Analisi I per Ingegneria Online
Prova scritta del 20–02–2016 A.A. 2015/2016
Si possono consultare libri, appunti, note etc.

Nome(Stampatello) **Cognome**(Stampatello) **Matricola**

1) Data la funzione $f(x) = \Big[\ln(\sqrt{e^{-x}|x^2-3|}+2)\Big]^{-1}$ si scrivano qui sotto le risposte alle seguenti domande (le dimostrazioni sul foglio di "bella"):

1) Dominio: $\mathbf{R}$. Tutte le x reali.

2) Limiti della funzione ai bordi (punti di frontiera compresi $\pm\infty$) del dominio:

$$\lim_{x\to+\infty} e^{-x}\cdot|x^2-3| = 0\cdot+\infty = \text{ forma indeterminata}$$

per cui. D'altra parte (a volere essere pedanti) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}\cdot|x^2-3| = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}\cdot x^2\dfrac{|x^2-3|}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}\cdot x^2\cdot \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{|x^2-3|}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{e^x}$. È un limite notevole oppure si può usare l'Höpital. Derivando due volte si ottiene zero. Quindi

$$\lim_{x\to+\infty}\Big[\ln(\sqrt{e^{-x}|x^2-3|}+2)\Big]^{-1} = \frac{1}{\ln 2}$$

Inoltre

$$\lim_{x\to-\infty} e^{-x}\cdot|x^2-3| = e^{+\infty}\cdot+\infty = +\infty$$

e quindi (il massimo della pedanteria)

$$\lim_{x\to-\infty}\Big[\ln(\sqrt{e^{-x}|x^2-3|}+2)\Big]^{-1} = \frac{1}{[\ln(+\infty)]^2} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

3) eventuali asintoti. $y=0$ è l'asintoto orizzontale a sinistra e $y=1/\ln 2$ a destra.

4) La derivata prima. Se $x\le-\sqrt{3}$ oppure $x\ge\sqrt{3}$ si ha

$$f'(x) = \frac{1}{2}\frac{e^{-x}(x^2-3-2x)}{\Big[\ln(\sqrt{^{-x}(x^2-3)}+2)\Big]^2\sqrt{e^{-x}(x^2-3)}(\sqrt{e^{-x}(x^2-3)}+2)}$$

Se $-\sqrt{3}\le x\le\sqrt{3}$ si ha

$$f'(x) = \frac{1}{2}\frac{-e^{-x}(x^2-3-2x)}{\Big[\ln(\sqrt{e^{-x}(-x^2+3)}+2)\Big]^2\sqrt{e^{-x}(-x^2+3)}(\sqrt{e^{-x}(-x^2+3)}+2)}$$

5) Derivata destra e sinistra nei punti di non derivabilità (se ve ne sono).

$$f'(-\sqrt{3}^-) = +\infty,\quad f'(-\sqrt{3}^+) = -\infty,\quad f'(\sqrt{3}^-) = +\infty,\quad f'(\sqrt{3}^+) = -\infty,$$

Più detatgliatamente

$$f'(\sqrt{3}^+)=\lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h}(f(\sqrt{3}+h)-f(\sqrt{3}))=$$

$$=\lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h}\left[\left[\ln(\sqrt{e^{-\sqrt{3}-h}((\sqrt{3}+h)^2-3)}+2)\right]^{-1}-\left[\ln(\sqrt{e^{-\sqrt{3}}((\sqrt{3})^2-3)}+2)\right]^{-1}\right]=$$

$$=\lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h}\left[\left[\ln(\sqrt{e^{-\sqrt{3}-h}((\sqrt{3}+h)^2-3)}+2)\right]^{-1}-\left[\ln 2\right]^{-1}\right]=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(h)}{h}=\frac{0}{0}$$

