

Analisi Matematica II — Prova scritta del 30.07.2011

Per l'esame da 10 crediti: svolgere tutti gli esercizi (tempo 180 minuti)

Per l'esame da 5 crediti, solo seconda parte (ex analisi IV): svolgere gli esercizi 5,6,7, (tempo 100 minuti)

Per l'esame da 5 crediti, solo prima parte (ex analisi III): svolgere gli esercizi 1,2,3,4 (tempo 100 minuti)

1. Si consideri la funzione $f(x, y) = \frac{2}{3}y^3 - x + x^2 + 2xy^2$

1.1) Si individuino i punti critici. Successivamente se ne stabilisca la natura.

1.2) Si trovino massimo e minimo assoluti della funzione all'interno del rettangolo di vertici $(-1, 0), (1, 0), (1, 1), (-1, 1)$ (lati compresi).

2. Usando il teorema delle funzioni implicite si trovi il piano tangente $z = ax + by + c$ alla funzione definita implicitamente dalla relazione $(\ln x)^y + y^{e^z} + e^{z \ln x} = 0$ nel punto $(e, 1, 0)$

3. Si calcoli il volume del solido racchiuso dal cilindro di equazione $\{x^2 + y^2 \leq 2x\}$, dal paraboloido $z = (x^2 + y^2)$ e dal piano (x, y)

4. Si valuti l'integrale $\int_{\varphi} \omega$ dove $\omega = (2xy^2 + 1)dx + 2x^2ydy$ e φ è la curva $x = \theta \cos \theta$, $y = \theta \sin \theta$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$

5. Si risolva l'equazione differenziale

$$\begin{cases} y'(x) = 2xye^{x^2} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

6. Si scriva le serie di Fourier della funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 2π -periodica, pari, che nell'intervallo $[0, \pi]$ è data da

$$\begin{cases} \sin x & 0 < x < \pi/2, \\ 0 & \pi/2 \leq x < \pi \end{cases}$$

Si dica argomentando se la convergenza è uniforme.

7. Si considerino le tre successioni di funzioni $f_n(x) = \frac{x^{1/n}}{n^n}$, $g_n(x) = \frac{x}{n^{1/n} + |x|}$, $h_n(x) = \frac{x^n}{x^2 + n}$

7.1) Per ciascuna di esse si individuino gli insiemi di convergenza puntuale.

7.2) Si dica argomentando per quale $n \in \mathbb{N}$ ciascuna delle precedenti successioni converge uniformemente nell'insieme $[-n, n]$

7.3) Si dica argomentando se esiste almeno un insieme illimitato (eventualmente diverso per ciascuna delle funzioni) in cui la convergenza è uniforme.

Punteggi

10 crediti I punteggi sono rispettivamente 7, 3, 4, 5, 3, 7, 7

5 crediti prima parte (ex Analisi III) I punteggi sono rispettivamente 9, 8, 8, 9

5 crediti seconda parte (ex Analisi IV) I punteggi sono rispettivamente 8, 13, 13