UNIVERSITÀ DI ROMA "TOR VERGATA" — FACOLTÀ DI INGEGNERIA
Corso di Ingegneria Online, A.A.2014–2015

Analisi Matematica I — Prova scritta del 02.02.2015

Per **l' esame da 12 crediti**: svolgere gli esercizi da 1 a 5(tempo 180 minuti)
Per **l'esame da 10 crediti**: svolgere tutti gli esercizi tranne il numero 5,6,7 (tempo 150 minuti)
Per **l'esame da 5 crediti, solo seconda parte**: svolgere gli esercizi esercizi 3,4,6,7 (tempo 100 minuti)

1. Si calcoli lo sviluppo di Taylor all'ordine 10 centrato nell'origine della funzione
   $f(x) = \sin(x^2 \ln(1-x))$

2. Sia data la funzione
   $$f(x) = \sqrt[3]{\frac{-x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x}$$
   (1) Trovare il dominio di f detto D, (2) eventuali asintoti, (3) monotonia, eventuali punti di massimo/minimo relativo/assoluto, (4) eventuali punti di non derivabilità, (5) concavità, convessità, (6) disegnare un grafico della funzione

3. Si trovi per quali valori di α converge l'integrale
   $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln(1+x^2))^\alpha + (x^4-1)^{1/3}}$

4. Studiare la convergenza della serie seguente al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$
   $$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(n^3 - \sqrt[4]{n^{12} + n^\alpha + 1}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$$

5. Sia data la funzione di due variabili $f(x,y)$ che vale $\dfrac{\ln(1+xy)}{y}$ se $y > 0$ e che vale x se $y \leq 0$.

   Si trovino i punti in cui è : i) continua, discontinua ii) derivabile, non derivabile. Laddove è derivabile si calcolino le derivare parziali, iii) Si trovino i punti in cui la funzione è differenziabile. Si svolgano tutti i calcoli necessari che vanno allegati al compito. **Sbagliare una delle derivate richieste al punto** ii)**, comporta l'annullamento del compito. Le derivate, qualora esistano, vanno calcolate anche sugli assi cartesiani**

6. Si risolva la equazione $3z^2 + 2z(4 + i\sqrt{3}) + 7 = 0$.

7. Si risolva l'equazione differenziale

$$\begin{cases} y''(x) + 2y'(x) + y = x \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \end{cases}$$

Punteggi

12 crediti Valgono rispettivamente 6, 7, 5, 6, 6

10 crediti Valgono rispettivamente 7.4, 7.5, 7.5, 7.5

5 crediti Valgono rispettivamente 8, 8, 6, 8

1) Abbiamo $\sin y = y - \dfrac{y^3}{6} + o(y^4)$. Poi abbiamo

$$y = x^2 \ln(1-x) = -x^2 \sum_{k=1}^{8} \frac{x^k}{k} + o(x^{10})$$

$$y^3 = -x^9 + 3\left(-\frac{x^{10}}{2}\right) + o(x^{10})$$

Ne segue che

$$\sin(x^2 \ln(1-x)) = -x^2 \sum_{k=1}^{8} \frac{x^k}{k} + \frac{x^9}{6} - \frac{1}{2}\left(-\frac{x^{10}}{2}\right) + o(x^{10})$$

2). Il dominio della funzione è tutto $\mathbb{R}$ essendo la radice cubica.

Segno. $\dfrac{-x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2} + 2x \geq$ se e solo se $x(2x^2 - 3x - 12) \leq 0$ e quindi, dette $x_- = \dfrac{3-\sqrt{105}}{4}$, $x_+ = \dfrac{3+\sqrt{105}}{4}$, si ha che la funzione è positiva per $x < x_-$ e $0 < x < x_+$; negativa altrove.

Non ha asintoti orizzontali né verticali. Per quanto riguarda gli asintioti obliqui, possiamo seguire due strade.

La prima. Eseguiamo lo sviluppo asintotico della funzione.

$$f(x) = \frac{-x}{3^{1/3}} \sqrt[3]{1 - \frac{3}{2x} - \frac{6}{x^2}} = \frac{-x}{3^{1/3}}\left(1 - \frac{1}{3}\frac{3}{2x} + O(\frac{1}{x^2})\right) = \frac{-x}{3^{1/3}} + \frac{1}{2 \cdot 3^{1/3}} + O(\frac{1}{x})$$

da cui segue che $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) - \left(\dfrac{-x}{3^{1/3}} + \dfrac{1}{2\cdot 3^{1/3}}\right) = 0$

La seconda. Come al solito si calcola $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)/x = -3^{-1/3}$. Poi si calcola

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) + 3^{-1/3}x = \sqrt[3]{\frac{-x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x} + 3^{-1/3}x$$

Ora si può sviluppare asintoticamente come sopra o usare $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$ e quindi

$$\sqrt[3]{\frac{-x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x} + 3^{-1/3}x = \frac{\left(\sqrt[3]{\frac{-x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x}\right)^3 + \left(3^{-1/3}x\right)^3}{\left(\sqrt[3]{\frac{-x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x}\right)^2 + (3^{-1/3}x)^2 - (3^{-1/3}x)\left(\sqrt[3]{\frac{-x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x}\right)}$$

ossia

$$\frac{\frac{x^2}{2}\left(1+\frac{4}{x}\right)}{\frac{x^2}{3^{2/3}}\left(1-\frac{3}{2x}-\frac{6}{x^2}\right)^{2/3}+\frac{x^2}{3^{2/3}}+\frac{x}{3^{1/3}}\cdot\frac{x}{3^{1/3}}\left(1-\frac{3}{2x}-\frac{6}{x^2}\right)^{1/3}}=$$
$$=\frac{3^{2/3}}{x^2}\frac{\frac{x^2}{2}\left(1+\frac{4}{x}\right)}{\left(1-\frac{3}{2x}-\frac{6}{x^2}\right)^{2/3}+1+\left(1-\frac{3}{2x}-\frac{6}{x^2}\right)^{1/3}}\to\frac{3^{2/3}}{6}=\frac{1}{2\cdot 3^{1/3}}$$

