UNIVERSITÀ DI ROMA "TOR VERGATA" — FACOLTÀ DI INGEGNERIA
Corso di Ingegneria Online, A.A.2014–2015

Analisi Matematica I — Prova scritta del 21.02.2015

esame da 12 crediti: svolgere tutti gli esercizi (tempo 180 minuti); punteggi 5,5,4,4,4,4,4,4

esame da 10 crediti: svolgere tutti gli esercizi tranne il numero 8 (tempo 150 minuti) punteggi 5,5,5,5,5,5,4

esame da 5 crediti, solo seconda parte: svolgere gli esercizi esercizi 4,5,6,7, (tempo 100 minuti) punteggi 8,9,9,8

Nome(Stampatello) **Cognome**(Stampatello) **Matricola**

1. Si determinino $a_0, \ldots, a_6$ in modo che la funzione $f(x) = (\cos x)^{\left((\sin x)^2\right)} + a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + a_6 x^6$ sia $o(x^6)$ per $x \to 0$

   R.: $a_0 =$, $a_1 =$, $a_2 =$, $a_3 =$, $a_4 =$, $a_5 =$, $a_6 =$

2. Sia data la funzione
$$f(x) = \begin{cases} x^2 e^{-x^2} & x \le 0 \\ \left|\frac{5}{x} + x - 6\right| & x > 0 \end{cases}$$

   (1) Scrivere le equazioni degli eventuali asintoti. **R.:** $y = 0$ è un asintoto orizzontale a $-\infty$. La retta $x = 0$ è l'asintoto verticale solo per $x \to 0^+$. La retta $y = x - 6$ è un asisntoto obliquo a $+\infty$.

   (2) dire in quali punti la funzione non è continua. **R.:** $x = 0$ in quanto $\lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0) = 0 = \lim_{x\to 0^-} x^2 e^{-x^2} = 0$ mentre $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \left|\frac{5}{x} + x - 6\right| = +\infty$.

   (3) Eventuali punti di non derivabilità della funzione. **R.:** $x = 0$ chiaramente, $x = 1$, $x = 5$.

   (4) Scrivere le ascisse dei punti di massimo e minimo locali e globali (relativo, assoluto). **R.:** $x = -1$ e $x = \sqrt{5}$ sono massimi locali, non globali; $x = 2, 3$ sono minimi assoluti.

   (5) Scrivere gli intervalli di concavità , convessità . **R.:** Ha la concavità rivolta verso l'alto negli intervalli $(-\infty, -\frac{5+\sqrt{17}}{2})$, $(-\frac{5-\sqrt{17}}{2}, 0)$, $(0, 1)$, $(5, +\infty)$ mentre negli intervalli $(-\frac{5+\sqrt{17}}{2}, -\frac{5-\sqrt{17}}{2})$, e $(1, 5)$ è rivolta verso il basso.

   (6) Disegnare un grafico qualitativo.

3. Si calcolino le seguenti derivate: $f'(e)$, $g'(\frac{\pi}{4})$, $h'(e)$ dove $f(x) = (\ln x)^{\ln x - x}$, $g(x) = (\tan x)^{2x\cos x}$, $h(x) = (x\ln x)^{\frac{2x}{\ln x}}$,

   R.: $f'(e) = (1-e)/e$, $g'(\frac{\pi}{4}) = \pi\sqrt{2}/2$, $h'(e) = 4e^2$

4. Si dica che relazione deve intercorrere fra α e β affinché converga l'integrale
   $\int_1^{+\infty}(1-\cos\frac{1}{x^\alpha})\ln^\beta(1+e^x)dx$ **R.:** Suddividiamo il pano (α,β) in quadranti.

   $\alpha \geq 0,\ \beta \geq 0$: Converge per $\beta < 2\alpha - 1$

   $\alpha < 0,\ \beta \geq 0$: diverge sempre

   $\alpha \leq 0,\ \beta < 0$: converge per $\beta < -1$.

   $\alpha > 0,\ \beta < 0$: converge per $\beta < 2\alpha - 1$.

   In tutte le altre regioni diverge.

5. Sia $x = arg(z)$ dove $z \in \mathbf{C}$. Si disegni sul piano (x, iy) l'insieme dei numeri complessi che soddisfa la relazione
   $$(|z|-1)(16x^2 - 24\pi x + 5\pi^2) \geq 0$$
   R.: Se $|z| \geq 1$ allora $x \leq \pi/4$ oppure $x \geq 5\pi/4$ mentre se $|z| \leq 1$ allora $\pi/4 < x < 5\pi/4$.

