UNIVERSITÀ DI ROMA "TOR VERGATA" — FACOLTÀ DI INGEGNERIA
Corso di Ingegneria Online, A.A.2014–2015

Analisi Matematica I — Prova scritta del 15.09.2015

Per **l' esame da 12 crediti**: svolgere gli esercizi da 1 a 5(tempo 180 minuti)
Per **l'esame da 10 crediti**: svolgere tutti gli esercizi tranne il numero 5,6,7 (tempo 150 minuti)
Per **l'esame da 5 crediti, solo seconda parte**: svolgere gli esercizi esercizi 3,4,6,7 (tempo 100 minuti)

Punteggi: 12 crediti 8,8,8,8,8, 10 crediti 10, 10, 10, 10, 5 crediti 14, 14, 4, 8

1 Si calcoli lo sviluppo di Taylor all'ordine 10 centrato nell'origine della funzione $f(x) = \ln(1 + x^4 \ln(1 + x))$

Soluzione (standard). $\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k + o(x^n)$ e prendiamo $n = 6$. Dunque

$$x^4 \ln(1+x) = \sum_{k=1}^{6} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^{k+4} + o(x^{10}) \doteq q(x) \to 0 \text{ per } x \to 0$$

Teniamo presente che $q(x)$ comincia con x^4.

$$\ln(1 + x^4 \ln(1+x)) = \ln(1 + q(x)) = q(x) - \frac{1}{2} q^2(x) + \frac{1}{3} q^3(x) + o(q^3)$$

$$q^2(x) = \left(\sum_{k=1}^{6} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^{k+4} + o(x^{10}) \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{6} \frac{(-1)^{i-1}}{i} x^{i+4} + o(x^{10}) \right) = x^{10} + o(x^{10})$$

Chiaramente $\frac{1}{3} q^3(x) + o(q^3) = o(x^{10})$. Dunque

$$\ln(1 + x^4 \ln(1+x)) = \sum_{k=1}^{6} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^{k+4} - \frac{x^{10}}{2} + o(x^{10})$$

2 Sia data la funzione

$$f(x) = x^{\frac{1}{3}} (1-x)^{\frac{2}{3}}$$

(1) Trovare il dominio di f detto D, (2) eventuali asintoti, (3) monotonia, eventuali punti di massimo/minimo relativo/assoluto, (4) eventuali punti di non derivabilità, (5) concavità, convessità, (6) disegnare un grafico della funzione

Soluzione

1) Trattandosi di radici cubiche, il dominio è $\mathbf{R}$.

2) Non ci sono asintoti verticali in quanto non accade mai che $\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$. *È errato affermare che non ci sono asintoti verticali a causa del fatto che il dominio è tutta la retta reale.* Si prenda la funzione $h(x)$ che vale: 0 se $x = 0$, e $h(x) = 1/x^2$ se $x \neq 0$. Il dominio è tutto $\mathbf{R}$ ma $\lim_{x \to 0} h(x) = +\infty$.

Asintoti orizzontali. $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x^{\frac{1}{3}} (-x)^{\frac{2}{3}} = +\infty \cdot +\infty = +\infty$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} x^{\frac{1}{3}} (-x)^{\frac{2}{3}} = -\infty \cdot +\infty = -\infty$

Non ci sono asintoti orizzontali.

