UNIVERSITÀ DI ROMA "TOR VERGATA" — FACOLTÀ DI INGEGNERIA
Corso di Ingegneria Online, A.A.2016–2017
Analisi Matematica II (gestionale)— Prova scritta del 25.02.2017

svolgere tutti gli esercizi (tempo 180 minuti)

1) Si consideri la funzione $f(x,y)=x^2y^2-x^2-xy^2+x$

1.1) Si individuino i punti critici. Successivamente se ne stabilisca la natura.

1.2) Si trovino massimo e minimo assoluti della funzione all'interno del quadrato di centro l'origine e lato 3 (lati compresi).

1.3) Si dica se esiste e quanto vale $\displaystyle\lim_{\substack{\|\underline{x}\|\to\infty \;\; x\geq 1\\ 1+\frac{1}{\sqrt{x}}\leq y\leq 1+\frac{2}{\sqrt{x}}}} f(x,y)$

1.4) Si dica se esiste e quanto vale $\displaystyle\lim_{\|\underline{x}\|\to\infty} f(x,y)$

2) Sia dato l'insieme $D=\{\underline{x}\in\mathbf{R}^2 : x^2+y^2\leq -x-y\}$.

2.1) Se ne calcoli l'area.

2.2) Sia E quella parte di D che giace nel secondo e terzo quadrante. Si calcoli il volume del solido ottenuto ruotando E intorno all'asse delle y nello spazio $\mathbf{R}^3=\{x,y,z\}$

2.3) Sia E quella parte di D che giace nel terzo quadrante. Si calcoli il volume del solido ottenuto ruotando E intorno all'asse delle x nello spazio $\mathbf{R}^3=\{x,y,z\}$

2.4) Si calcoli $\int_{\gamma^+}\omega$ dove γ^+ è il bordo di D percorso in senso antiorario e $\omega=(x^3+xy)dx+(y^3-xy)dy$

Suggerimento (Impostare il problema in coordinate polari e può essere utile ricordare che $\sin^2 x=(1-\cos(2x))/2$, $\cos^2 x=(1+\cos(2x))/2$,)

3) Si valuti l'integrale $\int_\varphi \omega$ dove $\omega=\dfrac{2zx}{x^2+y^2}dx+\dfrac{2zy}{x^2+y^2}dy+(2z+\ln(x^2+y^2))dz$ e φ è la curva $x=\cos\theta$, $y=\sin\theta$, $z=\theta$, $0\leq\theta\leq 2\pi$

4) Sia data la serie di funzioni $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} x^2 e^{-x^2k^2}$.

4.1) Trovare l'insieme di convergenza puntuale

4.2) Dire argomentando se converge uniformemente nei seguenti insiemi: 1) $[1,+\infty)$, 2) $[-1,1]$

Soluzion1

1) Le prime due domande sono ovvie.

1.3) Possiamo scrivere la funzione come $f(x,y)=x^2(y^2-1)-x(y^2-1)=(x^2-x)(y^2-1)$. Poi osserviamo

$$1+\frac{1}{x}+\frac{2}{\sqrt{x}}\leq y^2\leq 1+\frac{4}{x}+\frac{4}{\sqrt{x}} \implies y^2-1\geq\frac{1}{x}+\frac{2}{\sqrt{x}}$$

da cui

$$f(x,y)\geq (x^2-x)(\frac{1}{x}+\frac{2}{\sqrt{x}})\to+\infty$$

1.4) Il limite non esiste in quanto $f(1,y)\equiv 0$ per ogni y.

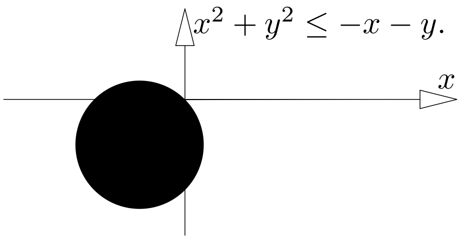
2)

2.1) Prima dimostrazione Il bordo della figura è dato dalla equazione $(x+\frac{1}{2})^2+(y+\frac{1}{2})^2=\frac{1}{2}$ per cui l'area è $\pi/2$.

Seconda dimostrazione In coordinate polari centrate nell'origine (r,t) si ha

$$x^2+y^2=r^2\le -x-y=-r(\sin t+\cos t)\iff r\le -\sin t-\cos t$$

e ciò è possibile solo se $\cos t+\sin t\le 0$ da cui $3\pi/4\le t\le 7\pi/4$.



