Analisi I per Ingegneria Online
Prova scritta del 25–02–2017 A.A. 2016/2017

Nome(Stampatello) **Cognome**(Stampatello) **Matricola**

1) Data la funzione $f(x)=\sqrt{\dfrac{9+e^x}{9e^x+1}}$ si scrivano sul foglio di "bella" le risposte alle seguenti domande **nell'ordine riportato**

1) Dominio, **2)** Limiti della funzione ai bordi (compresi $\pm\infty$) del dominio, **3)** eventuali asintoti **4)** Scrivere la derivata prima semplificata il più possibile evidenziando eventuali punti di non–derivabilità , **5)** Limiti della derivata prima ai bordi (compresi $\pm\infty$) del dominio, **6)** Scrivere le coordinate dei massimi e dei minimi se ve ne sono, **7)** Scrivere la derivata seconda semplificata il più possibile, **8)** Intervalli di concavità e convessità , **9)** Disegnare il grafico della funzione, **10)** Al variare di α nei reali, si dica quante soluzioni reali ammette l'equazione $f(x)=\alpha$, **11)** Si stabilisca se converge l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(f(x)-\frac{1}{3}\right)dx$, **12)** Si stabilisca se converge l'integrale improprio $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\left(f(x)-\frac{1}{3}\right)dx$, **13)** Se esistono, si stabilisca per quali valori di a converge l'integrale improprio $\displaystyle\int_{-\infty}^{0}\left[\ln\left(\frac{1}{3}\sqrt{\frac{9+e^x}{9e^x+1}}\right)\right]^{\frac{a\ln(-x)}{x}}dx$ **14)** Si scriva il polinomio di MacLaurin di $f(x)$ all'ordine 3

Soluzioni

1) $e^x>0$ sempre per cui il dominio della funzione è $\mathbf{R}$.

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1/3$ (asintoto orizzontale) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=3$ (asintoto orizzontale)

3) solo orizzontali.

4)

$$f'(x)=\frac{-40e^x}{\sqrt{9+e^x}(1+9e^x)^{3/2}}$$

la derivata esiste in ogni punto

5) $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=0,\qquad \lim\limits_{x\to-\infty} f'(x)=0$

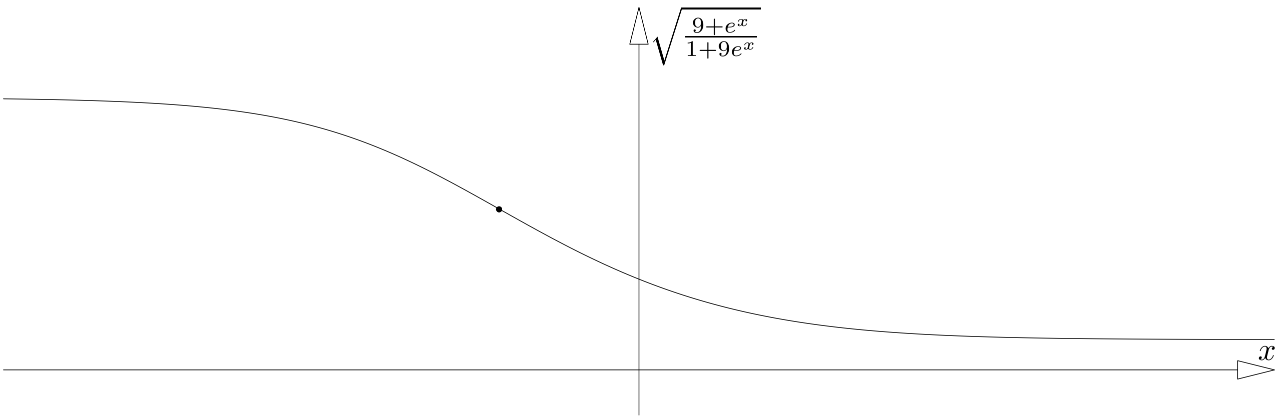
6) $f'(x)<0$ per ogni x (no massimi né minimi)

7)

$$f''(x)=\frac{40e^x(-9+40e^x+9e^{2x})}{(9+e^x)^{3/2}(1+9e^x)^{5/2}}$$

8) $f''(x)\ge 0 \iff x\ge \ln\dfrac{-20+\sqrt{481}}{9}\sim -1.54$

9)



10) Una per ogni valore di α.

