oe^{i\vartheta_o}$ ($\rho_o=\sqrt{\frac{q^2}{4}-D}$ e $\tan\vartheta_o=\frac{-2\sqrt{-D}}{q}$) e $\lambda_-=-\frac{q}{2}-i\sqrt{-D}=\overline{\lambda_+}$. Come prima u può assumere uno dei tre valori $u_1=\lambda_+^{1/3}$, $u_2=\lambda_+^{1/3}e^{i\frac{2}{3}\pi}$ e $u_3=\lambda_+^{1/3}e^{-i\frac{2}{3}\pi}$ ($\lambda_+^{1/3}=\rho_o^{1/3}e^{i\vartheta_o/3}$) e v uno dei tre $v_1=\lambda_-^{1/3}$, $v_2=\lambda_-^{1/3}e^{i\frac{2}{3}\pi}$ e $v_3=\lambda_-^{1/3}e^{-i\frac{2}{3}\pi}$. La conseguenza è che $z_1=u_1+v_1=\lambda_+^{1/3}+\lambda_-^{1/3}=\lambda_+^{1/3}+\overline{\lambda_+^{1/3}}=2Re(\lambda_+^{1/3})\in\mathbf{R}$. La seconda radice è $z_2=u_2+v_2=\lambda_+^{1/3}e^{i\frac{2}{3}\pi}+\lambda_-^{1/3}e^{-i\frac{2}{3}\pi}=\lambda_+^{1/3}e^{i\frac{2}{3}\pi}+\overline{\lambda_+^{1/3}e^{i\frac{2}{3}\pi}}=2Re(\lambda_+^{1/3}e^{i\frac{2}{3}\pi})\in\mathbf{R}$. La terza radice è $z_3=u_3+v_3=\lambda_+^{1/3}e^{-i\frac{2}{3}\pi}+\lambda_-^{1/3}e^{i\frac{2}{3}\pi}=\lambda_+^{1/3}e^{-i\frac{2}{3}\pi}+\overline{\lambda_+^{1/3}e^{-i\frac{2}{3}\pi}}=2Re(\lambda_+^{1/3}e^{-i\frac{2}{3}\pi})\in\mathbf{R}$ e come si vede tutte e tre le radici sono reali.

Si può notare che se $D\geq 0$, sia λ_+ che λ_- sono reali e quindi le radici (z_1,z_2,z_3) che si ottengono sono facilmente scrivibili come $z_j = a_j + ib_j$ $j = 1,2,3$ ($b_j = 0$ nel caso di radici reali). Viceversa se $D < 0$ sia λ_+ che λ_- sono numeri complessi coniugati con parte immaginaria non nulla e le radici (**reali**) si ottengono attraverso una formula del tipo $a^{1/3}\cos(b + \frac{1}{3}\arctan c)$ che può eventualmente essere pari ad un numero semplice (intero relativo oppure razionale). È per questa ragione che a volte la formula delle equazioni di terzo grado (detta *di Cardano*) non è utile quando le radici sono tutte e tre reali.

Se siamo interessati a trovare radici reali e siamo nel caso $D \geq 0$, si può fare a meno di sapere cosa sono i numeri complessi in quanto essi non sono necessari (esattamente come accade per le equazioni di secondo grado). Se però l'equazione in questione ha *tre* radici reali e quindi $D < 0$, allora non si può fare a meno di usare tali numeri. Ciò rappresentò un serio problema per gli algebristi dei secoli $XV^{\underline{0}}$, $XVI^{\underline{0}}$ e $XVII^{\underline{0}}$. Alcuni pensarono che i numeri complessi fossero un fatto accidentale da evitare in qualche modo. Altri, come Eulero, invece li presero sul serio tanto da usarli correntemente con notevole successo [(1.14)]

Per chiarire la questione si può considerare la equazione $x^3 - 15x - 4 = 0$ che ha $q = -4$, $p = -15$, $D = -121$,[(2.14)] $\lambda_+ = -\frac{q}{2} + \sqrt{-D} = 2 + i11$. Seguendo la teoria si ottiene immediatamente $z_1 = 2Re((\sqrt{125}e^{i\arctan\frac{11}{2}})^{1/3}) = 2\sqrt{5}\cos\frac{1}{3}\arctan\frac{11}{2}$. A questo punto possono capitare due eventualità . La prima è che $\frac{1}{3}\arctan\frac{11}{2}$ sia un angolo noto di cui è facile sapere il coseno. In tal caso il calcolo è finito. La seconda è che la precedente eventualità con accada.
Per sapere quanto vale $\cos\frac{1}{3}\arctan\frac{11}{2}$ conviene ricorrere alla formula $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$ valida per ogni x. Grazie ad una ben nota formula trigonometrica abbiamo $\cos 3x = \frac{2}{5\sqrt{5}}$ e quindi dobbiamo risolvere $4\cos^3 x - 3\cos x = \frac{2}{5\sqrt{5}}$. Tenendo conto che $x = \frac{1}{3}\arctan\frac{11}{2}$ e quindi $\cos x = \cos\frac{1}{3}\arctan\frac{11}{2} > 0$ e del fatto che il polinomio $4z^3 - 3z$ è negativo per $-1 < z < 0$ e positivo per $0 < z < 1$, l'unica soluzione possibile è $\cos x = \frac{2}{\sqrt{5}}$ (soluzione trovata per tentativi)[(3.14)]. A questo punto una soluzione dell'equazione di partenza è $z_1 = 2\sqrt{5}\frac{2}{\sqrt{5}} = 4$.
Trovare z_2 e z_3 è ora immediato. Sempre in base alla teoria precedente si ha
$z_2 = 2Re(\lambda_+^{1/3}e^{i\frac{2}{3}\pi}) = 2\sqrt{5}\cos(\frac{1}{3}\arctan\frac{11}{2} + \frac{2}{3}\pi) = 2\sqrt{5}(\frac{2}{\sqrt{5}}(-\frac{1}{2}) + \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{1 - \frac{4}{5}}) = \sqrt{3} - 2$,
$z_3 = -\sqrt{3} - 2$.

