Analisi I per Ingegneria Online
Prova scritta del 06–02–2016 A.A. 2015/2016

Si possono consultare libri, appunti, note etc.

Nome(Stampatello) **Cognome**(Stampatello) **Matricola**

1) Data la funzione $f(x)=\ln(\sqrt{e^{-2x}|e^x-2|}+2)$ si scrivano qui sotto le risposte alle seguenti domande (le dimostrazioni sul foglio di "bella"):

1) Dominio: **R**. L'argomento della radice è sempre non negativo. L'argomento del logaritmo è sempre positivo ed anzi maggiore od uguale a 2.

2) Limiti della funzione ai bordi (punti di frontiera compresi $\pm\infty$) del dominio:

$\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(\sqrt{e^{-2x}|e^x-2|}+2)=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(\sqrt{e^{-x}-2e^{-2x}}+2)=\ln(\sqrt{0+0}+2)=\ln 2$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\ln(\sqrt{e^{-2x}|e^x-2|}+2)=\lim\limits_{x\to-\infty}\ln(\sqrt{e^{-2x}(2-e^x)}+2)=\lim\limits_{x\to-\infty}\ln(\sqrt{2e^{-2x}-e^{-x}}+2)=$
$\lim\limits_{x\to-\infty}\ln(e^{-x}\sqrt{2-e^x}+2)=\ln(+\infty\cdot\sqrt{2}+2)=+\infty$

3) eventuali asintoti. A destra $y=\ln 2$ asintoto orizzontale. A sinistra abbiamo

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln(\sqrt{2e^{-2x}-e^{-x}}+2)}{x}$$

Proviamo con l'Höpital.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f'(x)}{x'}=\lim_{x\to-\infty}f'(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{-4e^{-2x}+e^{-x}}{2\sqrt{2e^{-2x}-e^{-x}}(\sqrt{2e^{-2x}-e^{-x}}+2)}=$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{2x}(-4e^{-2x}+e^{-x})}{2\sqrt{2-e^x}(\sqrt{2-e^x}+2e^x)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-4+e^x}{2\sqrt{2-e^x}(\sqrt{2-e^x}+2e^x)}=$$
$$=\frac{-4+0}{2\sqrt{2-0}(\sqrt{2-0}+2\cdot 0)}=-1$$

Poi dobbiamo eseguire

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)+x=\lim_{x\to-\infty}(\ln(e^{-x}\sqrt{2-e^x}+2)+x)=\lim_{x\to-\infty}\ln(e^{-x})+\ln(\sqrt{2-e^x}+2e^x)+x=$$
$$=\lim_{x\to-\infty}-x+\ln(\sqrt{2-e^x}+2e^x)+x=\lim_{x\to-\infty}\ln(\sqrt{2-0}+2\cdot 0)=\frac{\ln 2}{2}$$

Quindi a sinistra l'asintoto obliquo è $y=-x+(\ln 2)/2$.

4) la derivata prima. Se $x\geq 0$ si ha

$$f'(x)=\frac{4e^{-2x}-e^{-x}}{2\sqrt{e^{-x}-2e^{-2x}}(\sqrt{e^{-x}-2e^{-2x}}+2)}$$

Se $x<0$ si ha

$$f'(x)=\frac{-4e^{-2x}+e^{-x}}{2\sqrt{2e^{-2x}-e^{-x}}(\sqrt{2e^{-2x}-e^{-x}}+2)}$$

5) Derivata destra e sinistra nei punti di non derivabilità (se ve ne sono). L'unico punto è $x_0 = \ln 2$ per cui

$$
\begin{aligned}
f'(x_0^+) &= \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h} \ln(\sqrt{e^{-2(\ln 2+h)}|e^{\ln 2+h}-2|}+2) = \\
&= \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h} \left(\ln(\sqrt{e^{-2(\ln 2+h)}(e^{\ln 2+h}-2)}+2) - \ln 2 \right) = \\
&= \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h} \left[\ln(\sqrt{\frac{1}{4}e^{-2h}2(e^h-1)}+2) - \ln 2 \right] = \\
&= \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h} \left[-\ln 2 + \ln(\sqrt{e^{-2h}2(e^h-1)}+2) - \ln 2 \right]
\end{aligned}
$$