6. Si risolva l'equazione differenziale
   $$\begin{cases} y'(x) = 2xy\ln(1+x^2) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$
   R.: $y(x) = (1+x^2)^{1+x^2}e^{-x^2}$. È una normale equazione del primo ordine a variabili separabili.

7. Si trovino i valori di α per cui converge la serie e dire se trattasi di convergenza semplice o assoluta. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^\alpha + \ln^2 k}$

   R.: Converge per ogni valore real di α. Infatti $\frac{1}{k^\alpha + \ln^2 k}$ decresce all'aumentare di k e quindi è una serie di Leibnitz. Se $\alpha > 1$ converge pure assolutamente.

8. Per ciascuna delle seguenti funzioni si dica argomentando se ammette limite $(x,y) \to (0,0)$
   $f_1 = \frac{e^{\sin(xy)} - 1}{x^2+y^2}$, $f_2 = \frac{\tan(\sqrt{x}\tan x)}{|x|+|y|}$, $f_3 = \frac{x^8+y^8}{x^2-y^2}$

R.: (barrare la risposta esatta) f_1 : Si No, f_2 : Si No f_3 : Si No

La prima e la seconda si; la terza no. Usando lo sviluppo del seno e esponenziale già usati nel primo esercizio si ha

$$\frac{e^{\sin(xy)}-1}{x^2+y^2}, = \frac{1+\sin(xy)+\frac{\sin^2(xy)}{2}-1}{x^2+y^2} = \frac{xy+o((xy)^2)+\frac{1}{2}(xy)^2+o((xy)^4)}{x^2+y^2}$$

$$\lim_{\underline{x}\to\underline{0}} \frac{o((xy)^2)}{x^2+y^2} = \lim_{\underline{x}\to\underline{0}} \frac{o((xy)^2)}{(xy)^2}\frac{(xy)^2}{x^2+y^2} = 0$$

in quanto

$$\lim_{\underline{x}\to\underline{0}} \frac{o((xy)^2)}{(xy)^2} = 0 \qquad \frac{(xy)^2}{x^2+y^2} \le \frac{x^2y^2}{x^2} = y^2$$

e $y \to 0$ chiaramente.

$$\frac{\tan(\sqrt{x}\tan x)}{|x|+|y|} = \frac{\tan(\sqrt{x}\tan x)}{\sqrt{x}\tan x}\frac{\sqrt{x}\tan x}{|x|+|y|}$$

La prima frazione tende a 1 e la seconda a zero in quanto

$$\frac{\sqrt{x}\tan x}{|x|+|y|} \le \frac{\sqrt{x}\tan x}{|x|} \to 0$$

Per quanto riguarda la terza, sia $y = x+ax^8$. Chiaramente $(0,0)$ è punto di accumulazione dell'insieme $\{(x, x+ax^8)\}$. Abbiamo

$$f(x,y) = \frac{x^8+(x+ax^8)^8}{(x-y)(x+y)} = \frac{x^8+(x+ax^8)^8}{-ax^8(x+x+ax^8)} = \frac{2x^8+o(x^8)}{-2ax^9+o(x^9)}$$

ed il limite non esiste.

Soluzioni

Esercizio 1. Si tratta scrivere lo sviluppo di Taylor centrato nell'origine. $(\cos x)^{(\sin x)^2)} = e^{(\sin x)^2 \ln(\cos x)}$ Ora abbiamo

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + o(x^6), \qquad \cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + o(x^7)$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{6} \frac{(-1)^{k-1}x^k}{k} + o(x^7)$$

$$\ln(\cos x) = \ln(1 + (\cos x - 1)) = \sum_{k=1}^{6} \frac{(-1)^{k-1}(\cos x - 1)^k}{k} + o((\cos x - 1)^7)$$

$$e^x = \sum_{k=0}^{6} \frac{x^k}{k!} + o(x^6)$$

È chiaro che dobbiamo tenerci solo i termini di ordine 6 della funzione $(\sin x)^2 \ln(\cos x)$. Siccome $(\sin x)^2$ comincia con l'ordine 2, della funzione $\ln(\cos x)$ dobbiamo tenerci solo i termini fino all'ordine 4.

$$\cos x - 1 = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^5) \qquad (\cos x - 1)^2 = \frac{1}{4}x^4 + o(x^5)$$