$x^3 - 7x + 6 = 0$ che ha come radici $1, 2, -3$. Abbiamo $\lambda_+ = -3 + \sqrt{-\frac{100}{27}} = -3 + i\frac{10}{3\sqrt{3}} = \rho_o e^{i\theta_o}$ dove $\rho_o = (\frac{343}{27})^{1/2}$, $\theta_o = -\arctan\frac{10}{9\sqrt{3}} + \pi$ e quindi alla fine le tre radici sono date da $z_1 = 2(\frac{343}{27})^{1/6}\cos(-\frac{1}{3}\arctan\frac{10}{9\sqrt{3}} + \frac{\pi}{3})$, $z_2 = 2(\frac{343}{27})^{1/6}\cos(-\frac{1}{3}\arctan\frac{10}{9\sqrt{3}} + \pi)$,
$z_3 = 2(\frac{343}{27})^{1/6}\cos(-\frac{1}{3}\arctan\frac{10}{9\sqrt{3}} - \frac{\pi}{3})$. Procedendo come prima, se indichiamo
$x_o = -\frac{1}{3}\arctan\frac{10}{9\sqrt{3}} + \frac{\pi}{3}$ ed usiamo la solita equazione per $\cos 3x$ otteniamo $4(\cos x_o)^3 - 4\cos x_o = -\frac{9\sqrt{3}}{\sqrt{343}}$. Cerchiamo $\cos x_o = \frac{d}{\sqrt{343}}$ da cui otteniamo $\frac{4d^3}{343} - 3d = -9\sqrt{3}$ e scrivendo $d = 7\sqrt{3}c$ si ha $12c^3 - 21c = -9$ ossia $c = 1$. A questo punto è immediato avere $\cos x_o = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$ e quindi $z_1 = 2$. z_2 e z_3 seguono immediatamente.

(1.14) La fonte è il bel libro (per la cui lettura è sufficiente il bagaglio matematico della scuola superiore) di William Dunham: *Euler The Master of Us All*, The Mathematical Association of America, Dolciani Mathematical Expositions No.22, 1999

(2.14) In casi come questo nei quali è facile trovare per tentativi una soluzione, x=4 nella fattispecie, è superfluo usare la formula generale in quanto attraverso Ruffini si può scomporre il polinomio come prodotto di $(x-4)$ per una polinomio di secondo grado le cui radici sono facilmente ottenibili

(3.14) Si tenga presente che l'equazione $4z^3 - 3z = \alpha$ ha tre soluzioni reali z_1, z_2, z_3 per $-1 \leq \alpha \leq 1$. Ciascuna delle soluzioni verifica la relazione $-1 \leq z_i \leq 1$.

Un altro esempio del genere è dato dalla equazione $x^3-19x+30=0$ che ha come radici $2,3,-5$. Applicando la formula che dà z_1 otteniamo $2Re(\lambda_+)^{1/3}$ dove $\lambda_+=\rho_o e^{i\vartheta_o}=-15+\sqrt{225-\frac{6859}{27}}$ $\rho_o=\sqrt{\frac{5291}{27}}$ e $\tan\vartheta_o=(-\frac{1}{15}\sqrt{\frac{784}{27}})$. Ne consegue che $z_1=2(\frac{6859}{27})^{1/6}\cos(-\frac{1}{3}\arctan(\frac{1}{15}\sqrt{\frac{784}{27}})+\frac{\pi}{3})$, $z_2=2(\frac{6859}{27})^{1/6}\cos(-\frac{1}{3}\arctan(\frac{1}{15}\sqrt{\frac{784}{27}})+\pi)$, $z_3=2(\frac{6859}{27})^{1/6}\cos(-\frac{1}{3}\arctan(\frac{1}{15}\sqrt{\frac{784}{27}})-\frac{\pi}{3})$ sono le radici della equazione. La solita formula dei coseni dà $4y^3-3y=-\frac{45}{19}\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{19}}$ dove $y=\cos(-\frac{1}{3}\arctan(\frac{1}{15}\sqrt{\frac{784}{27}})+\frac{\pi}{3})$ da cui $y=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{19}}$ e quindi $z_1=2$

