

UNIVERSITÀ DI ROMA “TOR VERGATA” — FACOLTÀ DI INGEGNERIA
Corso di Ingegneria Online, A.A.2014–2015
Analisi Matematica II — Prova scritta del 02.02.2015, primo appello

Per l'esame da 9 crediti: svolgere tutti gli esercizi (tempo 180 minuti)

Per l'esame da 5 crediti, solo seconda parte (ex analisi IV): svolgere gli esercizi 5,6,7, (tempo 100 minuti)

Per l'esame da 5 crediti, solo prima parte (ex analisi III): svolgere gli esercizi 1,2,3,4 (tempo 100 minuti)

1) Si consideri la funzione $f(x, y) = -\frac{3}{2}y^2 + x^3 + 8y + 9xy$

1.1) Si individuino i punti critici. Successivamente se ne stabilisca la natura.

1.2) Si trovino massimo e minimo assoluti della funzione all'interno del triangolo di vertici $(0, 0), (1, 0), (1, 1)$ (lati compresi).

2) Usando il teorema delle funzioni implicite si trovi il piano tangente $ax + by + cz + d = 0$ alla funzione definita implicitamente dalla relazione $(\ln x)^{y^2+1} + y^{e^{2z}} + e^{2z \ln x} + x = e + 3$ nel punto $(e, 1, 0)$

3) Si calcoli il volume del solido racchiuso dal cilindro di equazione $\{x^2 + y^2 \leq -y\}$, dal cono $z = 3\sqrt{x^2 + y^2}$ e dal piano (x, y) .

4) Si calcoli il flusso del campo vettoriale $\underline{F}(\underline{x}) = x\underline{i} - y\underline{j} + (2x - 2y)\underline{k}$ verso l'esterno della superficie laterale del volume piramidale la cui base è data dal rettangolo $A \equiv (1, -1, 0)$, $B \equiv (1, 2, -3)$, $C \equiv (-1, 2, -1)$, $D \equiv (-1, -1, 2)$, ed il vertice nel punto $E \equiv (0, 0, 3)$.

5) Si risolva l'equazione differenziale

$$\begin{cases} y''(x) + 2y'(x) + y = x^2 \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \end{cases}$$

6) Si scriva le serie di Fourier della funzione $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, 2π -periodica, dispari, che nell'intervallo $[0, \pi]$ è data da

$$\begin{cases} \sin x + \cos x & 0 < x < \pi/2, \\ 0 & \pi/2 \leq x < \pi \end{cases}$$

Si dica argomentando se la convergenza è uniforme.

7) Si considerino la successione di funzioni $f_n(x) = n^3 x e^{-nx}$, $x \geq 0$.

1) Si trovi l'insieme di convergenza

2) si dica se in tale insieme la convergenza è uniforme

3) si dica se la convergenza è uniforme nell'intervallo $[1, +\infty)$

4) si dica se $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x) dx = \int_0^{+\infty} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) dx$ e se ne spieghi il motivo

5) si dica se $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) dx$ e se ne spieghi il motivo

6) si dica se $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_1^2 f_n(x) dx = \int_1^2 \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) dx$ e se ne spieghi il motivo

Punteggi

10 crediti I punteggi sono rispettivamente 7, 3, 4, 5, 3, 7, 7

5 crediti prima parte (ex Analisi III) I punteggi sono rispettivamente 9, 8, 8, 9

5 crediti seconda parte (ex Analisi IV) I punteggi sono rispettivamente 8, 13, 13

Soluzione esercizio 1

È un classico esercizio ed infatti è fra quelli preferiti dagli studenti.

