Analisi II per Ingegneria Online
Prova scritta del 21–02–2015 A.A. 2014/2015

3 ore. Chi "ha 9CFU" svolga gli esercizi da uno a otto. I punti sono rispettivamente 6,4,5,4,4,6,5,6.
Chi "ha 10CFU" svolga gli esercizi da uno a sette. I punti sono rispettivamente 6,4,5,4,4,6,5.
Si possono consultare libri, appunti, note etc.

Nome(Stampatello) **Cognome**(Stampatello) **Matricola**

1) Sia data la funzione Sia data la funzione $f(\underline{x}) = \begin{cases} \dfrac{x\sin y - y\sin x}{xy} & x \neq 0 \text{ e } y \neq 0 \\ 0 & x = 0 \text{ o } y = 0 \end{cases}$

Si scrivano gli insiemi/punti punti in cui è :

i) continua **R.:**

ii) derivabile **R.:**

iii) Scrivere le derivate parziali **R.:**

iv) Si scrivano i punti/insieme in cui la funzione è differenziabile **R.:**

v) Si scriva il valore della derivata direzionale calcolata in $(0,0)$ e nella direzione $(1,1)$. **R.:**

Sbagliare una delle derivate richieste al punto iii)**, comporta l'annullamento del compito. Le derivate, qualora esistano, vanno calcolate anche sugli assi cartesiani**

2) Sia data la seguente funzione $f(x,y) = \dfrac{13}{2}x^4 + y^2 - 13xy + 6y$. Si trovino i punti critici e se ne stabilisca la natura

R.: massimi minimi selle

3) Sia S la superficie definita dalle relazioni $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ e $x^2 + y^2 - 1 \leq 0$. Si tratta quindi di due calotte giacenti sulla superficie della sfera. Si calcoli il flusso del campo vettoriale $\underline{F}(\underline{x}) = -y\underline{i} + x\underline{j} + (x^2 + y^2 - x)\underline{k}$ attraverso S. **R.:**

4) Si calcoli il volume del solido S definito da $S = \{(\underline{x} \in \mathbf{R}^3 : x^2 + y^2 \leq y, \ 0 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2}\}$.
R.:

5) Si calcoli l'area della superficie del solido S definito da $S = \{(\underline{x} \in \mathbf{R}^3 : x^2 + y^2 = y, \ 0 \leq z \leq x^2 + y^2\}$. Quindi si tratta di una regiore che giace sulla superficie laterale di un cilindro e i cui punti hanno ordinata limitata superiormente ed inferiormente **R.:**

6) Sia data la successione di funzioni $f_n(x) = nx(x-1)e^{-n|x-1|}$.

i) Si trovi l'insieme di convergenza puntuale in $(-\infty, +\infty)$

ii) Si dica se la convergenza è uniforme in $[1, 2]$ Si No

iii) si dica se la convergenza è uniforme in $(1, 2]$, Si No

iv) si dica se la convergenza è uniforme in $[-1, 0]$, Si No

v) si dica se la convergenza è uniforme in $[-1/2, 1/2]$, Si No

vi) motivando adeguatamente si dica quanto vale $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_1^{+\infty} f_n(x)dx$, **R.:**

vii) motivando adeguatamente si dica quanto vale $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{0} f_n(x)dx$, **R.:**

7) Si calcoli $\int_\gamma (ydx + xdy + xydz)$ dove γ è una curva regolare a tratti, semplice, il cui sostegno è il bordo del triangolo di vertici i punti $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ orientato in uno dei due modi possibili **R.:**

8) Si risolva la seguente equazione differenziale

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = \sin x \quad 0 < x < \pi, \ t > 0 \\ u(x, 0) = -\sin x, \quad u_t(x, 0) = 0, \quad u(0, t) = 0, u(\pi, t) = 0 \end{cases}$$

R.:

Soluzione 1

Si veda qui
http://www.mat.uniroma2.it/~perfetti/didattica/analisiII_elettronica_11-12-9cfu/20-02-2012-AN-II-Elettr_e_Telec_2011-2012.pdf