Provìamo con l'Höpital (derivata rispetto ad h)

$$
\lim_{h\to 0^+} \frac{-2e^{-h}+4e^{-2h}}{2\sqrt{e^{-2h}2(e^h-1)}(\sqrt{e^{-2h}2(e^h-1)}+2)} = \lim_{h\to 0^+} \frac{-1+2e^{-h}}{2\sqrt{2(e^h-1)}(\sqrt{e^{-2h}2(e^h-1)}+2)} =
$$
$$
= \frac{1}{2\cdot 0^+\cdot 2} = +\infty
$$

$$
\begin{aligned}
f'(x_0^-) &= \lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{1}{h} \ln(\sqrt{e^{-2(\ln 2+h)}|e^{\ln 2+h}-2|}+2) = \\
&= \lim_{h\to 0^-} \frac{1}{h} \left(\ln(\sqrt{e^{-2(\ln 2+h)}(2-e^{\ln 2+h})}+2) - \ln 2 \right) = \\
&= \lim_{h\to 0^-} \frac{1}{h} \left[\ln(\sqrt{\frac{1}{4}e^{-2h}2(1-e^h)}+2) - \ln 2 \right] = \\
&= \lim_{h\to 0^-} \frac{1}{h} \left[-\ln 2 + \ln(\sqrt{e^{-2h}2(1-e^h)}+2) - \ln 2 \right]
\end{aligned}
$$

Provìamo con l'Höpital (derivata rispetto ad h)

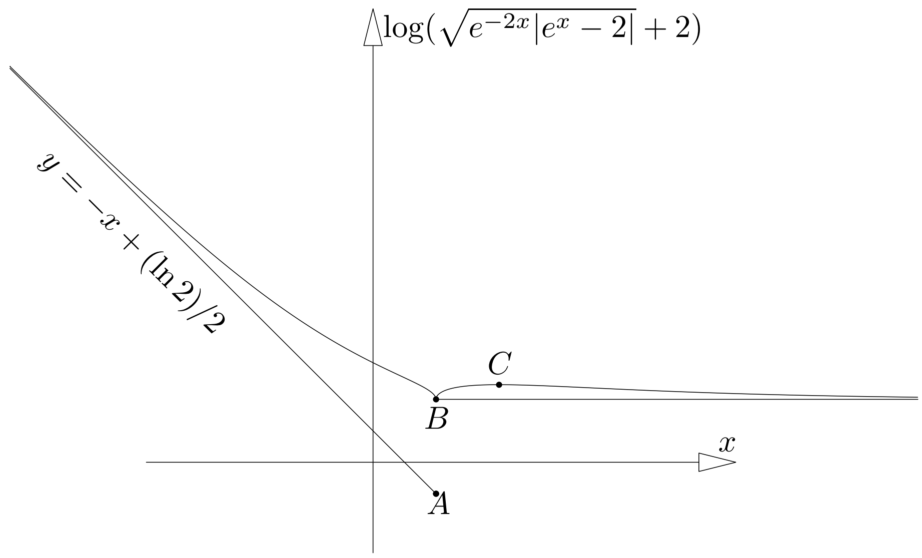
$$
\lim_{h\to 0^-} \frac{2e^{-h}-4e^{-2h}}{2\sqrt{e^{-2h}2(1-e^h)}(\sqrt{e^{-2h}2(1-e^h)}+2)} = \lim_{h\to 0^-} \frac{1-2e^{-h}}{2\sqrt{2(1-e^h)}(\sqrt{e^{-2h}2(1-e^h)}+2)} =
$$
$$
= \frac{-1}{2\cdot 0^+\cdot 2} = -\infty
$$

6) Scrivere le coordinate dei massimi e dei minimi. Per $x > \ln 2$ abbiamo $f'(x) = \dfrac{e^{-x}(4e^{-x}-1)}{R(x)}$ con $R(x) > 0$. Quindi $f'(x) > 0$ se e solo se $x < \ln 4$. Se invece $x > \ln 4$ allora la funzione decresce e quindi $x_0 = \ln 4$ è l'ascissa di un massimo locale.