Derivate

$$f'(x)=\frac{1}{3}\frac{-x^2+x+2}{\left(\sqrt[3]{\frac{-x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+2x}\right)^2}\geq 0 \iff -1\leq x\leq 2$$

e quindi $(-1,2^{1/3})$, è un minimo mentre $(2,(4/3)^{1/3})$ è un massimo. Tralasciamo i punti di flesso. Il grafico è facilmente tracciabile. Per poter "fare bella figura" in chi corregge, sarebbe opportuno evidenziare che per $x\to 0, x_-, x_+$, la tangente al grafico tende a diventare verticale.

3) Si trovi per quali valori di α converge l'integrale
$\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x(\ln(1+x^2))^\alpha+(x^4-1)^{1/3}} \doteq \int_1^{+\infty} f_\alpha(x)dx$. Se dimostriamo che $f_\alpha(x)\leq g_\alpha(x)$ con $\int_1^{+\infty} g_\alpha(x)dx<+\infty$, allora anche $\int_1^{+\infty} f_\alpha,(x)dx<+\infty$. Spezziamo l'integrale come

$$\int_1^{+\infty} f_\alpha(x)dx=\int_1^2 f_\alpha(x)dx+\int_2^{+\infty} f_\alpha(x)dx\doteq I_1+I_2$$

Cominciamo con I_1.

$$f_\alpha(x)\leq\frac{1}{x(\ln(1+x^2))^\alpha}$$

ed essendo $\displaystyle\int_1^2\frac{1}{x(\ln(1+x^2))^\alpha}dx$ un normale integrale di Riemann di una funzione continua, esso converge per qualsiasi valore di α.

I_2.

$$f_\alpha(x)\leq\frac{1}{(x^4-1)^{1/3}},\qquad \int_2^{+\infty}\frac{dx}{(x^4-1)^{1/3}}<+\infty$$

Dunque l'integrale converge per ogni valore di α.

4) Sia $0 < \alpha < 12$. Detta a_n la successione, si ha

$$
\begin{aligned}
a_n &= \left(n^3 - n^3\sqrt[4]{1+n^{\alpha-12}+n^{-12}}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) = \\
&= n^3\left[1 - 1 - \frac{n^{\alpha-12}}{4} - \frac{1}{4n^{12}} + O\left(\left(\frac{n^{\alpha-12}}{4} + \frac{1}{4n^{12}}\right)^2\right)\right]\left(\frac{1}{n^\alpha} + O\left(\frac{1}{n^{3\alpha}}\right)\right)
\end{aligned}
$$

Come si vede, ogni termine di a_n dà luogo ad una serie convergente e quindi la serie $\sum a_n$ converge per ogni valore di α compreso fra $\alpha = 0$ e $\alpha = 12$.

Sia $\alpha \le 0$. Abbiamo

$$
\begin{aligned}
a_n &= \left(n^3 - n^3\sqrt[4]{1+n^{\alpha-12}+n^{-12}}\right) O(1) = \\
&= n^3\left[1 - 1 - \frac{n^{\alpha-12}}{4} - \frac{1}{4n^{12}} + O\left(\left(\frac{n^{\alpha-12}}{4} + \frac{1}{4n^{12}}\right)^2\right)\right] O(1)
\end{aligned}
$$

ed accade la stessa cosa.

Sia ora $\alpha > 12$.

$$
\begin{aligned}
a_n &= \left(n^3 - n^{\alpha/4}\sqrt[4]{1+n^{12-\alpha}+n^{-\alpha}}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) = \\
&= \left[n^3 - n^{\alpha/4} - \frac{n^{12-3\alpha/4}}{4} - \frac{1}{4n^{3\alpha/4}} + n^{\alpha/4} O\left(\left(\frac{n^{12-3\alpha/4}}{4} + \frac{1}{4n^{3\alpha/4}}\right)^2\right)\right]\left(\frac{1}{n^\alpha} + O\left(\frac{1}{n^{3\alpha}}\right)\right)
\end{aligned}
$$

Ora $\dfrac{n^{\alpha/4}}{n^\alpha} = n^{-3\alpha/4}$ e se vogliamo che la relativa serie converga, bisogna che $\alpha > 4/3,$; relazione questa certamente soddisfatta da $\alpha > 12$. Tutti gli altri temini vanno a zero più velocememte per cui le relative serie convergono anch'esse.

La risposta quindi è che la serie converge per ogni valore di α.

5) Si veda qui http://www.mat.uniroma2.it/˜perfetti/didattica/gestionale-analisiII-14-15/02-02-2015–ing-gest-frontale.pdf

6). Usando la formula delle equazioni di secondo grado si ha

$$z_{1,2} = \frac{1}{3}\left(-4 - i\sqrt{3} \pm \sqrt{8(i\sqrt{3}-1)}\right) = \frac{1}{3}\left(-4 - i\sqrt{3} \pm 4\sqrt{\frac{i\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}}\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\left(-4 - i\sqrt{3} \pm 4e^{i3\pi/4}\right) = \frac{1}{3}\left(-4 - i\sqrt{3} \pm 4(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})\right)$$

da cui

$$-2 + \frac{i\sqrt{3}}{3}, \qquad -\frac{2}{3} - i\sqrt{3}$$

7). La soluzione generale è $y(x) = axe^{-x} + be^{-x} + x - 2$ da cui con le condizioni iniziali $y(x) = 2xe^{-x} + 3e^{-x} + x - 2$