1.1) $f_x = 3x^2 + 9y = 0$, $f_y = -3y + 8 + 9x = 0$. Confrontando le due equazioni otteniamo

$$-3x^2 = 3(8 + 9x) = 0 \iff x = -1, -8 \implies y = -1/3 - 64/3$$

$$f_{xx} = 6x, \quad f_{yy} = -3, \quad f_{xy} = 9,$$

$$f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2 = -18x - 81 \Big|_{(-1, -1/3)} = -63 \text{ sella}$$

$$f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2 = -18x - 81 \Big|_{(-8, -64/3)} = 63 \quad f_{xx} = 6x \Big|_{(-8, -64/3)} = -64 \text{ massimo}$$

1.2) All'interno del triangolo non ci sono punti critici. Se ce ne fossero li avremmo trovati nel punto 1.1. D'altra parte, essendo la funzione continua ed essendo il triangolo chiuso e limitato, massimo e minimo esistono (Teorema di Weierstrass) e vanno trovati sul bordo del triangolo che consta di tre lati.

“Base”. $0 \leq x \leq 1$, $y = 0$ e quindi $f(x, 0) = x^3$ il cui minimo è $x = 0$ e massimo è $x = 1$. Inoltre $f(0, 0) = 0$, $f(1, 0) = 1$.

“Altezza”. $0 \leq y \leq 1$, $x = 1$ e quindi $g(y) \doteq f(1, y) = -\frac{3}{2}y^2 + 1 + 8y + 9y$. $g'(y) = -3y^2 + 17 \geq 0$ se e solo se $-\sqrt{17/3} \leq y \leq \sqrt{17/3}$ per cui la funzione è sempre crescente ($0 \leq y \leq 1$) e $f(1, 0) = 1$, $f(1, 1) = 15/2$.

“Ipotenusa”. $g(x) = f(x, x) = x^3 + \frac{15}{2}x^2 + 8x$, $0 \leq x \leq 1$. $g'(x) \geq 0$ se $x \leq \frac{-15 - \sqrt{129}}{6}$ oppure $x \geq x_0 = \frac{-15 + \sqrt{129}}{6} \sim \frac{-15 + 11.36}{6} \sim -0.61$ per cui (x_0, x_0) decresce per $0 \leq x \leq x_0$ e cresce per $x_0 \leq x \leq 1$. Quindi x_0 è un punto di minimo *per la restrizione* $f(x, x)$ e $f(x_0, x_0) = \frac{405 - 43\sqrt{129}}{36} \sim -2.32$.

La conclusione è che il punto di minimo è (x_0, x_0) ed il punto di massimo è $(1, 1)$.

Soluzione esercizio 2

Sia $F(x, y, z) = (\ln x)^{y^2+1} + y^{e^{2z}} + e^{2z \ln x} + x - e - 3$ ed osserviamo che $F(e, 1, 0) = 0$. ($(e, 1, 0) \doteq P$.)

$$F_x = \left((\ln x)^{y^2+1} \frac{y^2+1}{x} + e^{2z \ln x} \frac{2z}{x} + 1 \right) \Big|_P = \frac{2}{e} + 1$$

$$F_y = \left((\ln x)^{y^2+1} 2y \ln x + y^{e^{2z}} \frac{e^{2z}}{y} \right) \Big|_P = 2 + 1$$

$$F_z = \left(y^{e^{2z}} 2ze^{2z} + e^{2z \ln x} 2 \ln x \right) \Big|_P = 2$$

Essendo $F_z(P) \neq 0$, possiamo dire che la funzione definita implicitamente è $z = f(x, y)$. Avremmo potuto anche imporre $y = h(x, z)$ oppure $x = k(y, z)$. Dunque esiste un intorno $U \subset \mathbf{R}^3$ del punto P in cui la relazione $F \equiv 0$ può scriversi come $z = f(x, y)$ con $f(e, 1) = 0$. Quindi si ha $F(x, y, f(x, y)) = 0$ per $(x, y, z) \in U$. Chiaramente

$$F_x + F_z \cdot f_x \equiv 0, \quad F_y + F_z \cdot f_y \equiv 0$$

Ne segue

$$f_x(e, 1) = -\frac{F_x(P)}{F_z(P)} = -\left(\frac{1}{e} + \frac{1}{2}\right), \quad f_y(e, 1) = -\frac{F_y(P)}{F_z(P)} = -\frac{3}{2}$$

Quindi il piano tangente è

$$z - 0 = f_x(e, 1)(x - e) + f_y(e, 1)(y - 1) = -\left(\frac{1}{e} + \frac{1}{2}\right)(x - e) - \frac{3}{2}(y - 1)$$

Gli studenti verifichino che se avessero scelto le funzioni $h(x, z)$ oppure $k(y, z)$, il risultato sarebbe stato lo stesso.