Se $x < \ln 2$ abbiamo $f'(x) = \dfrac{e^{-x}(-4e^{-x}+1)}{Q(x)}$ e $Q(x) > 0$. $1 - 4e^{-x} \leq 0$ se e solo se $x < \ln 4$ e quindi la nostra funzione decresce sempre per $x < \ln 2$.

Inoltre $f(\ln 2) = \ln 2$ e chiaramente $f(x) > \ln 2$ per ogni $x \neq \ln 2$. Ne segue che $(\ln 2, \ln 2)$ è un minimo assoluto.

7) Disegnare il grafico della funzione nello spazio sottostante



$A \equiv (\ln 2, -(\ln 2)/2), \quad B \equiv (\ln 2, \ln 2), \quad C \equiv (\ln 4, \ln(2+\frac{1}{2\sqrt{2}})$

Notare che il massimo si trova tramite la derivata prima ma il minimo no in quanto la funzione non è ivi derivabile

8) Dire quante soluzioni ha l'equazione $f(x)=a$ per ogni $a \in (-\infty,+\infty)$
Se $a<\ln 2$ non ve ne sono. Se $a=\ln 2$ ce nè una. Se $\ln 2 < a < 2+\frac{1}{2\sqrt{2}}$, ce ne sono tre. Se $a=\ln(2+\frac{1}{\sqrt{2}})$ ce ne sono due. Se $a>\ln(2+\frac{1}{2\sqrt{2}})$ ce nè una.

9) Sia $x \geq \ln 2$. Dimostrare sul “foglio di bella”che vi deve essere almeno un punto di flesso. Si badi che non è sufficiente un argomento basato sul grafico. La derivata prima vale zero per $x=\ln 4$ ed inoltre $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=0$ e $f'(x)<0$ per $x>\ln 4$. Ne segue (anche se bisognerebbe dimostrarlo rigorosamente) che $f'(x)$ ha almeno un minimo ed inoltre f' è decrescente a sinistra e crescente a destra del minimo ma in un opportuno intervallo che può anche essere piccolo. La conclusione è l'esistenza del flesso.

2) Si dimostri che per $0<a<1$ a l'integrale improprio converge $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^a}\sin\frac{1}{x}dx$

Scrivere qui sotto il risultato. Lo svolgimento a parte.
R.: Spezziamo l'integrale come $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx + \int_1^{+\infty} f(x)dx \doteq I_1+I_2$.

I_1. Se $a<1$, converge assolutamente:

$$\int_0^1 \left|\frac{1}{x^a}\sin\frac{1}{x}\right|dx \leq \int_0^1 \left|\frac{1}{x^a}\right|dx = \lim_{r\to0^+}\int_0^r \frac{dx}{x^a}dx = \lim_{r\to0^+} \frac{x^{-a+1}}{-a+1}\Big|_r^1 = \frac{1}{1-a}$$

per cui scatta il teorema sulla convergenza assoluta e quindi semplice degli integrali impropri.

I_2. Se $a>0$ converge assolutamente. Infatti

$$\int_1^{+\infty} \left|\frac{1}{x^a}\sin\frac{1}{x}\right|dx \leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^a}\frac{1}{x}dx = \lim_{r\to+\infty}\int_1^r \frac{dx}{x^{1+a}} = \frac{1}{a}$$

Unendo i due contributi si ha il risultato.