Come esercizio ci si può divertire a trovare le radici delle seguenti equazioni
$x^3-6x+9=0$, $x^3+12x+63=0$, $x^3+9x^2+18x+28=0$, $x^3+6x^2+30x+25=0$,
$x^3-6x+4=0$, $x^3+6x+2=0$, $x^3+18x+15=0$, $x^3-3x^2-3x+11=0$,
$x^3+3x^2-6x+4=0$, $x^3+9x-26=0$, $x^3+24x-56=0$, $x^3+45x-98=0$,
$x^3+3x^2-3x-1=0$, $x^3-6x^2+57x+196=0$, $x^3-4x-1=0$,
$x^3-4x+2=0$, $x^3-3abx+a^3+b^3=0$, $x^3-3abfgx+f^2ga^3+fg^2b^3=0$.

Soluzione delle equazioni di quarto grado di Eulero e di G. Ferrari

Soluzione Eulero

Sia data la equazione $y^4+a'y^3+b'y^2+c'y+d'=0$. Attraverso la sostituzione $y=x-\frac{a'}{4}$ essa diventa $x^4-ax^2-bx-c=0$ con a, b e c opportuni. Cerchiamo soluzioni della forma $x=\sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r}$. Elevando al quadrato si ottiene $x^2-(p+q+r)=2(\sqrt{pq}+\sqrt{pr}+\sqrt{qr})$ ed elevando ancora al quadrato si ha $x^4-2(p+q+r)x^2+(p+q+r)^2=4(pq+pr+qr)+8(\sqrt{p^2qr}+\sqrt{pq^2r}+\sqrt{pqr^2})=4(pq+pr+qr)+8\sqrt{pqr}x$. Se indichiamo $f=p+q+r$, $g=pq+pr+qr$, e $h=pqr$, l'ultma equazione può essere riscritta come $x^4-2fx^2-8\sqrt{h}x-(4g-f^2)=0$ che è uguale a $x^4-ax^2-bx-c=0$ non appena si pone $a=2f$, $b=8\sqrt{h}$, $c=4g-f^2$. Dai coefficienti (a,b,c) si passa ai valori (f,g,h) e viceversa. Il punto chiave è ora riconoscere che l'equazione di terzo grado $(z-p)(z-q)(z-r)=0$ diventa $z^3-(p+q+r)z^2+(pq+pr+qr)z-pqr=0$ e quindi $z^3-fz^2+gz-h=0$. Dunque la procedura prevede che dai coefficienti (a,b,c) si ricavino (f,g,h) e da essi si risolva l'equazione $z^3-fz^2+gz-h=0$. La soluzione è data dalla terna (p,q,r) e da essa si ricavano i valori di x. Ciò implica che bisogna risolvere l'ultima equazione di terzo grado i cui coefficienti si ricavano da a,b,c. Tra l'altro si può notare come per risolvere una equazione di $4^{\underline{0}}$ grado se ne risolve una di terzo grado (fatto non sorprendente se si pensa che per risolvere quelle di terzo grado se ne è risolta una di secondo grado e per risolvere quelle di secondo grado se ne risolve una di primo grado).

Soluzione di G. Ferrari

Partiamo sempre da $y^4+ay^3+by^2+cy+d=0$ ed attraverso la sostituzione $y=x-\frac{a}{4}$ ci si riduce a $x^4+px^2+qx+r=0$. Introducendo un parametro ausiliario α la si riscrive come

$$(x^2+\frac{p}{2}+\alpha)^2-[2\alpha x^2-qx+(\alpha^2+p\alpha-r+\frac{p^2}{4})]=0.$$

Si determina ora α in modo che il polinomio di secondo gradi in parentesi quadre abbia una radice doppia e quindi il suo discriminante deve essere nullo. Si deve avere quindi $q^2-8\alpha(\alpha^2+p\alpha-r+\frac{p^2}{4})=0$. Quest'ultima è una equazione di terzo grado che sappiamo risolvere e sia α_o una sua soluzione. Per tale valore lo zero doppio è $\frac{q}{4\alpha_o}$ e quindi l'equazione diventa $(x^2+\frac{p}{2}+\alpha_o)^2-2\alpha_o(x-\frac{q}{4\alpha_o})^2=0$. Quest'ultima equazione è equivalente al sistema $x^2-\sqrt{2\alpha_o}x+(\frac{p}{2}+\alpha_o+\frac{q}{2\sqrt{2\alpha_o}})=0$, $x^2+\sqrt{2\alpha_o}x+(\frac{p}{2}+\alpha_o-\frac{q}{2\sqrt{2\alpha_o}})=0$, Per le equazioni di quinto grado, intorno al 1824, il matematico norvegese Niels Abel (1802–1829) dimostrò che non è possibile arrivare ad una soluzione in termini di radicali ed operazioni elementari. Lo stesso risultato vale per le equazioni di grado superiore.