L'area è

$$\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}} dt\int_0^{-\sin t-\cos t} rdr=\frac{1}{2}\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}}(1+\sin(2t))dt=\frac{\pi}{2}$$

2.2) Prima dimostrazione L'insieme E è definito da $3\pi/4\le t\le 3\pi/2$. Il volume è

$$\int\int_E 2\pi|x|dxdy=2\pi\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{2}} dt\int_0^{-\sin t-\cos t}\underbrace{r}_{iacob.}\underbrace{-r\cos t}_{-x}dr=(C=\cos t,\ S=\sin t)$$

$$=\frac{2\pi}{3}\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{2}} dtC(C+S)^3dt=\frac{2\pi}{3}\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{2}} dtC(C^3+S^3+3C^2S+3CS^2)dt$$

$$C^4=C^2(1-S^2)=\frac{1+\cos(2t)}{2}-\frac{\sin^2(2t)}{4}\implies \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{2}} C^4dt=\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{2}} C^2(1-S^2)dt=$$

$$=\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{2}}\frac{1+\cos(2t)}{2}dt-\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{2}}\frac{\sin^2(2x)}{4}dx=\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{2}}\frac{1+\cos(2t)}{2}dt-\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{2}}\frac{1-\cos(4x)}{8}dx$$

$$=\frac{3}{8}\frac{3}{4}\pi+\frac{1}{4}\sin(2t)\Big|_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{2}}+\frac{1}{32}\sin(4t)\Big|_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{2}}=\frac{9}{32}\pi+\frac{1}{4}$$

$$\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{2}} CS^3dt=\frac{1}{4}S^4\Big|_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{2}}=\frac{1}{4}\frac{3}{4}=\frac{3}{16}$$

$$\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{2}} 3C^3Sdt=\frac{3}{4}C^4\Big|_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}}=\frac{3}{4}\frac{1}{4}$$

$$\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{2}} 3C^2S^2dt=\frac{3}{4}\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{2}}\sin^2(2x)dx=\frac{3}{8}\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{2}}(1-\cos(4x))dx=\frac{9}{32}\pi$$

Sommando il tutto si ha $\frac{2}{3}\pi\left(\frac{9}{32}\pi+\frac{1}{4}+\frac{3}{16}+\frac{3}{16}+\frac{9}{32}\pi\right)=\frac{3}{8}\pi^2+\frac{5}{12}\pi$

Seconda dimostrazione Adottiamo le coordinate centrate in $(-1/2, -1/2)$, $x = -1/2+(r\cos t)/\sqrt{2}$, $y = -1/2+(r\sin t)/\sqrt{2}, \ldots\ldots$ **Apparentemente le coordinate polari centrate in** $(-1/2, -1/2)$ **dovrebbero essere più indicate ma non è così . Gli studenti provino a completare il conto. C'è da imparare**

2.3) L'insieme E è definito da $\pi \leq t \leq 3\pi/2$. Il volume è

$$\int\int_E 2\pi|y|dxdy = 2\pi\int_\pi^{\frac{3\pi}{2}} dt\int_0^{-\sin t-\cos t} \underbrace{r}_{iacob.}\ \underbrace{-r\sin t}_{-y}\, dr = (C = \cos t,\ S = \sin t) =$$

$$= \frac{2\pi}{3}\int_\pi^{\frac{3\pi}{2}} dtS(C+S)^3dt = \frac{2}{3}\pi\int_\pi^{\frac{3\pi}{2}} \underbrace{(SC^3 + S^4 + 3S^3C + 3C^2S^2)}_{S=\sin t,\ C=\cos t}\, dt =$$

$$S^4 = S^2(1-C^2) = \frac{1-\cos(2t)}{2} - \frac{\sin^2(2t)}{4} = \frac{1-\cos(2t)}{2} - \frac{1-\cos(4t)}{8} \implies$$

$$\int_\pi^{\frac{3\pi}{2}} S^4dt = \int_\pi^{\frac{3\pi}{2}} \left(\frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos(2t) + \frac{1}{8}\cos(4t)\right) = \frac{3}{16}\pi$$

$$\int_\pi^{\frac{3\pi}{2}} CS^3dt = \frac{1}{4}S^4\Big|_\pi^{\frac{3\pi}{2}} = \frac{1}{4}$$

$$\int_\pi^{\frac{3\pi}{2}} C^3Sdt = \frac{1}{4}C^4\Big|_{\frac{3\pi}{2}}^{\pi} = \frac{1}{4}$$

$$\int_\pi^{\frac{3\pi}{2}} 3C^2S^2dt = \frac{3}{4}\int_\pi^{\frac{3\pi}{2}} \sin^2(2x)dx = \frac{3}{8}\int_\pi^{\frac{3\pi}{2}} (1-\cos(4x))dx = \frac{3}{16}\pi$$