Errori comuni 1) Alcuni hanno maggiorato $\displaystyle\left|\frac{1}{x^a}\sin\frac{1}{x}\right| \leq \frac{1}{x^a}$ PRIMA di spezzare l'integrale in I_1+I_2. Ciò porta dritto all'errore in quanto per far convergere I_1 abbiamo bisogno di imporre

$a<1$ e per far convergere I_2 abbiamo bisogno di $a>1$. Invece in I_2 usiamo $|\sin y|\le|y|$ e nel nostro caso $y=1/x$. La stessa maggiorazione avremmo potuto portare in I_1 ossia

$$\int_0^1\left|\frac{1}{x^a}\sin\frac{1}{x}\right|.dx\le\int_0^1\frac{1}{x^a}\frac{1}{x}dx$$

ma per convergere avremmo bisogno di $a+1<1$ ossia $a<0$ e contestualmente $a+1>1$ in I_2. Alla fine ci si convince che bisogna usare due maggiorazioni diverse del seno in I_1 e I_2.

2) Alcuni anno scritto che siccome $\sin x$ è asintotico a x, allora $\sin 1/x$ è asintotico a $1/x$ per $x\to0$. Ciò è falso. La funzione f è asintotica a g per $x\to a$ se $\lim\limits_{x\to a}f/g=l\ne0$ e non è certo il caso in questione. Del resto la nozione di asintoticità , detta in parole rozze, significa che all'approssimarsi di x verso a, f e g si comportano allo stesso modo. Ma mentre $1/x$ tende a divergere a $\pm\infty$ a seconda che si arrivi da destra o sinistra, $\sin 1/x$ oscilla sempre più frequentemente e rimane limitata. Viceversa si può dire che $\sin 1/x$ è asintotica a $1/x$ per $x\to\pm\infty$.

3) C'è chi ha maggiorato $\dfrac{1}{x^a}\sin\dfrac{1}{x}\le\dfrac{1}{x^a}$ ed è vero ma non serve a nulla. Il teorema sulla convergenza assoluta rigurda il modulo della funzione integranda.

3) Specificando quando semplice ed assoluta, studiare la convergenza della serie seguente al variare di $\alpha\in\mathbf{R}$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^k k^\alpha\left(\left((1+\frac{1}{k}\right)^{\sqrt{k}}-1\right)$$

Scrivere qui sotto il risultato. Lo svolgimento a parte.
R.: Se $\alpha<1$, la serie converge semplicemente. Se $\alpha\ge0$ la serie non converge. Se $\alpha<0$, la serie converge assolutamente.

Il tutto si riduce a sapere il comportamento dell'ultimo fattore.

$$\left(1+\frac{1}{k}\right)^{\sqrt{k}}-1=e^{\sqrt{k}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)}-1=e^{\sqrt{k}\left(\frac{1}{k}+O(\frac{1}{k^2})\right)}-1=e^{\left(\frac{1}{\sqrt{k}}+O(\frac{1}{k^{3/2}})\right)}-1$$

$$=\left[1+\frac{1}{\sqrt{k}}+O(\frac{1}{k^{3/2}})+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}+O(\frac{1}{k^{3/2}})\right)^2\right]+\frac{1}{2}O\left(\left(\frac{1}{\sqrt{k}}+O(\frac{1}{k^{3/2}})\right)^3\right)-1=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{2k}+O(\frac{1}{k^{3/2}})$$

Quindi possiamo scrivere

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^k k^\alpha\left(\left((1+\frac{1}{k}\right)^{\sqrt{k}}-1\right)=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^k k^\alpha\left(\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{2k}+O(\frac{1}{k^{3/2}})\right)=$$

$$=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^k\left(k^{\alpha-1/2}+\frac{1}{2}k^{\alpha-1}+O(k^{\alpha-3/2})\right)$$

Se $\alpha-1/2<0$, la serie $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^k k^{\alpha-1/2}$ è Leibnitz e quindi converge. Sempre per $\alpha-1/2<0$ la serie $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^k k^{\alpha-1}$ pure converge e converge anche la serie $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^k O(k^{\alpha-3/2})$ in quanto

$\alpha-3/2<1/2-3/2=-1$. Se avessimo avuto, ad esempio, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^k O(k^{\alpha-1-1/4})$, non avremmo potuto concludere circa la convergenza né semplice né assoluta. Per la convergenza semplice, vorremmo applicare "Leibnitz" ma non sappiamo il segno del termine $O(k^{\alpha-1-1/4})$,. Per la convergenza assoluta, con $\alpha<1/2$, non otteniamo $\alpha-1-1/4<-1$.

