UNIVERSITÀ DI ROMA "TOR VERGATA" — FACOLTÀ DI INGEGNERIA
Corso di Ingegneria Online, A.A.2010–2011

Analisi Matematica II — Prova scritta del 04.04.2011

Per **l'esame da 10 crediti**: svolgere tutti gli esercizi (tempo 180 minuti)
Per **l'esame da 5 crediti, solo seconda parte (ex analisi IV)**: svolgere gli esercizi 5,6,7, (tempo 100 minuti)
Per **l'esame da 5 crediti, solo prima parte (ex analisi III)**: svolgere gli esercizi 1,2,3,4 (tempo 100 minuti)

1. Si consideri la funzione $f(x,y) = -y^3 + y^2 - x^2 + x^2y$

   1.1) Si individuino i punti critici. Successivamente se ne stabilisca la natura.

   1.2) Si trovino massimo e minimo assoluti della funzione all'interno del rettangolo di vertici $(-1,0),(1,0),(1,1),(-1,1)$ (lati compresi).

2. Usando il teorema delle funzioni implicite si trovi il piano tangente $z = ax + by + c$ alla funzione definita implicitamente dalla relazione $z^x + (\ln y)^{x^2} - 2 = 0$ nel punto $(-1, e, 1)$

3. Per ciascuna delle seguenti funzioni si dica argomentando se ammette limite $(x,y) \to (0,0)$
   $f_1 = \dfrac{e^{\sin(xy)-xy} - 1}{|x| + y^2}, \quad f_2 = \dfrac{\tan(\sqrt{x}\tan x)}{|x| + |y|}, \quad f_3 = \dfrac{x^8 + y^8}{x^2 - y^2}$

4. Si calcoli il flusso del campo vettoriale $\underline{F}(\underline{x}) = (2x^2y - 2zx^2)\underline{i} - (2xy^2 - 2zy^2)\underline{j} + (2xz^2 - 2yz^2)\underline{k}$ verso l'esterno della superficie laterale (base esclusa) della piramide la cui base è data dal rettangolo $A \equiv (0,0,1)$, $B \equiv (0,2,1)$, $C \equiv (-2,2,1)$, $D \equiv (-2,0,1)$, ed il vertice nel punto $E \equiv (0,0,\frac{1}{3})$.

5. Si risolva l'equazione differenziale

$$\begin{aligned} y' &= \frac{y}{x} + x^2 \\ y(1) &= 1 \end{aligned}$$

6. Si scriva le serie di Fourier della funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π–periodica, dispari, che nell'intervallo $[0,\pi]$ è data da

$$\begin{cases} \sin x & 0 < x < \pi/2, \\ 0 & \pi/2 \le x < \pi \end{cases}$$

   Si dica argomentando se la convergenza è uniforme.

7. Si considerino le tre successioni di funzioni $f_n(x) = \dfrac{x^{1/n}}{n^n}$, $g_n(x) = \dfrac{x}{n^{1/n} + |x|}$, $h_n(x) = \dfrac{x^n}{x^2 + n}$

   7.1) Per ciascuna di esse si individuino gli insiemi di convergenza puntuale.

   7.2) Si dica argomentando per quale $n \in \mathbb{N}$ ciascuna delle precedenti successioni converge uniformemente nell'insieme $[-n, n]$

   7.3) Si dica argomentando se se esiste almeno un insieme illimitato (eventualmente diverso per ciascuna delle funzioni) in cui la convergenza è uniforme.

Punteggi

10 crediti Es.1)–7, Es.2)–3, Es.3)–4, Es.4)–6, Es.5)–3,5, Es.6)–6,5, Es.7)–6

5 crediti prima parte (ex Analisi III) Es.1)–11, Es.2)–7, Es.3)–7, Es.4)–11

5 crediti seconda parte (ex Analisi IV) Es.5)–14 Es.6)–14 Es.7)–8