Soluzione esercizio 3

La prima cosa da fare è un disegno.

$$x^2 + y^2 \leq -y \leq 0 \iff x^2 + (y + \frac{1}{2})^2 \leq \frac{1}{4}$$

che in $\mathbf{R}^3$ rappresenta un cilindro di raggio $1/2$ e centro in $(0, -1/2)$. Il volume che cerchiamo è *integrazione per fili*

$$\int \int_{x^2 + (y + \frac{1}{2})^2 \leq \frac{1}{4}} \left(\int_0^{3\sqrt{x^2 + y^2}} dz \right) dx dy = \int \int_{x^2 + (y + \frac{1}{2})^2 \leq \frac{1}{4}} 3\sqrt{x^2 + y^2} dx dy$$

Usiamo coordinate polari *centrate nell'origine* $x = r \cos t$, $y = r \sin t$.

$$x^2 + y^2 \leq -y \leq 0 \iff r^2 \leq -r \sin t \iff r \leq -\sin t$$

e quindi $\pi \leq t \leq 2\pi$. Lo iacobiano è r ed inoltre

$$0 \leq r \leq -\sin t, \quad \pi \leq t \leq 2\pi$$

L'integrale è

$$3 \int_{\pi}^{2\pi} \left(\int_0^{-\sin t} \underbrace{r}_{\text{iacobiano}} \underbrace{r}_{r=\sqrt{x^2+y^2}} dr \right) dt = 3 \int_{\pi}^{2\pi} \frac{1}{3} - \sin^3 t = \frac{4}{3}$$

Avremmo potuto scegliere coordinate polari centrate nel punto $(0, -1/2)$ ma l'integrale non è risolvibile in forma chiusa

Soluzione esercizio 4

Sia $\underline{u} = A - B$, $\underline{v} = A - C$ e si trovi $\underline{u} \wedge \underline{v} \doteq \underline{w}$. Il piano su cui giacciono i tre punti A, B, C è dato dall'equazione $\underline{x} \cdot \underline{w} = 0$ ossia $x + y + z = 0$. Si verifica che anche D appartiene al piano. La divergenza del campo vettoriale è nulla per cui

$$\sum_{i=1}^4 \int \int_{S_i} (\underline{F}(\underline{x}), \underline{n}^{(e_i)}) d\sigma^{(i)} + \int \int_b (\underline{F}(\underline{x}), \underline{n}^{(b)}) d\sigma^{(b)} = 0$$

dove S_i è una delle quattro facce laterali e b è la base. Quindi

$$\sum_{i=1}^4 \int \int_{S_i} (\underline{F}(\underline{x}), \underline{n}^{(e_i)}) d\sigma^{(i)} = - \int \int_b (\underline{F}(\underline{x}), \underline{n}^{(b)}) d\sigma^{(b)} = 0$$

La normale $\underline{n}^{(b)}$ è $(-1, -1, -1)/\sqrt{3}$ essendo la componente z del vertice, superiore ad ognuna delle componenti z dei vertici di base. $(\underline{F}(\underline{x}), \underline{n}^{(b)}) = -x + y - 2x + 2y = 3y - 3x$.

$$- \int \int_b (\underline{F}(\underline{x}), \underline{n}^{(b)}) d\sigma^{(b)} = - \int_{-1}^1 dx \int_{-1}^2 dy (3y - 3x) = -9$$

Chi volesse può parametrizzare il piano di base e pervenire all'integrale qui sopra.