Proviamo con l'Höpital

$$\lim_{h\to 0^+}-\frac{\frac{-e^{-\sqrt{3}-h}((\sqrt{3}+h)^2-3)+e^{-\sqrt{3}-h}2(\sqrt{3}+h)}{2\sqrt{e^{-\sqrt{3}-h}((\sqrt{3}+h)^2-3)}}}{\left[\ln(\sqrt{e^{-\sqrt{3}-h}((\sqrt{3}+h)^2-3)}+2)\right]^2\left[\sqrt{e^{-\sqrt{3}-h}((\sqrt{3}+h)^2-3)}+2\right]}=$$

$$=\lim_{h\to 0^+}-\frac{1}{2[\ln 2]^2}\frac{-e^{-\sqrt{3}-h}((\sqrt{3}+h)^2-3)+e^{-\sqrt{3}-h}2(\sqrt{3}+h)}{2\sqrt{e^{-\sqrt{3}-h}((\sqrt{3}+h)^2-3)}}=-\frac{0+2e^{-\sqrt{3}}\sqrt{3}}{2[\ln 2]^2 0^+}=-\infty$$

$$f'(\sqrt{3}^-)=\lim_{h\to 0^-}\frac{1}{h}(f(\sqrt{3}+h)-f(\sqrt{3}))=$$

$$=\lim_{h\to 0^-}\frac{1}{h}\left[\left[\ln(\sqrt{e^{-\sqrt{3}-h}(-(\sqrt{3}+h)^2+3)}+2)\right]^{-1}-\left[\ln(\sqrt{e^{-\sqrt{3}}(-(\sqrt{3})^2+3)}+2)\right]^{-1}\right]=$$

$$=\lim_{h\to 0^-}\frac{1}{h}\left[\left[\ln(\sqrt{e^{-\sqrt{3}-h}(-(\sqrt{3}+h)^2+3)}+2)\right]^{-1}-\left[\ln 2\right]^{-1}\right]=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(h)}{h}=\frac{0}{0}$$

Proviamo con l'Höpital

$$\lim_{h\to 0^-}-\frac{\frac{-e^{-\sqrt{3}-h}(-(\sqrt{3}+h)^2+3)-e^{-\sqrt{3}-h}2(\sqrt{3}+h)}{2\sqrt{e^{-\sqrt{3}-h}(-(\sqrt{3}+h)^2+3)}}}{\left[\ln(\sqrt{e^{-\sqrt{3}-h}(-(\sqrt{3}+h)^2+3)}+2)\right]^2\left[\sqrt{e^{-\sqrt{3}-h}(-(\sqrt{3}+h)^2+3)}+2\right]}=$$

$$=\lim_{h\to 0^-}-\frac{1}{2[\ln 2]^2}\frac{-e^{-\sqrt{3}-h}(-(\sqrt{3}+h)^2+3)-e^{-\sqrt{3}-h}2(\sqrt{3}+h)}{2\sqrt{e^{-\sqrt{3}-h}(-(\sqrt{3}+h)^2+3)}}=-\frac{0-2e^{-\sqrt{3}}\sqrt{3}}{2[\ln 2]^2 0^+}=+\infty$$

$$f'(-\sqrt{3}^+)=\lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h}(f(-\sqrt{3}+h)-f(\sqrt{3}))=$$

$$=\lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h}\left[\left[\ln(\sqrt{e^{\sqrt{3}-h}(-(-\sqrt{3}+h)^2+3)}+2)\right]^{-1}-\left[\ln(\sqrt{e^{\sqrt{3}}(-(-\sqrt{3})^2+3)}+2)\right]^{-1}\right]=$$

$$=\lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h}\left[\left[\ln(\sqrt{e^{\sqrt{3}-h}(-(-\sqrt{3}+h)^2+3)}+2)\right]^{-1}-\left[\ln 2\right]^{-1}\right]=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(h)}{h}=\frac{0}{0}$$

Proviamo con l'Höpital

$$\lim_{h\to 0^+}-\frac{\frac{-e^{\sqrt{3}-h}(-(-\sqrt{3}+h)^2+3)-e^{\sqrt{3}-h}2(-\sqrt{3}+h)}{2\sqrt{e^{\sqrt{3}-h}(-(-\sqrt{3}+h)^2+3)}}}{\left[\ln(\sqrt{e^{\sqrt{3}-h}(-(-\sqrt{3}+h)^2+3)}+2)\right]^2\left[\sqrt{e^{\sqrt{3}-h}(-(-\sqrt{3}+h)^2+3)}+2\right]}=$$