Dunque

$$\ln(\cos x) = -\frac{1}{2}x^2 + \left(\frac{1}{24} - \frac{1}{2}\frac{1}{4}\right)x^4 + o(x^5) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4 + o(x^5)$$

$$(\sin x)^2 = x^2 - \frac{1}{3}x^4 + \frac{2}{45}x^6 + \frac{1}{60}x^6 + o(x^6)$$

Facendo il prodotto abbiamo

$$(\sin x)^2 \ln(\cos x) = \left(x^2 - \frac{1}{3}x^4 + \frac{2}{45}x^6 + o(x^6)\right)\left(-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4 + o(x^5)\right) = -\frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{12}x^6 + \frac{1}{6}x^6 + o(x^6)$$

Dunque abbiamo

$$(\sin x)^2 \ln(\cos x) = -\frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{12}x^6 + o(x^6)$$

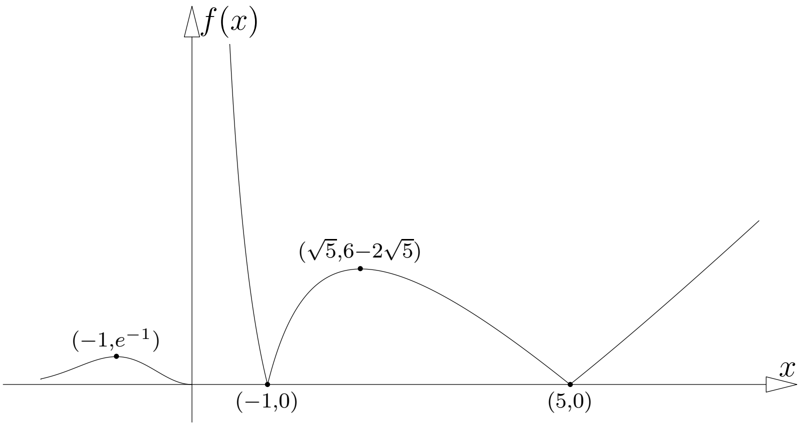
Inoltre

$$e^{-\frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{12}x^6 + o(x^6)} = 1 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{12}x^6 + o(x^6)$$

in quanto il termine successivo comincia con x^8. Il risultato è quindi

$$a_0 = -1, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = 0, \quad a_4 = \frac{1}{2}, \quad a_5 = 0, \quad a_6 = -\frac{1}{12}$$

Esercizio 2



Esercizio 4 Sia $\beta \geq 0$. La seconda funzione è asintotica a x^β per $x \to +\infty$ ossia $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln^\beta(1+e^x)}{x^\beta} = 1$. Scriviamo quindi

$$\ln^\beta(1+e^x) = \big(\ln(e^x) + \ln(1+e^{-x})\big)^\beta = \big(x + \ln(1+e^{-x})\big)^\beta = x^\beta \left(1 + \frac{\ln(1+e^{-x})}{x}\right)^\beta =$$

$$= x^\beta \left[1 + \beta \frac{\ln(1+e^{-x})}{x} + O\left(\left(\frac{\ln(1+e^{-x})}{x}\right)^2\right)\right] = x^\beta(1+o(1))$$

Sia $\alpha \geq 0$. La prima funzione è asintotica a $1/x^{2\alpha}$. Infatti

$$1 - \cos\frac{1}{x^\alpha} = \frac{1}{2x^{2\alpha}} + O\left(\frac{1}{x^{4\alpha}}\right) = \frac{1}{2x^{2\alpha}}(1+o(1))$$

Ne segue

$$\int_1^{+\infty} (1-\cos\frac{1}{x^\alpha}) \ln^\beta(1+e^x)dx = \int_1^{+\infty} \left[\frac{1}{2x^{2\alpha}}(1+o(1))\right] \big(x^\beta(1+o(1))\big)\,dx =$$

$$= \int_1^{+\infty} \left(\frac{x^{\beta-2\alpha}}{2}(1+o(1))\right) dx$$

La convergenza si ha se $\beta - 2\alpha < -1$ e quindi $\beta < 2\alpha - 1$. Se invece $\beta \geq 2\alpha - 1$ possiamo scrivere

$$\int_1^{+\infty} \left(\frac{x^{\beta-2\alpha}}{2}(1+o(1))\right) dx \geq \int_{\overline{x}}^{+\infty} \left(\frac{x^{\beta-2\alpha}}{2}\frac{1}{2}\right) dx$$

con un opportuno $\overline{x} \geq 1$. Ne segue la divergenza.

