Analisi I per Ingegneria Online
Prova scritta del 08–07–2016 A.A. 2015/2016

Si possono consultare libri, appunti, note etc.

Nome(Stampatello) **Cognome**(Stampatello) **Matricola**

1) Data la funzione $f(x) = \sqrt{\dfrac{\pi}{4} - \arctan\dfrac{1}{x}}$ si scrivano qui sotto le risposte alle seguenti domande (le dimostrazioni sul foglio di “bella”):

1) Dominio: $\dfrac{\pi}{4} - \arctan\dfrac{1}{x} \geq 0$ da cui $\pi/4 \geq \arctan 1/x$. Dalla crescenza della tangente in $(-\pi/4, \pi/4)$ si ha $\tan\dfrac{\pi}{4} \geq \tan\arctan\dfrac{1}{x} \iff 1 \geq 1/x$. Quindi $x < 0$, oppure $x \geq 1$.

2) Limiti della funzione ai bordi del dominio (punti di frontiera compresi $\pm\infty$). $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \sqrt{\pi/4} = \sqrt{\pi}/2$ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \sqrt{\pi/4} = \sqrt{\pi}/2$, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \sqrt{\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{2}} = \sqrt{\dfrac{3\pi}{4}}$, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \sqrt{\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\pi}{4}} = 0$.

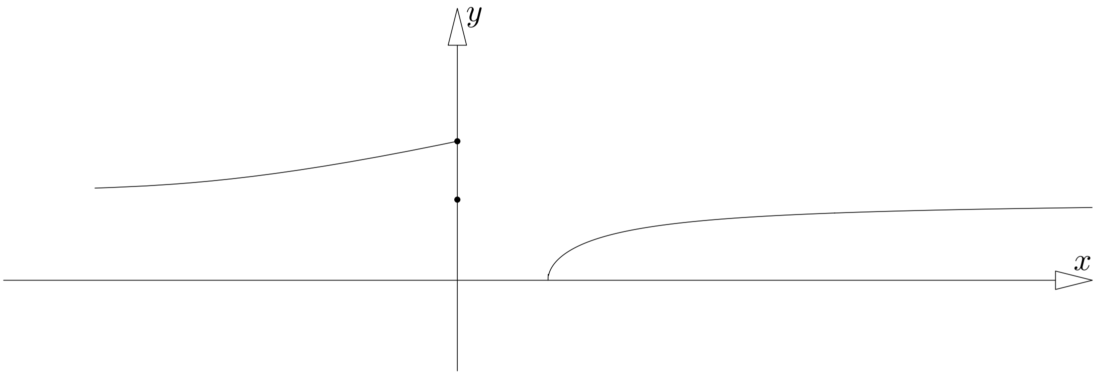
3) eventuali asintoti Un asintoto orizzontale $y = \sqrt{\pi}/2$ e nessun asintoto verticale né obliquo.

4) La derivata prima. $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{4} - \arctan\frac{1}{x}}} \dfrac{-1}{1+\frac{1}{x^2}} \dfrac{-1}{x^2} = \dfrac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{4} - \arctan\frac{1}{x}}} \dfrac{1}{1+x^2}$. La funzione è crescente sia in $(-\infty, 0)$ che in $[1, +\infty)$ ma NON in $(-\infty, 0) \cup [1, +\infty)$. Infatti a $-\infty$ tende a $\sqrt{\pi/2}$ e vale 0 per $x = 1$.

5) Limiti della derivata prima ai bordi del dominio (punti di frontiera compresi $\pm\infty$). $\lim\limits_{x\to 0^-} f'(x) = \sqrt{\dfrac{2}{3\pi}}$ $\lim\limits_{x\to 1^+} f'(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f'(x) = 0$.

6) Scrivere le coordinate dei massimi e dei minimi se ve ne sono. Siccome $f(x) \geq 0$, chiaramente, il punto $x = 1$ è certamente un minimo e per giunta assoluto. Non vi sono latri punti di estremo relativo o assoluto. Certamente $\sup\{y \in \mathbf{R}\colon y = f(x), x \in D\} = \sqrt{\dfrac{3\pi}{4}}$ ma non è un massimo in quanto la funzione non è definita per $x = 0$.