$$=\lim_{h\to 0^+}-\frac{1}{2[\ln 2]^2}\frac{-e^{\sqrt{3}-h}(-(-\sqrt{3}+h)^2+3)-e^{\sqrt{3}-h}2(-\sqrt{3}+h)}{2\sqrt{e^{\sqrt{3}-h}(-(-\sqrt{3}+h)^2+3)}}=-\frac{0+2e^{-\sqrt{3}}\sqrt{3}}{2[\ln 2]^2 0^+}=-\infty$$

$$f'(-\sqrt{3}^-) = \lim_{h\to 0^-} \frac{1}{h}(f(-\sqrt{3}+h) - f(-\sqrt{3})) =$$

$$= \lim_{h\to 0^-} \frac{1}{h}\left[\left[\ln(\sqrt{e^{\sqrt{3}-h}((-\sqrt{3}+h)^2-3)}+2)\right]^{-1} - \left[\ln(\sqrt{e^{\sqrt{3}}((-\sqrt{3})^2-3)}+2)\right]^{-1}\right] =$$

$$= \lim_{h\to 0^-} \frac{1}{h}\left[\left[\ln(\sqrt{e^{\sqrt{3}-h}((-\sqrt{3}+h)^2-3)}+2)\right]^{-1} - \left[\ln 2\right]^{-1}\right] = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(h)}{h} = \frac{0}{0}$$

Proviamo con l'Höpital

$$\lim_{h\to 0^-} -\frac{\frac{-e^{\sqrt{3}-h}((-\sqrt{3}+h)^2-3)+e^{\sqrt{3}-h}2(-\sqrt{3}+h)}{2\sqrt{e^{\sqrt{3}-h}((-\sqrt{3}+h)^2-3)}}}{\left[\ln(\sqrt{e^{\sqrt{3}-h}((-\sqrt{3}+h)^2-3)}+2)\right]^2\left[\sqrt{e^{\sqrt{3}-h}((-\sqrt{3}+h)^2-3)}+2\right]} =$$

$$= \lim_{h\to 0^-} -\frac{1}{2[\ln 2]^2}\frac{e^{\sqrt{3}-h}((-\sqrt{3}+h)^2-3)+e^{\sqrt{3}-h}2(-\sqrt{3}+h)}{2\sqrt{e^{\sqrt{3}-h}((-\sqrt{3}+h)^2-3)}} = -\frac{0-2e^{-\sqrt{3}}\sqrt{3}}{2[\ln 2]^2 0^+} = +\infty$$

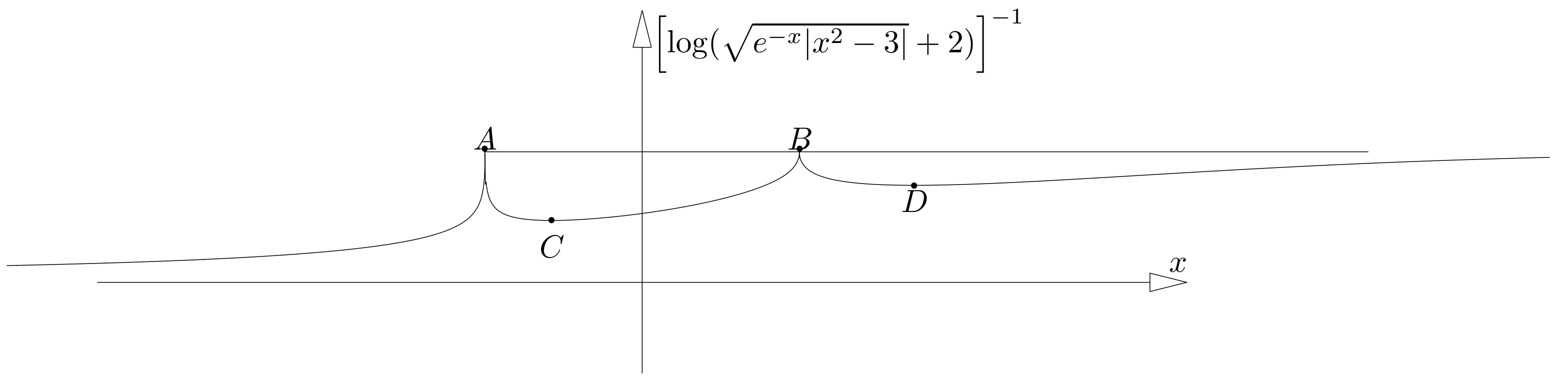
6) Scrivere le coordinate dei massimi e dei minimi. (Ce ne sono quattro e non tutti trovabili attraverso la derivata prima). Siccome $e^{-x}|x^2-3|+2 \geq 2$, ne segue che $f(x) \leq 1/\ln 2$ e quindi i punti di coordinate $A \equiv (-\sqrt{3}, 1/\ln 2)$, e $B \equiv (\sqrt{3}, 1/\ln 2)$ **sono dei massimi ma non possono essere trovati tramite le derivate non essendo la funzione ivi derivabile**. I punti di ccordinate