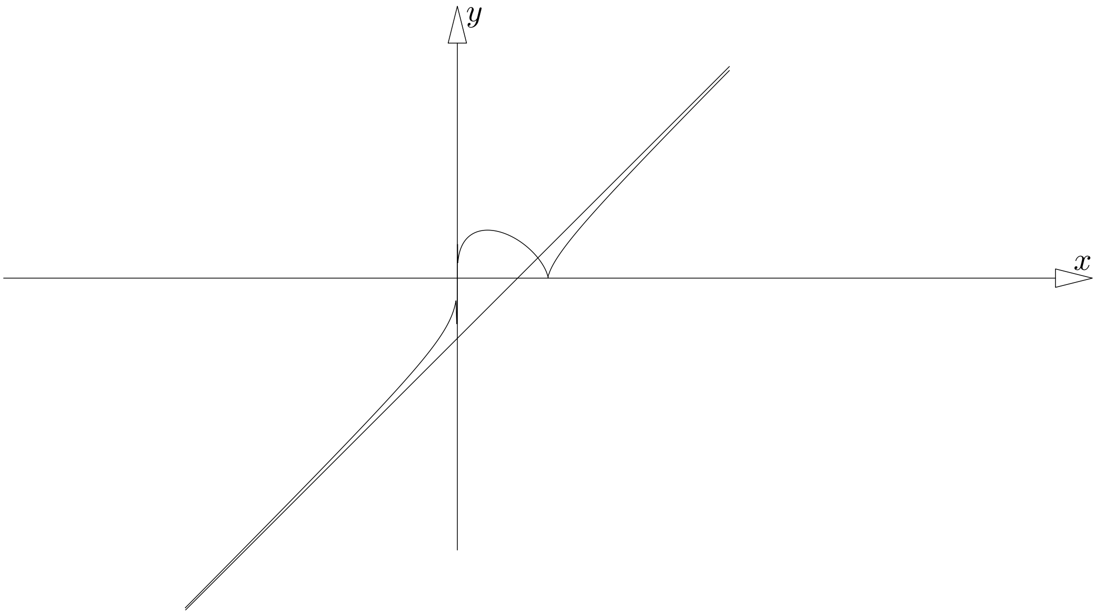
Asintoti obliqui.

$f(x) = x^{\frac{1}{3}} x^{\frac{2}{3}} \left(x^{-1} - 1)\right)^{\frac{2}{3}} = x(1 - \dfrac{1}{x})^{\frac{2}{3}} = x(1 - \dfrac{2}{3x} + o(1/x)) = x - \dfrac{2}{3} + o(1)$

Ciò vuol dire che $\lim\limits_{x\to\pm\infty} |f(x) - (x - \dfrac{2}{3})| = 0$ ossia la retta $x - 2/3$ è una asintoto abliquo a destra e sinistra.

3) $f'(x) = \dfrac{1}{3}\dfrac{1-3x}{x^{2/3}(1-x)^{1/3}} \geq 0$ se $x \leq 1/3$, $x \geq 1$. Inoltre $\lim\limits_{x\to 1^\pm} f'(x) = \pm\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^\pm} f'(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 1^-} f'(x) = -\infty$. Il punto $(\dfrac{1}{3}, \dfrac{2^{2/3}}{3^{4/3}})$ è un massimo e $(1, 0)$ è un minimo.

4) $f''(x) = \dfrac{-2}{9x^{5/3}(1-x)^{4/3}} \geq 0$ se $x \leq 0$.



3 Si trovi per quali valori di $k \in \mathbf{R}$ converge l'integrale

$\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{|\cos\frac{\pi}{2}\sqrt{1+\frac{1}{x}}|}{(x^k + x^{-k})x^{k^2-1}}dx$

Soluzione Spezziamo l'integrale come

$$\int_0^1 \frac{|\cos\frac{\pi}{2}\sqrt{1+\frac{1}{x}}|}{(x^k + x^{-k})x^{k^2-1}}dx + \int_1^{+\infty} \frac{|\cos\frac{\pi}{2}\sqrt{1+\frac{1}{x}}|}{(x^k + x^{-k})x^{k^2-1}}dx \doteq I_1 + I_2$$

Si tratta di stabilire il comportamento a zero ed asintotico per $x \to +\infty$ della funzione.

Per $x \to 0$ si può dire che $\cos\dfrac{\pi}{2}\sqrt{1+\dfrac{1}{x}} = O(1)$ e nulla più in quanto $1 + 1/x$ va dal valore 2 verso $+\infty$ in modo monotono.