Sia ora $\alpha < 0$, $\beta \geq 0$. Della quantità $0 \leq 1 - \cos(1/x^\alpha) \leq 2$ si può solo dire che è limitata. Dunque possiamo dire

$$(1 - \cos \frac{1}{x^\alpha}) \ln^\beta(1 + e^x) = O(1)x^\beta(1 + o(1))$$

Poiché $\displaystyle\int_1^{+\infty} x^\beta dx = +\infty$ non possiamo maggiorare con una funzione positiva integrabile e quindi non abbiamo la convergenza assoluta da cui seguirebbe la convergenza semplice. Non possiamo dire ancora che l'integrale non converge semplicemente. Il problema nasce dal fatto che non possiamo scrivere, ad esempio, $0 < \delta \leq 1 - \cos(1/x^\alpha) \leq 2$. In tal caso avremmo

$$\int_1^{+\infty} (1 - \cos \frac{1}{x^\alpha}) \ln^\beta(1 + e^x)dx \geq \int_1^{+\infty} \delta x^\beta(1 + o(1))dx = +\infty$$

ma così non è .

I seguenti calcoli non sono richiesti in sede di valutazione degli elaborati.

Osserviamo che se $p_k \doteq \left(\frac{5}{4}\pi + 2k\pi\right)^{1/|\alpha|} \leq x \leq \left(\frac{7}{4}\pi + 2k\pi\right)^{1/|\alpha|} \doteq q_k$ allora $1 - \cos 1/x^\alpha \geq 1 + \sqrt{2}/2$ per cui possiamo dire che

$$\int_1^{+\infty} (1 - \cos \frac{1}{x^\alpha}) \ln^\beta(1 + e^x)dx \geq \sum_{k=1}^{+\infty} \int_{p_k}^{q_k} (1 + \frac{\sqrt{2}}{2})x^\beta(1 + o(1))dx = \frac{1}{\beta + 1}\left(q_k^{\beta+1} - p_k^{\beta+1}\right)$$

Si faccia poi vedere che il comportamento asintotico della quantità $\left(q_k^{\beta+1} - p_k^{\beta+1}\right)$ è $k^{\frac{\beta+1-|\alpha|}{|\alpha|}}$ e si ricordi $\beta > 0$. È chiaro quindi che $k^{\frac{\beta+1-|\alpha|}{|\alpha|}} > \frac{1 - |\alpha|}{|\alpha|} = \frac{1}{|\alpha|} - 1 > -1$ da cui $\sum k^{\frac{\beta+1-|\alpha|}{|\alpha|}} = +\infty$ da cui la divergenza.

Sia ora $\alpha < 0$ e $\beta < -1$. Possiamo maggiorare $(1 - \cos \frac{1}{x^\alpha}) \ln^\beta(1 + e^x) \leq 2x^\beta(1 + o(1))$ da cui la convergenza.

Sia ora $\alpha < 0$ e $-1 \leq \beta < 0$. La stessa maggiorazione di prima $(1 - \cos \frac{1}{x^\alpha}) \ln^\beta(1 + e^x) \leq 2x^\beta(1 + o(1))$ ora non ci serve in quanto $\displaystyle\int_1^{+\infty} x^\beta dx = +\infty$. Dobbiamo riprendere la stima di prima $\sum k^{\frac{\beta+1-|\alpha|}{|\alpha|}} = +\infty$ ed osservare che per $\beta > -1$ si ha $k^{\frac{\beta+1-|\alpha|}{|\alpha|}} > k^{\frac{-1+1-|\alpha|}{|\alpha|}} = k^{-1}$ da cui la divergenza.

L'ultima stima riguarda $\alpha > 0$ e $\beta < 0$. Possiamo stimare

$$(1 - \cos \frac{1}{x^\alpha}) \ln^\beta(1 + e^x) = \frac{1}{2}x^{\beta-2\alpha}(1 + o(1))$$

da cui la convergenza non appena $\frac{\beta}{2\alpha} < -1$ ossia $\beta < -2\alpha$. D'altra parte per $\beta \geq -2\alpha$ possiamo scrivere $\frac{1}{2}x^{\beta-2\alpha}(1 + o(1)) \geq \frac{1}{4}x^{\beta-2\alpha}$ almeno per $x > \overline{x}$ con $\overline{x}$ opportuno. Ne segue la divergenza