Sommando abbiamo

$$\int\int_E 2\pi|y|dxdy = \frac{2}{3}\pi\left(\frac{3}{16}\pi + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{16}\pi\right) = \frac{\pi^2}{4} + \frac{2}{3}\pi$$

1.4) La forma $x^3dx + y^3dy$ è esatta e quindi l'integrale è nullo essendo il cammino chiuso. Rimaniamo con $\omega = xydx - xydy$ ed applichiamo Gauss-Green per cui

$$\oint_{\gamma^+} \omega = \int\int_D ((-xy)_x - (xy)_y))\, dx\, dy = \int\int_D (-y-x)dx\, dy$$

ossia

$$\int_{\frac{3}{4}\pi}^{\frac{7}{4}\pi} dt\int_0^{-\sin t-\cos t} drrr(-\cos t - \sin t) = \frac{1}{3}\int_{\frac{3}{4}\pi}^{\frac{7}{4}\pi} dt(C+S)^4 = \frac{4}{3}\int_{\frac{3}{4}\pi}^{\frac{7}{4}\pi} dt\sin^4(t+\frac{\pi}{4}) =$$
$$= \frac{4}{3}\int_\pi^{2\pi} dt\sin^4 ydy = \frac{4}{3}\frac{3}{8}\pi = \frac{\pi}{2}$$

Stavolta le coordinate polari centrate in $(-1/2, -1/2)$ **sarebbero un'ottima scelta. Si cerchi di capire la differenza coi punti precedenti.**

3) Si noti che il rotore della forma è zero. Troviamo il potenziale $F(x, y, z)$.

$$F_x = \frac{2xz}{x^2+y^2} \implies F(x, y, z) = z\ln(x^2+y^2) + \underbrace{Q(y, z)}_{da\ trovare}$$

$$F_y = \frac{2yz}{x^2+y^2} + Q_y = \frac{2yz}{x^2+y^2} \implies Q_y = 0 \implies Q(y,z) = \underbrace{P(z)}_{da\ trovare}$$

$$F(x,y,z) = z\ln(x^2+y^2) + P(z) \implies F_z = \ln(x^2+y^2) + P'(z) = z + \ln(x^2+y^2)$$

da cui $P(z) = z^2/2$ e quindi $F(x,y,z) = z\ln(x^2+y^2) + z^2/2$. Il risultato è $F(P_f) - F(P_i)$. P_f è il punto finale ossia $P_f = (1,0,2\pi)$ e $P_i = (1,0,0)$ è il punti iniziale e quindi

$$F(P_f) - F(P_i) = \frac{1}{2}(2\pi)^2 - 0 = 2\pi^2$$

4.1) La serie converge puntualmente per ogni $x \in \mathbf{R}$. Se $x = 0$ vale identicamente zero. Se $x \neq 0$ possiamo osservare che $e^{-x^2k^2} \leq e^{-x^2k}$ e

$$\sum_{k=1}^{+\infty} e^{-x^2k} = \frac{e^{-x^2}}{1-e^{-x^2}}$$

da cui la convergenza. Potevamo pure fare $\lim\limits_{k\to+\infty} k^2 e^{-x^2k^2} = 0$ da cui, da un certo k_0 in poi si ha

$$\sum_{k=k_0}^{+\infty} x^2 e^{-x^2k^2} \leq \sum_{k=k_0}^{+\infty} \frac{x^2}{k^2}$$

e quindi convergenza.

4.2) Il massimo della funzione $x^2e^{-x^2k^2}$ si ha in $x = 1/k < 1$ per cui $x^2e^{-x^2k^2} \leq 1^2e^{-1^2\cdot k^2} = e^{-k^2}$ e siccome $\sum e^{-k^2} < +\infty$, la serie converge uniformemente in $[1,+\infty)$.

Convergenza in $[-1,1]$. Basta analizzare $[0,1]$. Per quanto detto prima

$$x^2e^{-x^2k^2} \leq \frac{1}{k^2}e^{-\frac{1}{k^2}k^2} = \frac{e^{-1}}{k^2}$$

e siccome $\sum 1/k^2 < +\infty$ la serie converge uniformemente.