Se $k \geq 0$ allora $k + k^2 - 1 > -k + k^2 - 1$ e quindi si ha

$$\frac{|\cos\frac{\pi}{2}\sqrt{1+\frac{1}{x}}|}{(x^k + x^{-k})x^{k^2-1}} = \frac{|\cos\frac{\pi}{2}\sqrt{1+\frac{1}{x}}|}{x^{(-k+k^2-1)}\,(1 + x^{2k})} \leq \frac{|\cos\frac{\pi}{2}\sqrt{1+\frac{1}{x}}|}{x^{-k+k^2-1}} \leq \frac{1}{x^{-k+k^2-1}}$$

e si ha convergenza di I_1 se $-k+k^2-1<1$ ossia $-1<k<2$ ma siccome k deve essere non negativo, allora $0\le k<2$. Per tali valori di k andiamo a guardare I_2.

$$\cos\frac{\pi}{2}\sqrt{1+\frac{1}{x}}=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\left(1+\frac{1}{2x}+O(\frac{1}{x^2})\right)\right)=$$
$$=\sin\left(\frac{\pi}{4x}+O(\frac{1}{x^2})\right)=\frac{\pi}{4x}+O(\frac{1}{x^2})$$

Quindi

$$\frac{|\cos\frac{\pi}{2}\sqrt{1+\frac{1}{x}}|}{(x^k+x^{-k})x^{k^2-1}}=\frac{\frac{\pi}{4x}+O(\frac{1}{x^2})}{(x^k+x^{-k})x^{k^2-1}}=\frac{\pi}{4x}\frac{1+O(\frac{1}{x})}{x^{(k+k^2-1)}(1+x^{-2k})}\le\frac{C}{xx^{k+k^2-1}}=\frac{C}{x^{k+k^2}}$$

e vogliamo che $k+k^2>1$ ossia $k<\frac{-1-\sqrt5}{2}$ oppure $k>\frac{-1+\sqrt5}{2}$ e siccome $\frac{-1+\sqrt5}{2}<2$, allora possiamo dire che per i k positivi per cui $\frac{-1+\sqrt5}{2}<k<2$, si ha convergenza.

Se $k<0$ allora si ottiene $\frac{-1+\sqrt5}{2}<-k<2$, ossia $-2<k<\frac{1-\sqrt5}{2}$. Basta osservare che se $k<0$ allora $k=-|k|$ e quindi

$$\frac{|\cos\frac{\pi}{2}\sqrt{1+\frac{1}{x}}|}{(x^{-|k|}+x^{|k|})x^{k^2-1}}$$

e si ricade nel caso precedente con $|k|$ al posto di k.

4 Specificando quando semplice ed assoluta, studiare la convergenza della serie seguente al variare di $\alpha\in\mathbf{R}$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^k k^\alpha\left(\left((1+\frac{1}{k}\right)^k-e\right)$$

Dire che siccome $(1+1/k)^k-e\to0$ *allora* $\lim_{k\to+\infty}k^\alpha((1+1/k)^k-e)=0$ *e quindi la serie converge per ogni* α *è un errore due volte. La prima volta consiste ne dire che* $\lim_{k\to+\infty}k^\alpha((1+1/k)^k-e)=0$ *per ogni* α*. La seconda consiste nel dire che se* $\lim_{k\to+\infty}k^\alpha((1+1/k)^k-e)=0$*, allora la serie converge. Essendo la serie a termini di segno alterno, bisogna verificare che tenda a zero in modo monotono.*

Soluzione

$$\left(1+\frac{1}{k}\right)^k=e^{k\ln(1+\frac{1}{k})}=e^{k(\frac{1}{k}-\frac{1}{2k^2}+\frac{1}{3k^3}+o(\frac{1}{k^3}))}=e^{1-\frac{1}{2k}+\frac{1}{3k^2}+o(\frac{1}{k^2}))}=$$
$$=e\left(1-\frac{1}{2k}+\frac{1}{3k^2}+o(\frac{1}{k^2})+\frac{1}{8k^2}+O(\frac{1}{k^3})\right)=e\left(1-\frac{1}{2k}+\frac{C}{k^2}+O(\frac{1}{k^3})\right)$$

