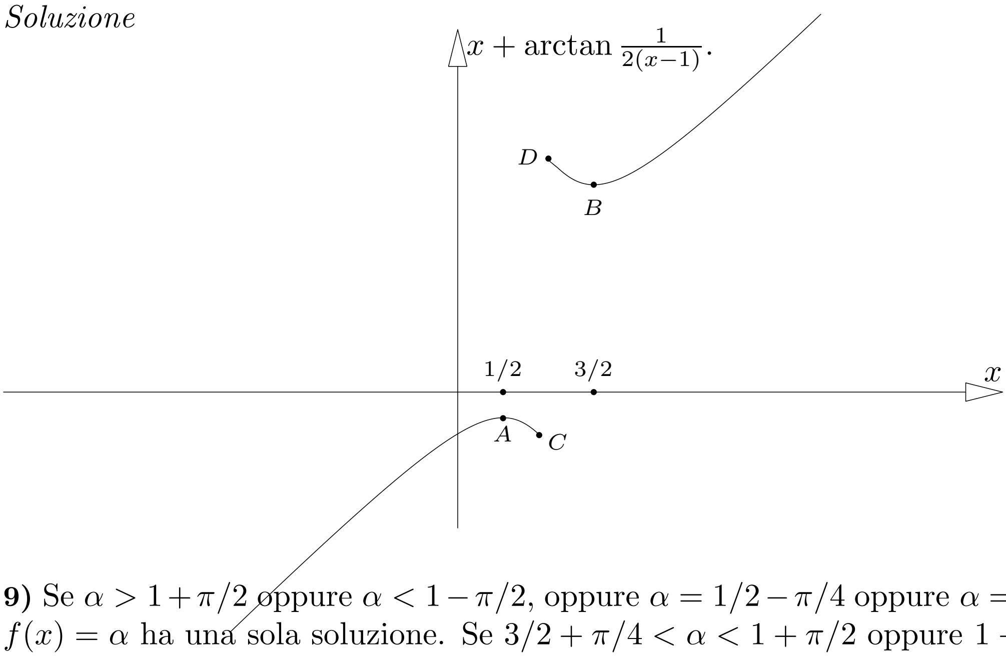
Analisi I per Ingegneria Online
Prova scritta del 04–02–2017 A.A. 2016/2017

Nome(Stampatello) **Cognome**(Stampatello) **Matricola**

1) Data la funzione $f(x) = x + \arctan\dfrac{1}{2(x-1)}$, si scrivano sul foglio di "bella" le risposte alle seguenti domande **nell'ordine riportato**

1) Dominio, **2)** Limiti della funzione ai bordi (compresi $\pm\infty$) del dominio, **3)** eventuali asintoti **4)** Scrivere la derivata prima semplificata il più possibile evidenziando eventuali punti di non–derivabilità , **5)** Limiti della derivata prima ai bordi (compresi $\pm\infty$) del dominio, **6)** Scrivere le coordinate dei massimi e dei minimi se ve ne sono, **7)** Scrivere la derivata seconda semplificata il più possibile, **8)** Intervalli di concavità e convessità , **9)** Al variare di α nei reali, si dica quante soluzioni reali ammette l'equazione $f(x) = \alpha$, **10)** Disegnare il grafico della funzione, **11)** Si calcoli $\displaystyle\lim_{a\to+\infty}\int_{-a}^{a} f(x)dx$, **12)** Sulla base del punto precedente, possiamo dire che esiste $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$? Motivare la risposta, **13)** Si trovino i valori di a per cui converge l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-af(x)}dx$, **14)** Si trovino i valori di a per cui converge l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(e^{-(f(x)-x)^a}-1\right)dx$

Soluzione



9) Se $\alpha > 1+\pi/2$ oppure $\alpha < 1-\pi/2$, oppure $\alpha = 1/2-\pi/4$ oppure $\alpha = 3/2+\pi/4$, l'equazione $f(x)=\alpha$ ha una sola soluzione. Se $3/2+\pi/4 < \alpha < 1+\pi/2$ oppure $1-\pi/2 < \alpha < 1/2-\pi/4$ ha due soluzioni. Se $1/2-\pi/4 < \alpha < 3/2+\pi/4$ non se ne ha nessuna.