7) Disegnare il grafico della funzione nello spazio sottostante



2) Si trovino i valori di a per cui converge l'integrale improprio $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{a|x|}}{e^x + e^{-x}} dx$

R. Converge se e solo se $a < 1$.

L'integrale è improprio in quanto il cammino di integrazione si estende a $+\infty$ e $-\infty$. La funzione è è limitata (in particolare continua) in ogni sottointervallo finito e quindi non vi sono altre cause che rendano l'integrale improprio. La funzione è in realtà pari per cui possiamo scriverla come $\displaystyle 2\int_0^{+\infty} \frac{e^{a|x|}}{e^x + e^{-x}} dx$. Detta $f(x)$ la funzione integranda, ci basta far vedere che $0 \leq f(x) \leq g(x)$ e $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(x)dx < +\infty$. Ora $\displaystyle\frac{e^{a|x|}}{e^x + e^{-x}} \leq \frac{e^{a|x|}}{e^x} = e^{x(a-1)}$. Inoltre $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{x(a-1)}dx = \frac{e^{x(a-1)}}{a-1}\Big|_0^{+\infty} \doteq \lim_{A\to+\infty} \frac{1}{a-1}\left(e^{A(a-1)} - 1\right)$ e se vogliamo che tale quantità sia finita è necessario che $a - 1 < 0$ ossia $a < 1$. Dunque per $a < 1$, l'integrale converge. Ora facciamo vedere che per $a \geq 1$ l'integrale diverge. Ci basta far vedere che $f(x) \geq g(x) \geq 0$ e $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(x)dx = +\infty$. Sappiamo che $\displaystyle\frac{e^{a|x|}}{e^x + e^{-x}} \geq \frac{e^{a|x|}}{2e^x} = \frac{1}{2}e^{x(a-1)}$ e per le setsse ragioni di prima, se $a \geq 1$ l'integrale diverge.

• Un altro modo è il seguente. Facciamo vedere che

$$\lim_{x\to\pm\infty} x^\alpha f(x) = l, \quad \alpha > 1, \quad l \neq \pm\infty$$

Scegliamo ad esempio $\alpha = 2$ ma qualsiasi numero maggiore di uno va bene

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 \frac{e^{a|x|}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x\to+\infty} x^2 \frac{e^{(a+1)x}}{e^{2x} + 1} = \lim_{x\to+\infty} x^2 e^{(a-1)x} \frac{1}{1 + e^{-2x}} \to 0 \text{ se } a < 1$$

La stessa cosa accade a $-\infty$. Infatti avremmo

$$\lim_{x\to-\infty} x^2 \frac{e^{a|x|}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty} x^2 \frac{e^{(-a+1)x}}{e^{2x} + 1} \to 0 \text{ se } a < 1$$

Quindi se $a < 1$ la funzione è integrabile in senso improprio.

Facciamo ora vedere che se $a \geq 1$ l'integrale improprio diverge. Ci basta dimostrare che

$$\lim_{x\to\pm\infty} x^\alpha f(x) = l, \quad \alpha \leq 1, \quad l \neq 0$$

Prendiamo $\alpha = 1$ ed abbiamo

$$\lim_{x\to+\infty} x \frac{e^{a|x|}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x\to+\infty} x \frac{e^{(a+1)x}}{e^{2x} + 1} = \lim_{x\to+\infty} x e^{(a-1)x} \frac{1}{1 + e^{-2x}} \to +\infty \text{ se } a \geq 1$$

Quindi se $a \geq 1$ la funzione non è integrabile in senso improprio. È superfluo studiare il comportamento per $x \to -\infty$.

3) Argomentando si trovino, qualora esistano, i valori di a per cui converge la serie $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(\sqrt{1+k^2}-k)^a}{\ln(k^2+e^{k(a-1)})}$.

$$(\sqrt{1+k^2}-k)^a = \left(k\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}-k\right)^a = k^a\left(\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}-1\right)^a = k^a\left(1+\frac{1}{2k^2}+o(\frac{1}{k^2})-1\right)^a =$$

$$= k^a k^{-2a}(\frac{1}{2}+o(1))^a = k^{-a}(\frac{1}{2}+o(1))$$

Sia ora $a > 1$.

$$\ln(k^2+e^{k(a-1)}) = \ln(e^{k(a-1)}) + \ln(k^2e^{-k(a-1)}+1) = k(a-1)+O(k^2e^{-k(a-1)}) =$$
$$= k(a-1)(1+O(ke^{-k(a-1)})$$

e $ke^{-k(a-1)} \to 0$ per $k \to +\infty$ se $a > 1$. La funzione è dunque

$$\frac{\frac{1}{2}+o(1)}{k^a k(a-1)(1+O(ke^{-k(a-1)})} = \frac{\frac{1}{2}+o(1)}{k^{a+1}(a-1)(1+O(ke^{-k(a-1)})}$$

La serie converge chiaramente se $a+1 > 1$ ossia $a > 0$. Siccome siamo nella condizione per cui $a > 1$ che evidentemente implica $a > 0$, la serie converge.