Se $\alpha-1/2\geq 0$, il termine generale della serie non tende a zero e quindi non può convergere.

Se $\alpha-1/2<-1$ ossia $\alpha<-1/2$, la serie converge assolutamente

4) Si calcoli lo sviluppo di Taylor all'ordine 8 centrato nell'origine della funzione $f(x)=\cos(\sin x)$. In altre parole bisogna trovare un polinomio $P(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{8}a_kx^k$ tale che $f(x)=P(x)+R(x)$ dove $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{R(x)}{x^8}=0$.

Scrivere qui sotto il risultato. Lo svolgimento a parte.

R.: $\sin x=x-\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^5}{120}-\dfrac{x^7}{7!}+o(x^8)$ Inoltre $\cos y=1-\dfrac{y^2}{2}+\dfrac{y^4}{24}-\dfrac{y^6}{6!}+\dfrac{y^8}{8!}+o(y^9)$. Nel nostro caso, $y=\sin x$ per cui dobbiamo estrarre i termini fino all'ordine 8.

$$[\sin^2 x]_8=x^2+\frac{x^6}{36}-\frac{x^4}{3}+\frac{x^6}{60}-2\frac{x^8}{7!}-2\frac{x^8}{720}$$

$$[\sin^4 x]_8=\left[\left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}\right)^4\right]_8=x^4-\binom{4}{3}\frac{x^6}{6}+\binom{4}{2}\frac{x^8}{36}+\binom{4}{3}\frac{x^8}{120}$$

$$[\sin^6 x]_8=\left[\left(x-\frac{x^3}{6}\right)^6\right]_8=x^6-\binom{6}{5}\frac{x^8}{6}$$

$$[\sin^8 x]_8=\left[\left(x-\frac{x^3}{6}\right)^6\right]_8=x^8$$

Alla fine abbiamo

$$[\cos(\sin x)]_8=1-\frac{1}{2}\underbrace{\left(x^2+\frac{x^6}{36}-\frac{x^4}{3}+\frac{x^6}{60}-2\frac{x^8}{7!}-\frac{x^8}{360}\right)}_{[\sin^2 x]_8}+$$

$$+\frac{1}{24}\underbrace{\left(x^4-\binom{4}{3}\frac{x^6}{6}+\binom{4}{2}\frac{x^8}{36}+\binom{4}{3}\frac{x^8}{120}\right)}_{[\sin^4 x]_8}+-\frac{1}{6!}\underbrace{\left(x^6-\binom{6}{5}\frac{x^8}{6}\right)}_{[\sin^6 x]_8}+\frac{x^8}{8!}=$$

$$=1-\frac{1}{2}x^2\frac{5}{24}x^4-\frac{37}{720}x^6++\frac{457}{40320}x^8$$

Sull'uso dei coefficienti binomiali, vorrei spendere qualche parola in più sperando che le nozioni seguenti siano già in possesso degli strudenti. Supponiamo di voler estrre il termine di ordine 10 dall'espressione

$$(ax^3+bx^2+c)^5=(ax^3+bx^2+r)(ax^3+bx^2+r)(ax^3+bx^2+r)(ax^3+bx^2+r)(ax^3+bx^2+r)$$

Abbiamo:

$$b^5x^{10}=bx^2\cdot bx^2\cdot bx^2\cdot bx^2\cdot bx^2$$

e c'è un solo modo di ottenerlo. Poi abbiamo

$$ax^3 \cdot ax^3 \cdot bx^2 \cdot bx^2 \cdot r = \underbrace{a^2}_{\binom{5}{2}} \underbrace{b^2}_{\binom{3}{2}} \underbrace{r}_{\binom{5}{0}} x^{10}$$

ed abbiamo $\binom{5}{2}\binom{3}{2}\binom{5}{0} = 10 \cdot 3 \cdot 1 = 30$ modi di ottenerlo. Notare che una volta scelto il numero di contributi del tipo ax^3 e bx^2, due per ciascuno, si ha una sola possibilità di scelta del fattorev da cui ottenere rx^0.