11) Integriamo per parti

$$\int f(x)dx = \frac{x^2}{2} + x\arctan\frac{1}{2(x-1)} + \int\frac{x}{1+4(x-1)^2}dx =$$
$$= \frac{x^2}{2} + x\arctan\frac{1}{2(x-1)} + \frac{1}{4}\int\frac{8x-8}{1+4(x-1)^2}dx + 2\int\frac{1}{1+4(x-1)^2}dx =$$
$$= \frac{x^2}{2} + x\arctan\frac{1}{2(x-1)} + \frac{1}{4}\ln(1+4(x-1)^2) + \arctan 2(x-1)$$

per cui

$$= \int_{-a}^{a} f(x)dx =$$

$$= a\arctan\frac{1}{2(a-1)} - a\arctan\frac{1}{2(a+1)} + \frac{1}{4}\ln\frac{1+4(a-1)^2}{1+4(a+1)^2} + \arctan 2(a-1) + \arctan 2(a+1)$$

e

$$\lim_{a\to+\infty}\int_{-a}^{a} f(x)dx = \pi$$

12) No perché per esistere $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ deve aversi l'esistenza indipendente di

$$\lim_{a\to+\infty}\int_{r}^{a} f(x)dx \qquad \text{e} \qquad \lim_{a\to+\infty}\int_{-a} rf(x)dx$$

per ogni fissato r ma i limiti precedenti, ad esempio il primo, darebbero $+\infty$.

13) Siccome

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 e^{-af(x)} = \lim_{x\to+\infty} x^2 e^{-ax-a\arctan\frac{1}{2(x-1)}} = 0 \qquad a>0$$

e

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}e^{-af(x)} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}e^{-ax-a\arctan\frac{1}{2(x-1)}} = +\infty \qquad a\le 0$$

segue che converge solo se $a>0$.

14)

$$(f(x)-x)^a = \left[\arctan\frac{1}{2(x-1)}\right]^a = \left[\frac{1}{2(x-1)} + O(x^{-2})\right]^a,\ x\to+\infty$$

Se $a<0$ $(f(x)-x)^a \to +\infty$ e quindi $e^{-(f(x)-x)^a}-1 \to -1$ da cui la divergenza dell'integrale. Se $a=0$ $e^{-(f(x)-x)^a}-1 \equiv 0$ da cui convergenza.

$a>0$.

$$e^{-(f(x)-x)^a} - 1 = e^{-\frac{1}{2^a(x-1)^a}(1+O(x^{-1}))^a} - 1 =$$

$$= 1 - \frac{1}{2^a(x-1)^a}(1+O(x^{-1}))^a + O\left(\left(-\frac{1}{2^a(x-1)^a}(1+O(x^{-1}))^a\right)^2\right) - 1 =$$

$$= -\frac{1}{2^a(x-1)^a}(1+O(x^{-1}))^a + O\left(\left(-\frac{1}{2^a(x-1)^a}(1+O(x^{-1}))^a\right)^2\right)$$

Sia $a>1$ e quindi $(1+a)/2>1$,

$$\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1+a}{2}}\left[-\frac{1}{2^a(x-1)^a}(1+O(x^{-1}))^a + O\left(\left(-\frac{1}{2^a(x-1)^a}(1+O(x^{-1}))^a\right)^2\right)\right] = 0$$

l'integrale converge. Se invece $0<a<1$, si ha

$$\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1+a}{2}}\left[-\frac{1}{2^a(x-1)^a}(1+O(x^{-1}))^a + O\left(\left(-\frac{1}{2^a(x-1)^a}(1+O(x^{-1}))^a\right)^2\right)\right] = +\infty$$

e l'integrale diverge essendo $(1+a)/2 \leq 1$.