Sia ora $a \leq 1$. In tal caso

$$\ln(k^2+e^{k(a-1)}) = \ln k^2 + \ln(k^{-2}e^{k(a-1)}+1) = 2\ln k + O(k^{-2}e^{k(a-1)}) =$$
$$= 2\ln k\left(1+O(\frac{e^{k(a-1)}}{k^2\ln k})\right) = 2\ln k(1+o(1))$$

La funzione è $\dfrac{\frac{1}{2}+o(1)}{k^a \ln k(1+o(1))}$ la quale converge solamente se $a > 1$ (sta nelle viodeolezioni) e quindi per $a \leq 1$ la serie diverge.

La conclusione è che la serie converge solamente per $a > 1$.

4) Sapendo che $\tan x = x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2}{15}x^5 + \dfrac{17}{315}x^7 + o(x^7)$, si calcoli lo sviluppo di Taylor all'ordine 7 centrato nell'origine della funzione $f(x) = \sin(\tan x) - \tan(\sin x)$. In altre parole bisogna trovare un polinomio $P(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{7} a_k x^k$ tale che $f(x) = P(x) + R(x)$ dove $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{R(x)}{x^7} = 0$.

Basta applicare le formule. Il risultato è $P(x) = -x^7/30$. Sappiamo che $\sin x = x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120} - \dfrac{x^7}{7!} + o(x^8)$ per cui

$$[\sin(\tan x)]_7 = \left[x+\frac{x^3}{3}+\frac{2}{15}x^5+\frac{17}{315}x^7+o(x^7)\right]_7 - \frac{1}{6}\left[\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{2}{15}x^5+\frac{17}{315}x^7+o(x^7)\right)^3\right]_7 +$$
$$+\frac{1}{120}\left[\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{2}{15}x^5+\frac{17}{315}x^7+o(x^7)\right)^5\right]_7 + \frac{1}{7!}\left[\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{2}{15}x^5+\frac{17}{315}x^7+o(x^7)\right)^7\right]_7$$

$$\left[x+\frac{x^3}{3}+\frac{2}{15}x^5+\frac{17}{315}x^7+o(x^7)\right]_7 = x+\frac{x^3}{3}+\frac{2}{15}x^5+\frac{17}{315}x^7$$

$$\left[\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{2}{15}x^5+\frac{17}{315}x^7+o(x^7)\right)^3\right]_7 = x^3+3x^2\frac{x^3}{3}+3x^2\frac{2x^5}{15}+3\frac{x^6}{9}x$$

$$\left[\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{2}{15}x^5+\frac{17}{315}x^7+o(x^7)\right)^5\right]_7 = x^5+\binom{5}{4}x^4\frac{x^3}{3}$$

$$\left[\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{2}{15}x^5+\frac{17}{315}x^7+o(x^7)\right)^7\right]_7 = x^7$$

Sommando i vari pezzi con i relativi coefficienti si ha

$$[\sin(\tan x)]_7 = x+\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{40}x^5-\frac{55}{1008}x^7+o(x^8)$$

$$[\tan(\sin x)]_7 = \left[x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}-\frac{x^7}{7!}+o(x^8)\right]_7+\frac{1}{3}\left[\left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}-\frac{x^7}{7!}+o(x^8)\right)^3\right]_7+$$
$$+\frac{2}{15}\left[\left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}-\frac{x^7}{7!}+o(x^8)\right)^5\right]_7+\frac{17}{315}\left[\left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}-\frac{x^7}{7!}+o(x^8)\right)^7\right]_7$$

$$\left[x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}-\frac{x^7}{7!}+o(x^8)\right]_7 = x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}-\frac{x^7}{7!}+o(x^8)$$

$$\left[\left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}-\frac{x^7}{7!}+o(x^8)\right)^3\right]_7 = x^3-3x^2\frac{x^3}{6}+3x^2\frac{x^5}{120}+3\frac{x^6}{36}x$$

$$\left[\left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}-\frac{x^7}{7!}+o(x^8)\right)^5\right]_7 = x^5-\binom{5}{4}x^4\frac{x^3}{6}$$

$$\left[\left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}-\frac{x^7}{7!}+o(x^8)\right)^5\right]_7 = x^7$$

Sommando i vari pezzi con i relativi coefficienti si ha

$$[\tan(\sin x)]_7 = x+\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{40}x^5-\frac{107}{5040}x^7+o(x^8)$$

La differenza dà il risultato.

5) Si calcolino le derivate parziali della funzione $f(x,y)=\arctan(x/y)$.

$$f_x=\frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}}\frac{1}{y},\qquad f_x=\frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}}\frac{-x}{y^2}$$