$$C \equiv (-1, 1/\ln(\sqrt{2e}+2)), \quad D \equiv (3, 1/\ln(\sqrt{6e^{-3}}+2),$$

sono minimi. Se $|x| \geq \sqrt{3}$, $f'(x) \geq 0$ se e solo se $x^2-2x-3 \geq 0$ ossia $x \leq -1$, oppure $x \geq 3$. Ne segue che la funzione cresce in $(-\infty, -\sqrt{3})$ e $(3, +\infty)$ e decresce in $(\sqrt{3}, 3)$. Il punto $(3, \left[\ln(\sqrt{6e^{-3}}+2)\right]^{-1})$ è un minimo.

Derivando per $|x| \leq \sqrt{3}$, si ha che $(-1, \left[\ln(\sqrt{2e}+2)\right]^{-1})$ pure è un minimo.

7) Disegnare il grafico della funzione nello spazio sottostante



$$\boxed{A \equiv (-\sqrt{3}, 1/\ln 2), \quad C \equiv (-1, 1/\ln(\sqrt{2e}+2)), \quad B \equiv (\sqrt{3}, 1/\ln 2), \quad D \equiv (3, 1/\ln(\sqrt{6e^{-3}}+2)),}$$

8) Dire quante soluzioni ha l'equazione $f(x) = a$ per ogni $a \in (-\infty, +\infty)$. Per $a \leq 0$ nessuna soluzione. Per $0 < a < \left[\ln(\sqrt{e^{-3}}+2)\right]^{-1}$ si ha una soluzione. Per $a = \left[\ln(\sqrt{e^{-3}}+2)\right]^{-1}$ si

hanno due soluzioni. $\Big[\ln(\sqrt{e^{-3}}+2)\Big]^{-1} < a < \Big[\ln(\sqrt{6e^{-3}}+2)\Big]^{-1}$ si hanno tre soluzioni. Per $a = \Big[\ln(\sqrt{6e^{-3}}+2)\Big]^{-1}$ si hanno quattro soluzioni. Per $\Big[\ln(\sqrt{6e^{-3}}+2)\Big]^{-1} < a < 1/\ln 2$ si hanno cinque soluzioni e per $a = 1/\ln 2$ si hanno due soluzioni.

9) Sia $x \geq \sqrt{3}$. Dimostrare sul "foglio di bella" che vi deve essere almeno un punto di flesso. Si badi che non è sufficiente un argomento basato sul grafico.

Lo stesso argomento del compito precedente.

2) Si trovino i valori di a per cui converge l'integrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{-a}\left(\arctan(\frac{t}{t^2+2})\right)^3 dt$. Successivamente per gli altri valori, si dimostri che l'integrale diverge. Si scriva qui sotto la risposta (la dimostrazione sulla "bella"). Suggerimento: si possono adottare due procedure. Nel primo caso si usi lo sviluppo di $\arctan x$ nell'intorno di $x=0$. Nel secondo caso si usi $0 \leq \arctan x < x$ per ogni $x \geq 0$ e $\arctan x \geq x/2$ per $0 \leq x \leq x_0$ con x_0 piccolo abbastanza.

R. Si veda qui http://www.mat.uniroma2.it/~perfettieserciesercі.html. Il file num.8 **integrali, integrali impropri, funzioni integrali**, esercizio num.1.8 XII

3) Argomentando si trovino, qualora esistano, i valori di a per cui convergono le serie seguenti specificando quando la convergenza è semplice o assoluta: 3.1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k k^{-a/k}$, 3.2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k k^{-a-1/k}$, 3.3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k k^{-k/a}$ Si scriva qui sotto la risposta (la dimostrazione sulla "bella").