Soluzione 2

$f_x = 0 = 26x^3 - 13y = 0, \qquad f_y = 0 = 2y - 13x + 6 \implies (-2, -16), \quad (1/2, 1/4), \qquad (3/2, 27/4)$

$$\big(f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2\big)\Big|_{(-2,-16)} = 455 \qquad f_{xx}\Big|_{(-2,-16)} = 78 \cdot 4 > 0 \qquad \text{minimo}$$

$$\big(f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2\big)\Big|_{(1/2,1/4)} = -130 \qquad \text{sella}$$

$$\big(f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2\big)\Big|_{(3/2,27/4)} = 182 \qquad f_{xx}\Big|_{(-2,-16)} = 117/2 \cdot 4 > 0 \qquad \text{minimo}$$

Soluzione 3

Si possono adottare due strade. **La prima**.

$div\underline{F}(\underline{x})=0$. La superficie S è composta dall'unione delle due calotte, S_1 e S_2 che si trovano in posizioni opposte rispetto al piano (x,y). S_1 sormonta il cilindro $x^2+y^2\leq 1$ mentre S_2 soggiace. Detto V il volume cilindrico chiuso dalle due calotte, sia S' la superficie laterale che contorna V. Per il Teorema di Gauss si ha

$$\int\int_{S_1}(\underline{F}(\underline{x}),\underline{n}^{(e)})d\sigma+\int\int_{S_2}(\underline{F}(\underline{x}),\underline{n}^{(e)})d\sigma+\int\int_{S'}(\underline{F}(\underline{x}),\underline{n}^{(e)})d\sigma=0$$

Per calcolare il terzo integrale parametrizziamo S' come

$$x=\cos t,\quad y=\sin t,\quad z=u,\qquad -\sqrt{4-x^2-y^2}=-\sqrt{5}\leq u\leq\sqrt{5}=\sqrt{4-x^2-y^2}$$

Il vettore ortogonale al cilindro e normalizzato a 1 è $\underline{v}=\cos t\underline{i}+\sin t\underline{j}$ mentre

$$\underline{F}(\underline{x})\Big|_{\underline{x}\in S'}=(-\sin t,\cos t,1-\cos t)$$

e quindi $(\underline{F}(\underline{x}),\underline{n}^{(e)})=0$ e quindi

$$\int\int_{S'}(\underline{F}(\underline{x}),\underline{n}^{(e)})d\sigma=0=\int\int_{S_1}(\underline{F}(\underline{x}),\underline{n}^{(e)})d\sigma+\int\int_{S_2}(\underline{F}(\underline{x}),\underline{n}^{(e)})d\sigma$$

Seconda strada. Calcoliamo direttamente

$$\int\int_{S_1}(\underline{F}(\underline{x}),\underline{n}^{(e)})d\sigma+\int\int_{S_2}(\underline{F}(\underline{x}),\underline{n}^{(e)})d\sigma$$

Parametrizziamo le calotte sferiche sempre con coordinate cilindriche e per quanto riguarda S_1 abbiamo

$$x=\sqrt{4-u^2}\cos t,\ y=\sqrt{4-u^2}\sin t,\ z=u,\qquad 0\leq t\leq 2\pi,\qquad \sqrt{3}\leq u\leq 2,\qquad (\underline{x}=\underline{\varphi}(u,t))$$

Abbiamo fissato la quota sulla calotta che va da $\sqrt{4-x^2-y^2}=\sqrt{3}$ al vertice della sfera che implica $u=2$ e si riduce ad un solo punto. $\underline{\varphi}_u\wedge\underline{\varphi}_t=-\underline{i}\sqrt{4-u^2}\cos t-\underline{i}\sqrt{4-u^2}-\underline{k}u$. Il vettore ortogonale a S_1 ma non normalizzato a 1 e che punta verso l'alto è $\underline{v}=\sqrt{4-u^2}\cos t\underline{i}+\sqrt{4-u^2}\sin t\underline{j}+u\underline{k}$ e quindi

$$(\underline{F}(\underline{x}),\underline{v})=-\sqrt{4-u^2}\sin t\cdot\sqrt{4-u^2}\cos t+\sqrt{4-u^2}\cos t\cdot\sqrt{4-u^2}\sin t+(4-u^2-\sqrt{4-u^2}\cos t)u$$

e quindi

$$\int\int_{S_1}(\underline{F}(\underline{x}),\underline{n}^{(e)})d\sigma=\int_0^{2\pi}dt\int_{\sqrt{3}}^2 du(4u-u^3)\neq 0$$