$C=1/3+1/8$. Dunque la serie diventa

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^k k^\alpha\left(\left((1+\frac{1}{k}\right)^k-e\right)=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n n^\alpha e(-\frac{1}{2n}+\frac{C}{n^2}+O(\frac{1}{n^3}))=$$
$$=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n n^{\alpha-1}e(-\frac{1}{2}+\frac{C}{n}+O(\frac{1}{n^2}))$$

Per n grande abbastanza (quanto grande dipende da C e da $O(\frac{1}{n^2})$, possiamo scrivere

$$-\frac{1}{4} \leq (-\frac{1}{2} + \frac{C}{n} + O(\frac{1}{n^2})) \leq 1$$

Sia $\boxed{\alpha - 1 < -1}$ ossia $\boxed{\alpha < 0}$. La serie converge assolutamente. Infatti

$$|(-1)^n n^{\alpha-1} e(-\frac{1}{2} + \frac{C}{n} + O(\frac{1}{n^2}))| \leq e n^{\alpha-1}$$

Sia $\boxed{0 \leq \alpha < 1}$. La serie converge per Leibnitz. Certamente è a termini di segno alterno. Per quanto riguarda la monotonia scriviamo la derivata

$$\left(-\frac{n^{\alpha-1}}{2} + Cn^{\alpha-2}\right)' = -\frac{\alpha-1}{2} n^{\alpha-2} + C(\alpha-2)n^{\alpha-3} > 0 \text{ definitivamente}$$

Inoltre il termine generale dato da $(-1)^n n^{\alpha-1} O(\frac{1}{n^2})$ contribuisce con una serie assolutamente convergente in quanto $\alpha - 1 - 2 \leq -2$

Sia $\boxed{\alpha > 1}$. Il termine generale della serie non tende a zero per cui non può convergere.

5 Sia data la funzione:

$$f(\underline{x}) = \begin{cases} \dfrac{e^{x(y-x)^2} - 1}{y - x} & y > x \\ x & y \leq x \end{cases}$$

Si scriva:

1) l'insieme in cui è continua:

Soluzione La funzione è definita in ogni punto del piano $\mathbf{R}^2$ e quindi la domanda va analizzata in ogni punto.

Sia $\boxed{E = \{\underline{x} \in \mathbf{R}^2 : y > x\}}$. In tal caso la funzione è rapporto di due funzioni continue in cui il denominatore non si annula e quindi la funzione è continua.

Sia $\boxed{E_1 = \{\underline{x} \in \mathbf{R}^2 : y < x\}}$. L'insieme è aperto, la funzione vale x e quindi è continua.

Sia $\boxed{E_2 = \{\underline{x} \in \mathbf{R}^2 : y = x\}}$. Sia $(x_0, x_0) \in E_2$. Dobbiamo far vedere che

$$\lim_{\underline{x} \to \to (x_0, x_0)} f(\underline{x}) = f(x_0, x_0)$$

Se $y > x$,

$$f(\underline{x}) - f(x_0, x_0) = \frac{e^{x(y-x)^2} - 1}{y - x} - x_0 = \frac{1 + x(y-x)^2 + o(x(y-x)^2) - 1 - x_0(y-x)}{y - x} =$$
$$= \frac{(y-x)(-x_0 + x(y-x)) + o(x(y-x)^2)}{y - x} = (-x_0 + x(y-x)) + \frac{o(x(y-x)^2)}{y - x}$$

Il limite $(x, y) \to (x_0, x_0)$ vale zero se e solo se $x_0 = 0$. NOTARE che si è usato lo sviluppo di MacLaurin dell'esponenziale all'ordine 1 in quanto $y - x \to 0$.

Se $y < x$ allora $f(x,y) - f(0,0) = x \to 0$ per $x \to 0$. Quindi la risposta è che la funzione è continua in $E \cup E_1 \cup (0,0)$.