Supponiamo ora di voler estrarre il coefficiente di ordine 12.

$$ax^3 \cdot ax^3 \cdot ax^3 \cdot ax^3 \cdot r = \underbrace{a^4}_{\binom{5}{4}} \underbrace{r}_{\binom{5}{0}} x^{12}$$

e quindi abbiamo $\binom{5}{4}\binom{5}{0} = 5$ modi di ottenerlo. Poi abbiamo

$$ax^3 \cdot ax^3 \cdot bx^2 \cdot bx^2 \cdot bx^2 = \underbrace{a^2}_{\binom{5}{2}} \underbrace{b^3}_{\binom{5}{0}} x^{12}$$

e quindi abbiamo $\binom{5}{2}\binom{5}{0} = 10$ modi di ottenerlo.

L'errore più frequente, eccessivamente ingenuo, è stato scrivere $\sin x = x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120} + \ldots$. Se la richiesta arriva fino all'ordine otto, è irragionevole fermarsi al quinto nello sviluppo del seno!

Possiamo maggiorare $\left| xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \right| \leq |xy| \dfrac{x^2+y^2}{x^2+y^2} = |xy|$ per cui $\lim\limits_{\underline{x}\to\underline{0}} f(\underline{x}) = 0$. Siccome $f(\underline{0}) = 0$, la funzione è continua nell'origine. Fuori dall'origine, la funzione è prodotto di funzioni continue con denominatore non nullo e quindi è continua.

$$\partial_x f(\underline{0}) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{h}(f(0+t,0) - f(\underline{0})) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{h}(0-0) = 0$$

$$\partial_y f(\underline{0}) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{h}(f(0,0+t) - f(\underline{0})) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{h}(0-0) = 0$$

$$\partial_x f(\underline{x}) = \frac{y(x^4 - y^4 + 4x^2y^2)}{(x^2+y^2)^2} \qquad \partial_y f(\underline{x}) = \frac{x(x^4 - y^4 - 4x^2y^2)}{(x^2+y^2)^2}, \qquad \underline{x} \neq \underline{0}$$

Ora

$$\partial_{xy} f(\underline{0}) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left(\partial_y f(t,0) - \partial_y f(\underline{0})\right) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left(\frac{t^5}{t^4}\right) = 1$$

$$\partial_{yx} f(\underline{0}) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left(\partial_x f(0,t) - \partial_x f(\underline{0})\right) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left(\frac{-t^5}{t^4}\right) = -1$$

e quindi non sono uguali. Inoltre se $\underline{x} \neq \underline{0}$, si ha

$$\partial_{xy} f(\underline{x}) = \frac{(x^6 + 9x^4y^2 - 9x^2y^4 - y^6)}{(x^2+y^2)^3} = \partial_{yx} f(\underline{x})$$

Nel teorema di Schwarz presente sul libro di testo, si richiede la continuità delle derivate parziali miste in $\underline{0}$. Quindi ad esempio dovremmo far vedere che

$$\lim_{\underline{x}\to\underline{0}} \partial_{xy} f(\underline{x}) = 1$$

A tal proposito sia $(x,y)=(t,mt)$, $m\neq\pm1$,

$$\lim_{t\to0}\partial_{xy}f(t,mt)=\frac{1+9m^2-9m^4-m^6}{(1+m^2)^3}\neq 1$$

in generale per cui non si ha continuità in $\underline{0}$ di $\partial_{xy}f(\underline{x})$.

Punteggi: Per l'esame da 12 crediti: 10, 8, 8, 7. Si hanno tre ore a disposizione. Per l'esame da 4 crediti svolgere solo gli esercici 2,3,4 ed i punteggi sono: 12, 12, 9 Si hanno 100 minuti a disposizione.