La parametrizzazione di S_2 è

$$x=\sqrt{4-u^2}\cos t,\ y=\sqrt{4-u^2}\sin t,\ z=u,\qquad 0\leq t\leq 2\pi,\qquad -\sqrt{3}\leq u\leq -2$$

Il vettore ortogonale a S_2 ma non normalizzato a 1 e che punta verso il basso è $\underline{v}=\sqrt{4-u^2}\cos t\underline{i}+\sqrt{4-u^2}\sin t\underline{j}+u\underline{k}$ e quindi

$$(\underline{F}(\underline{x}),\underline{v})=-\sqrt{4-u^2}\sin t\cdot\sqrt{4-u^2}\cos t+\sqrt{4-u^2}\cos t\cdot\sqrt{4-u^2}\sin t+(4-u^2-\sqrt{4-u^2}\cos t)u$$

$$\int\int_{S_2}(\underline{F}(\underline{x}),\underline{n}^{(e)})d\sigma=\int_0^{2\pi}dt\int_{-\sqrt{3}}^{-2}du(4u-2u^3)$$

La somma è chiaramente zero.

Sempre usando coordinate cilindriche, la parametrizzazione della calotta superiore può anche darsi come

$$x=r\cos t,\ y=r\sin t,\ z=\sqrt{9-r^2},\qquad 0\leq t\leq 2\pi,\ 0\leq r\leq 2$$

e conseguentemente la calotta inferiore

$$x=r\cos t,\ y=r\sin t,\ z=\sqrt{9-r^2},\qquad 0\leq t\leq 2\pi,\ -2\leq r\leq 0$$

Soluzione 4

Si veda http://www.mat.uniroma2.it/~perfetti/didattica/analisi3online/AA14-15/appello-02-02-2015-analisi-II.pdf

L'unica differenza è la costante davanti alla radice e soprattutto che il cilindro è centrato in $(0,1/2)$ e quindi $0 \le t \le \pi$.

Soluzione 5

La parametrizzazione della superficie con coordinate polari centrate nell'origine è

$$x = r\cos t, \quad y = r\sin t, \quad z = r^2 \qquad 0 \le r \le \sin t, \quad 0 \le t \le \pi \qquad \underline{x} = \underline{\varphi}(r,t)$$

$$\underline{\varphi}_r \wedge \underline{\varphi}_t = \underline{i}(-2r^2\cos t) - \underline{j}(2r^2\sin t) + \underline{k}r, \qquad \|\underline{\varphi}_r \wedge \underline{\varphi}_t\| = r\sqrt{5}$$

Per cui quello che cerchiamo è

$$\int_0^\pi \left(\int_0^{\sin t} \sqrt{5} r dr \right) dt = \frac{\pi\sqrt{5}}{2}$$

Soluzione 6

http://www.mat.uniroma2.it/~perfetti/didattica/gestionale-analisiII-14-15/02-02-2015–ing-gest-frontale.pdf

Soluzione 7

Partiamo dal paragrafo 2. del file
http://www.mat.uniroma2.it/~perfetti/didattica/analisi3online/onde_calore.pdf

$c = 1$, $L = \pi$, $f(x,t) = \sin x$ per cui $f_1(t) \equiv 1$. Inoltre $u(x,0) = -\sin x$ per cui $u_1(0) = -1$ e $u_n(0) \equiv 0$ per $n \ge 2$. Inoltre si ha $u_n'(0) \equiv 0$. Le infinite equazioni (2.3) si riducono a

$$\lambda_1^2 u_1(t) + u_1''(t) = 1, \; u_1(0) = -1, u_1'(0) = 0 \qquad \lambda_n^2 u_n(t) + u_n''(t) = 0, \quad u_n(0) = 0, \; u_n'(0) = 0 \quad n \ge 2$$

Inoltre $\lambda_1^2 = 1$. La soluzione della seconda equazione con $n \ge 2$ è $u_n(t) \equiv 0$. La soluzione della prima è $u_1(t) = -2\cos t + 1$ e la soluzione della equazione differenziale è

$$u(x,t) = \sin x(1 - 2\cos t)$$