2) l'insieme in cui f è derivabile.

Soluzione Di nuovo in $E \cup E_1$ è derivabile e di nuovo va analizzato cosa accade su E_2. Sia $(x,y) = (x_0, x_0)$.

$$\partial_x f^+(x_0,x_0) = \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t}(f(x_0+t,x_0) - f(x_0,x_0)) = \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t}((x_0+t) - x_0) = 1$$

$$\partial_x f^-(x_0,x_0) = \lim_{t\to 0^-} \frac{1}{t}(f(x_0+t,x_0) - f(x_0,x_0)) = \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t}\left(\frac{e^{(x_0+t)(x_0-x_0-t)^2}-1}{x_0-t-x_0} - x_0\right) =$$
$$= \lim_{t\to 0^-} \frac{1}{t}\left(\frac{1+t^2(x_0+t)+o(t^2(x_0+t))-1}{-t} - x_0\right) = \lim_{t\to 0^-} -(x_0+t) + \frac{o(t^2(x_0+t))+x_0t^2}{-t^2}$$

Il limite è pari a $-2x_0$ e per la derivabilità , deve essere $-2x_0 = 1$ ossia $x_0 = -1/2$.
Ora vediamo la derivata rispetto a y e ci teniamo la notazione (x_0, x_0).

$$\partial_y f^-(x_0,x_0) = \lim_{t\to 0^-} \frac{1}{t}(f(x_0,x_0+t) - f(x_0,x_0)) = \lim_{t\to 0^-} \frac{1}{t}((x_0) - x_0) = 0$$

$$\partial_x f^+(x_0,x_0) = \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t}(f(x_0,x_0+t) - f(x_0,x_0)) = \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t}\left(\frac{e^{x_0(x_0+t-x_0)^2}-1}{x_0+t-x_0} - x_0\right) =$$
$$= \lim_{t\to 0^-} \frac{1}{t}\left(\frac{1+t^2x_0+o(t^2x_0)-1}{t} - x_0\right) = \lim_{t\to 0^-} x_0 + \frac{o(t^2x_0)-x_0t^2}{t^2} = 0$$

Ne segue che la derivata parziale $\partial_y f$ esiste sempre e quindi la funzione è derivabile nell'insieme $E_1 \cup E_2 \cup (-1/2, -1/2)$.

3) le derivate f_x e f_y in tutti i punti
Soluzione

$$f_x = \begin{cases} \dfrac{(y-x)^2(y-3x)e^{x(y-x)^2} + e^{x(y-x)^2} - 1}{(y-x)^2}, & y > x \\ 1 & y < x \ \vee\ (x,y) = (-1/2,-1/2) \\ \nexists & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$f_y = \begin{cases} \dfrac{2(y-x)^2e^{x(y-x)^2} - e^{x(y-x)^2} + 1}{(y-x)^2}, & y > x \\ 0 & y \le x \end{cases}$$

4) l'insieme in cui la funzione è differenziabile.

Soluzione Chiaramente è differenziabile in $E \cup E_1$. In E_2 non è mai differenziabile (o non è continua o non è derivabile).

5) motivando dire se esiste e quanto eventualmente vale $\lim\limits_{||\underline{x}||\to\infty} f(\underline{x})$

Soluzione Prendiamo la restrizione $E = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x = x_0, y < 0\}$. $\lim_{\|\underline{x}\|\infty,\, \underline{x}\in E} f(\underline{x}) = x_0$ Prendiamo ora la restrizione $E_1 = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x > 0, y = y_0\}$. $\lim_{\|\underline{x}\|\infty,\, \underline{x}\in E_1} f(\underline{x}) = +\infty$. La conclusione è che il limite non esiste.

R.: Si No (barrare). Se esiste il valore del limite è :

6 Si risolva la equazione $3z^2 + 2z(4 - i\sqrt{3}) + 7 = 0$.

7 Si risolva l'equazione differenziale

$$\begin{cases} y''(x) - 2y'(x) + y = x \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \end{cases}$$