2) Si calcolino le derivate parziali della funzione $f(x,y)=\ln(\arctan(x^2/y))$.

3) Argomentando si trovino, qualora esistano, i valori di a per cui converge la serie
$\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{e^{(\sqrt{1+k^2}-k)^a}-1}{\ln(k^2+e^{k(a-1)})}$

$\sqrt{1+k^2}-k = k\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}-k = k\left(1+\frac{1}{2k^2}+O(k^{-4})-1\right) = \frac{1}{2k}+O(k^{-3})$ e quindi

$$(\sqrt{1+k^2}-k)^a = \frac{1}{2^a k^a}\left(1+O(\frac{1}{k^2})\right)^a$$

Sia $a=0$. Abbiamo $\displaystyle\frac{e^{(\sqrt{1+k^2}-k)^a}-1}{\ln(k^2+e^{k(a-1)})} \equiv 0$ e quindi la serie converge.

$a<0$. $\frac{e^{(\sqrt{1+k^2}-k)^a}-1}{\ln(k^2+e^{k(a-1)})} \to +\infty$ e la serie diverge.
$0<a\leq 1$.

$$e^{(\sqrt{1+k^2}-k)^a}-1 = e^{\frac{1}{2^a k^a}\left(1+O(\frac{1}{k^2})\right)^a}-1 = 1+\frac{1}{2^a k^a}\left(1+O(\frac{1}{k^2})\right)^a + Ok^{-2a})-1$$

$$\ln(k^2+e^{k(a-1)}) = 2\ln k+\ln\left(1+k^{-2}e^{k(a-1)}\right) = 2\ln k\left(1+\frac{(1+k^{-2}e^{k(a-1)})}{2\ln k}\right)$$

Ne segue che

$$\frac{e^{(\sqrt{1+k^2}-k)^a}-1}{\ln(k^2+e^{k(a-1)})} = \frac{1}{2^a k^a 2\ln k}(1+O(1))$$

da cui la divergenza essendo $\displaystyle\sum \frac{1}{k^a \ln k} = +\infty$ se $a\leq 1$.

Sia $a>1$.

$$\ln(k^2+e^{k(a-1)}) = k(a-1)\left(1+\frac{\ln k^2}{k(a-1)}\right)$$

Ne segue che

$$\frac{e^{(\sqrt{1+k^2}-k)^a}-1}{\ln(k^2+e^{k(a-1)})} = \frac{1}{2^a k^a 2k(a-1)}(1+O(1))$$

ossia convergenza.

4) Sia data la funzione $f(x)$ che vale $\cos(1/x)$ se $x\neq 0$ e 0 se $x=0$. Si costruisca poi $\displaystyle\int_0^x f(y)dy$.
1) Si dica se F è derivabile in $x=1$ e perché   2) si dica se F è derivabile in $x=0$ e perché

In $x=1$ è derivabile per il Teorema fondamentale del calcolo integrale per cui $F'(1)=\cos 1$
$x=0$. Dobbiamo studiare

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(0+h)-F(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_0^h \cos\frac{1}{x}dx$$

Cambiamo variabile $x=1/y$ da cui

$$\frac{1}{h}\int_{+\infty}^{1/h}\frac{-\cos y}{y^2}dy=\frac{1}{h}\int_{1/h}^{+\infty}\frac{\cos y}{y^2}dy$$

Integriamo per parti

$$\frac{1}{h}\left[\frac{\sin y}{y^2}\Bigg|_{1/h}^{+\infty}-\int_{1/h}^{+\infty}-\frac{2\sin y}{y^3}\right]\xrightarrow[h\to 0]{}0$$

e quindi $F'(0)=0$ nonostante in $x=0$ l'integrando sia discontinuo.