R.

3.1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k k^{-a/k}$, $a_k \doteq k^{-a/k} = e^{-\frac{a}{k}\ln k}$ e quindi $a_k \to 1$ per $k \to +\infty$. Ne segue che la serie non può convergere.

3.2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k k^{-a-1/k}$, Sia $a > 1$. Ne segue $k^{-a-1/k} \leq k^{-a}$ e quindi la serie converge assolutamente.

Sia $0 < a < 1$. In tal caso $a + \frac{1}{k}$ sarà definitivamente minore di maggiore di zero e minore di 1 per cui la serie è ancora "Leibnitz." Converge quindi semplicemente ma non assolutamente. Infatti sia b tale che $0 < a < b < 1$. Definitivamente si ha $a + 1/k < b$ e quindi $k^{-a-1/k} > k^{-b}$ e quindi $\displaystyle\sum_{k=k_0}^{+\infty} k^{-a-1/k} > \sum_{k=k_0}^{+\infty} k^{-b} = +\infty$. La somma comincia di k_0 in quanto k_0 è il primo intero per cui $a + 1/k < b$ ossia k_0 è la parte intera di $1/(b-a)$ più uno.

Sia $a = 0$. $a_k = k^{\frac{-1}{k}} = e^{\frac{-1}{k}\ln k} \to 1$ e quindi non converge.

Sia $a = 1$. $k^{-a-1/k} = e^{(-1-\frac{1}{k})\ln k} = \frac{1}{k}e^{\frac{-\ln k}{k}} = \frac{1}{k}\left(1 - \frac{\ln k}{k} + O(\frac{1}{k^2})\right) = \frac{1}{k} + O(\frac{\ln k}{k^2})$. La serie è "Leibnitz" e quindi converge.

Sia $a<0$. Da $k^{-a-1/k}\geq k^{-1/k}\to 1$ ne segue che non può convergere.

3.3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k k^{-k/a}$. naturalmente $a\neq 0$. In tal caso converge assolutamente per ogni $a>0$. Infatti $k^{-k/a}\leq k^{-2}$ definitivamente e quindi converge assolutamente. Se $a<0$, $k^{-k/a}\to+\infty$ e quindi non può convergere.

4) Si calcoli lo sviluppo di Taylor all'ordine 7 centrato nell'origine della funzione $f(x)=\sin(\sinh x)-\sinh(\sin x)$. In altre parole bisogna trovare un polinomio $P(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{7}a_kx^k$ tale che $f(x)=P(x)+R(x)$ dove $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{R(x)}{x^7}=0$. Si consiglia di costruirsi a parte il polinomio di Taylor all'ordine 7 della funzione $\sinh x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$. A tal proposito si può tenere conto del fatto che $(\sinh x)'=\cosh=(e^x+e^{-x})/2$, e $(\cosh x)'=\sinh x$. Oppure si può procedere attraverso gli esponenziali. **R.**

Facilmente si ottiene $\sinh x=\displaystyle\sum_{k=0}^{3}\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}+o(x^8)=[\sinh x]_7+o(x^8)=[\sinh x]_8+o(x^8)$ ed al solito $\sin x=\displaystyle\sum_{k=0}^{3}\frac{(-1)^kx^{2k+1}}{(2k+1)!}+o(x^8)$.