Soluzione esercizio 5

Come noto la soluzione dell'equazione $y'' + 2y' + y = x^2$ è data dalla somma della più generale soluzione dell'omogenea associata $y'' + 2y' + y = 0$ e di una particolare soluzione della non omogenea. Dalla teoria sappiamo che l'omogenea associata ha come soluzione $y(x) = ae^{-x} + bxe^{-x}$. Infatti il polinomio associato è $(\lambda + 1)^2 = 0$ (radice $\lambda = -1$ doppia e quindi le soluzioni di base sono e^{-x} e xe^{-x}). Per trovare una soluzione della non omogenea *proviamo* $y(x) = c + dx + ex^2$.

$$y'' + 2y' + y = 2e + 2(d + 2ex) + c + dx + ex^2 = x^2 \iff e = 1, d + 4e = 0, c + 2e + 2d = 0$$

per cui $d = -4$, $c = 6$ e quindi alla fine la soluzione è $y(x) = ae^{-x} + bxe^{-x} + 6 - 4x + x^2$. Per trovare a e b imponiamo le condizioni iniziali ossia

$$y(0) = 0 = a + b + 6 = \quad y'(0) = -a + b - 4 = 0 \iff a = 1, b = 5$$

Soluzione esercizio 7

La funzione è

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi \leq x \leq -\pi/2 \\ -\cos x + \sin x & -\pi/2 \leq x \leq 0 \\ \cos x + \sin x & 0 \leq x \leq \pi/2 \\ 0 & \pi/2 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

ed è una funzione dispari. I coefficienti di Fourier sono

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) f(x) dx = 0,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx) f(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(kx) f(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin(kx) f(x) dx$$

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin(kx) (\cos x + \sin x) dx = \begin{cases} \frac{\sin \frac{\pi k}{2} + k \cos \frac{\pi k}{2} - k}{1 - k^2}, & k \neq 1 \\ \frac{\pi + 2}{4}, & k = 1 \end{cases}$$

La convergenza non può essere uniforme. Se lo fosse, la funzione limite dovrebbe essere continua....

Soluzione esercizio 7

1) La successione converge per ogni $x \geq 0$. Infatti se $x = 0$ si ha $f_n(0) \equiv 0$. Se $x > 0$ il limite notevole $\lim_{n \rightarrow \infty} n^3 e^{-nx} = 0$ ci dice che converge a zero. Quindi $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$ per ogni $x \geq 0$.

2) Per la convergenza uniforme nell'insieme I dobbiamo far vedere che $\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon: n > n_\varepsilon \implies \sup_{x \in I} |f_n(x)| < \varepsilon$.

Per cercare $\sup_{x \in I} |f_n(x)|$ eseguiamo la derivata

$$f'(x) = n^3 e^{-nx} (1 - nx) \geq 0 \iff x \leq \frac{1}{n} \implies f(x) \leq f\left(\frac{1}{n}\right) \leq \frac{n^3}{n} e^{-1} \rightarrow +\infty$$

e quindi la convergenza non è uniforme per $x \geq 0$.

3) Nell'insieme $[1, +\infty)$ la funzione $f_n(x)$ ha massimo corrispondente a $x = 1$ in quanto per $x \geq 1/n$ decresce. Quindi $\sup_{x \in [1, +\infty)} |f_n(x)| = f_n(1) = n^3 e^{-n} \rightarrow 0$ da cui la convergenza uniforme.

4) Prima di analizzare l'uguaglianza, bisogna dire che non possiamo dire che vale zero essendo $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$ in quanto bisogna usare il passaggio al limite sotto gli integrali e ciò è possibile solo se la convergenza è uniforme. Inoltre, quand'anche la convergenza fosse stata uniforme, per poter usare il teorema del passaggio al limite sotto il segno di integrale, bisogna che il cammino di integrazione sia limitato e non non-limitato come in codesto caso.

Basta integrare per parti due volte per ottenere

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty \neq \int_0^{+\infty} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) dx = 0$$

5) La convergenza non è uniforme e non possiamo passare al limite sotto l'integrale. D'altra parte

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} n(1 - e^{-n} - ne^{-n}) = +\infty \neq \int_0^{+\infty} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) dx = 0$$

6) Stavolta in $[1, 2]$ la convergenza è uniforme e quindi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_1^2 f_n(x) dx = \int_1^2 \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) dx = 0$$