11)

$$\sqrt{\frac{9+e^x}{1+9e^x}}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}\frac{e^{x/2}}{e^{x/2}}\sqrt{\frac{1+9e^{-x}}{1+\frac{e^{-x}}{9}}}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}\frac{\sqrt{1+9e^{-x}}-\sqrt{1+\frac{e^{-x}}{9}}}{\sqrt{1+\frac{e^{-x}}{9}}}=$$

$$=\frac{1}{3}\frac{9e^{-x}-\frac{e^{-x}}{9}}{\sqrt{1+\frac{e^{-x}}{9}}(\sqrt{1+\frac{e^{-x}}{9}}+\sqrt{1+9e^{-x}})}$$

quindi

$$\lim_{x\to+\infty}x^2\left(\sqrt{\frac{9+e^x}{1+9e^x}}-\frac{1}{3}\right)=0$$

per cui $\displaystyle\int_0^{+\infty}(f(x)-1/3)dx$ converge.

12) Siccome $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=3$, ne segue $f(x)-1/3=3-1/3+o(1)$ per cui l'integrale non può convergere.

13)

$$\ln\left(\frac{1}{3}\sqrt{\frac{9+e^x}{9e^x+1}}\right)\le 0\iff\frac{1}{3}\sqrt{\frac{9+e^x}{9e^x+1}}\le 1\iff 9+e^x\le 9+81e^{2x}\iff x\ge-9\ln 2$$

e chiaramente è vera. Ne segue che se $x<-9\ln 2$, non esiste valore di α per il quale la funzione è definita tranne $\alpha=0$. Per $\alpha=0$ chiaramente l'integrale diverge a $-\infty$.

14)

$$1-\frac{2}{5}x+\frac{2}{25}x^2+\frac{1}{750}x^3+O(x^4)$$

2) Si calcolino le derivate parziali della funzione $f(x,y)=\arctan\ln(1+x^3+xy^2)$.

$$\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)=\frac{1}{1+(\ln(1+x^3+xy^2))^2}\frac{3x^2+y^2}{1+x^3+xy^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)=\frac{1}{1+(\ln(1+x^3+xy^2))^2}\frac{2xy}{1+x^3+xy^2}$$

3) Si trovi il limite $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\arcsin(\sin x)}{x} = 0$

$$\left|\frac{\arcsin(\sin x)}{x}\right| \leq \frac{\pi}{2x}$$

4) Sia data la funzione $f(x)$ che vale -1 se $x \leq 0$ e 1 se $x > 0$. Si costruisca poi $\displaystyle\int_0^x f(y)dy$. Si trovino i punti in cui $F(x)$ derivabile e quelli in cui non lo è se ve ne sono.

Nei punti in cui la funzione è continua, $F(x)$ è derivabile e quindi in $\mathbf{R}\backslash\{0\}$.

Vediamo $x = 0$.

$$f_+(0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\int_0^h f(x)dx = \lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h}\int_0^h dx = 1$$

$$f_-(0) = \lim_{h\to 0^-} \frac{1}{h}\int_0^h f(x)dx = \lim_{h\to 0^-}\frac{1}{h}\int_0^h (-1)dx = -1$$

e non è derivabile.

5) Sia data la funzione $f(x)$ che vale $x^3\sin(1/x)$, se $x \neq 0$, e $f(0) = 0$. **1)** Scrivere la derivata prima. **2)** Scrivere la derivata seconda. **3)** Scrivere il polinomio di Taylor all'ordine 2 centrato in $x = 0$ e scrivere il resto

1) Se $x \neq 0$ $f'(x) = 3x^2\sin(1/x) - x\cos(1/x)$. Se $x = 0$

$$f'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}(f(0+h) - f(0)) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}h^3\sin\frac{1}{h} = 0$$

2) Se $x \neq 0$ allora $f''(x) = 6x\sin\dfrac{1}{x} - 3\cos\dfrac{1}{x} - \cos\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$

Se $x = 0$ si ha

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}(f'(h) - f'(0)) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}(3h^2\sin\frac{1}{h} - h\cos\frac{1}{h}) \qquad \text{non esiste}$$

3) $f(x) = P_2(x) + R_2(x) = 0 + x^3\sin(1/x)$. Infatti il polinomio è il polinomio nullo ed il resto $R_2(x)$ deve soddisfare $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{R_2(x)}{x^2} = 0$. Nonostante la derivata seconda non esista, esiste il polinomio di Taylor del secondo ordine nell'origine.