$$\begin{aligned}&\sin(\sinh x)=[\sin(\sinh x)]_7+o(\sinh^8 x)=\\&=[\sinh x]_7-\frac{1}{3!}[\sinh^3 x]_7+\frac{1}{5!}[\sinh^5 x]_7-\frac{1}{7!}[\sinh^7 x]_7+o(\sinh^8 x)=\\&=\sum_{k=0}^{3}\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}-\frac{1}{6}\underbrace{\left(x^3+3x^2\frac{x^3}{6}+3x^2\frac{x^5}{5!}+3\frac{x^6}{(3!)^2}x\right)}_{[\sinh^3 x]_7}+\frac{1}{5!}\underbrace{\left(x^5+\binom{5}{4}x^4\frac{x^3}{6}\right)}_{[\sinh^5 x]_7}-\frac{1}{7!}x^7+o(x^8)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&[\sinh(\sin x)]_7=[\sin x]_7+\frac{1}{3!}[\sin^3 x]_7+\frac{1}{5!}[\sin^5 x]_7+\frac{1}{7!}[\sin^7 x]_7+o(\sin^8 x)=\\&=\sum_{k=0}^{3}\frac{(-1)^kx^{2k+1}}{(2k+1)!}+\frac{1}{6}\underbrace{\left(x^3-3x^2\frac{x^3}{6}+3x^2\frac{x^5}{5!}+3\frac{x^6}{(3!)^2}x\right)}_{[\sin^3 x]_7}+\frac{1}{5!}\underbrace{\left(x^5+\binom{5}{4}x^4\frac{-x^3}{6}\right)}_{[\sin^5 x]_7}+\frac{1}{7!}x^7+o(x^8)\end{aligned}$$

La differenza è data da

$$\begin{aligned}&x(1-1)+x^3\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{6}-\left(-\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\right)\right)+x^5\left(\frac{1}{5!}-\frac{1}{12}+\frac{1}{5!}-\left(\frac{1}{5!}-\frac{1}{12}+\frac{1}{5!}\right)\right)+\\&+x^7\left(-\frac{1}{5!}-\frac{1}{36}+\frac{1}{3\cdot 4!}-\left(\frac{1}{5!}+\frac{1}{36}-\frac{1}{3\cdot 4!}\right)\right)+o(x^8)=-\frac{x^7}{45}+o(x^8)\end{aligned}$$

(4.1). All'ordine 8 otterremmo lo stesso $-x^7/45$ ed infatti è presente $o(x^8)$.

(4.2) All'ordine 6 il polinomio è quello nullo nel senso che $\sin(\sinh x)-\sinh(\sin x)=[\sin(\sinh x)-\sinh(\sin x)]_6+o(x^6)=0+\underbrace{\frac{x^7}{45}+o(x^8)}_{o(x^6)}$

5) Data la funzione

$$\begin{cases} \dfrac{x\sin y - y\sin x}{xy} & x\neq 0 \wedge y\neq 0 \\ 0 & x=0 \vee y=0 \end{cases}$$

5.1) Si trovi il dominio. $\mathbf{R}^2$

5.2) Si dica in quali punti è continua. Se $x\neq 0$ e $y\neq 0$, allora la funzione è $\dfrac{\sin y}{y} - \dfrac{\sin x}{x}$ per cui è certamente continua in ogni punto che non sta sugli assi. Dato quindi $P\equiv(0,y_0)$, $y_0\neq 0$ e scriviamo

$$f(\underline{x}) = \frac{x(\sin y - \sin y_0) + x\sin y_0 - y(x - o(x^2))}{xy} = \frac{\sin y - \sin y_0}{y} + \frac{\sin y_0}{y} - 1 + o(x) \to \frac{\sin y_0}{y_0} - 1,$$

Se il punto è $P\equiv(x_0,0)$ otteniamo $\dfrac{-\sin x_0}{x_0}+1$.

Se il punto è $P\equiv(0,0)$ abbiamo

$$f(\underline{x}) = \frac{x(y+o(y)) - y(x+o(x))}{xy} = \frac{o(y)}{y} + \frac{o(x)}{x} \to 0$$

Quindi la funzione è continua dappertutto tranne sugli assi cartesiani con eccezione dell'origine dove è continua.

5.3) Si scrivano le derivate parziali

Fuori dagli assi abbiamo $f_x = \dfrac{-x\cos x + \sin x}{x^2}$, $f_y = \dfrac{y\cos y - \sin y}{y^2}$ e sono continue essendo il rapporto di funzioni continue il cui denominatore mai si annulla.

In $(0,y_0)$, $y_0\neq 0$ abbiamo

$$f_y(0,y_0) = \lim_{t\to 0}\frac{0-0}{t} = 0$$

$$f_x(0,y_0) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\,\frac{t\sin y_0 - y_0\sin t}{ty_0} = \lim_{t\to 0}\frac{t\sin y_0 - y_0 t + y_0\frac{t^3}{6} + y_0 o(t^4)}{y_0 t^2}$$

ed evidentemente non esiste.

In $(x_0,0)$, $x_0\neq 0$ abbiamo

$$f_x(x_0,0) = \lim_{t\to 0}\frac{0-0}{t} = 0$$

$$f_y(x_0,0) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\,\frac{x_0\sin t - t\sin x_0}{tx_0} = \lim_{t\to 0}\frac{t(x_0 - \sin x_0) - x_0\frac{t^3}{6} + o(t^4)}{t^2 x_0}$$

ed evidentemente non esiste.

In $\underline{x}=\underline{0}$ abbiamo evidentemente $f_x(\underline{0}) = f_y(\underline{0}) = 0$. Alla fine scriviamo

$$f_x(\underline{x}) = \begin{cases} \dfrac{-x\cos x + \sin x}{x^2} & x\neq 0, y\neq 0 \\ \nexists & x=0, y\neq 0 \\ 0 & y=0 \end{cases} \qquad f_y(\underline{x}) = \begin{cases} \dfrac{y\cos y - \sin y}{y^2} & x\neq 0, y\neq 0 \\ \nexists & x\neq 0, y=0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$$

Inoltre $\lim\limits_{\underline{x}\to\underline{0}} f_x(\underline{x}) = 0$ e $\lim\limits_{\underline{x}\to\underline{0}} f_y(\underline{x}) = 0$.

Ne segue che le derivate parziali sono continue entrambe in $\mathbf{R}^2\backslash\{x=0,y\neq 0\}\backslash\{x\neq 0,y=0\}\cup\{\underline{0}\}$ e quindi la funzione è ivi differenziabile.

5.4) Si determinino i punti in cui è differenziabile.

L'ultima parte del punto 5.3 basta. Altrimenti, dopo avere detto che sugli assi ma non l'origine, la funzione non è continua, si poteva continuare dicendo che fuori dagli assi le derivate sono date dal rapporto di polinomi in cui il denominatore non si annulla e quindi sono continue e quindi la funzione è differenziabile. Nell'origine si ha

$$\lim_{\|\underline{h}\|\to 0}\frac{f(\underline{h})}{\|\underline{h}\|}=\frac{h_1\sin h_2-h_2\sin h_1}{h_1h_2\sqrt{h_1^2+h_2^2}}$$

Usiamo $\sin t=t-\frac{1}{6}t^3+o(t^4)$ e quindi

$$\frac{f(\underline{h})}{\|\underline{h}\|}=\frac{h_1^2-h_2^2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}+\frac{o(h_2^4)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}+\frac{o(h_1^4)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}$$

Poi $0<\dfrac{h_1^2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}\le\dfrac{h_1^2}{|h_1|}$, $0<\dfrac{h_2^2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}\le\dfrac{h_2^2}{|h_2|}$, $0<\dfrac{|o(h_1^4)|}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}\le\dfrac{|o(h_1^4)|}{|h_1|}$, $0<\dfrac{|o(h_2^4)|}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}\le\dfrac{|o(h_2^4)|}{|h_2|}$ e tutti charamente tendono a zero.

6) Se esistono, si dica per quali valori di ω sono limitate per ogni $t\in\mathbf{R}$ le soluzioni del problema di Cauchy (*oscillatore armonico forzato*) $\begin{cases}x''+4x=\cos(\omega t)\\ x(0)=0,\quad x'(0)=0\end{cases}$ (limitate vuol dire che esiste una costante positiva M tale che $|x(t)|\le M$ per ogni t reale).

Si veda qui http://www.mat.uniroma2.it/~perfetti/eserci/eserci.html, file denominato **integrali curvilinei, doppi, tripli e superficiali; equazioni differenziali** esercizio 51.8.1.

Punteggi. Per l'esame da 12 creditisvolgere gli esercixi 1,2,3,4 ed i punteggi sono: 10, 8, 8, 7. Si hanno tre ore a disposizione. Per l'esame da 4 crediti svolgere solo gli esercici 2,5,6, ed i punteggi sono: 10, 12, 11 Si hanno 100 minuti a disposizione.