Esercizi di Analisi Matematica
Serie di funzioni

Tommaso Isola*

November 30, 2009

Contents

*Dipartimento di Matematica, Università di Roma “Tor Vergata”, I–00133 Roma, Italy.

1 Successioni di funzioni

1.1 Teoria

Definizione 1.1. Siano $A \subset \mathbb{R}$, $f_n : A \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $f : A \to \mathbb{R}$. Si dice che $\{f_n\}$ converge puntualmente ad f in A se, per ogni $x \in A$, $\varepsilon > 0$, esiste $n_{\varepsilon,x} \in \mathbb{N}$ tale che, per ogni $n > n_{\varepsilon,x}$, si ha $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. Si indica $f_n \to f$.

Definizione 1.2. Siano $A \subset \mathbb{R}$, $f_n : A \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $f : A \to \mathbb{R}$. Si dice che $\{f_n\}$ converge uniformmente ad f in A se, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che, per ogni $n > n_\varepsilon$, si ha $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, per ogni $x \in A$. Si indica $f_n \rightrightarrows f$.

Osservazione 1.3. Osserviamo che la definizione di convergenza uniforme si può anche formulare così: per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che, per ogni $n > n_\varepsilon$, si ha $\sup_{x\in A} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Esempi 1.4. Vediamo alcuni esempi nei quali alcune proprietà di una successione di funzioni puntualmente convergente non valgono per la funzione limite.

(1) $\{f_n\} \subset C^0[a,b]$, $f_n \to f \quad \not\Longrightarrow \quad f \in C^0[a,b]$.

Sia $f_n(x) := x^n$, $x \in [0,1]$. Allora $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x < 1, \\ 1, & x = 1, \end{cases}$ e $f \notin C^0[0,1]$.

(2) $\{f_n\} \subset \mathcal{R}[a,b]$, $f_n \to f$, $f \in \mathcal{R}[a,b] \quad \not\Longrightarrow \quad \int_a^b f_n \to \int_a^b f$.

Sia $f_n(x) := nx(1-x^2)^n$, $x \in [0,1]$. Allora $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, [\text{perché } f_n(0) = 0], \\ 0, & 0 < x \le 1, [\text{perché } (1-x^2)^n \to 0]. \end{cases}$

Inoltre $\int_0^1 f_n(x)\,dx = n\int_0^1 x(1-x^2)^n\,dx \overset{(a)}{=} n\int_1^0 y^n\big(-\frac{1}{2}\big)\,dy = \frac{n}{2}\int_0^1 y^n\,dy = \frac{n}{2}[\frac{y^{n+1}}{n+1}]_0^1 = \frac{1}{2}\frac{n}{n+1} \to \frac{1}{2}$ [in (a) si è eseguito il cambio di variabile $y = 1 - x^2$], mentre $\int_0^1 f(x)\,dx = 0 \ne \frac{1}{2}$.

(3) $\{f_n\}$ derivabili in (a,b), $f_n \to f$, f derivabile in $(a,b) \quad \not\Longrightarrow \quad f_n' \to f'$.

Sia $f_n(x) := \frac{1}{n}\sin(nx)$, $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Allora $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$, per ogni $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Inoltre $f_n'(x) = \cos(nx)$, $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, e $\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = \begin{cases} 1, & x = 0, \\ \nexists, & x \in (-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2}), \end{cases}$ mentre $f'(x) = 0$, per ogni $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Proposizione 1.5 (Criterio di convergenza puntuale)**.** *Siano $A \subset \mathbb{R}$, $f_n : A \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Allora $\{f_n\}$ converge puntualmente in A $\iff$ per ogni $x \in A$, $\varepsilon > 0$, esiste $n_{\varepsilon,x} \in \mathbb{N}$ tale che, per ogni $m, n \in \mathbb{N}$, $m, n > n_{\varepsilon,x}$, si ha $|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$.*

Dim. ($\Longrightarrow$) Siano $x \in A$, $\varepsilon > 0$, e sia $n_{\varepsilon,x} \in \mathbb{N}$ tale che, per ogni $n > n_{\varepsilon,x}$, si ha $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. Allora, per ogni $m, n \in \mathbb{N}$, $m, n > n_{\varepsilon,x}$, si ha $|f_m(x) - f_n(x)| \le |f_m(x) - f(x)| + |f_n(x) - f(x)| < 2\varepsilon$.
($\Longleftarrow$) Per ogni $x \in A$, $\{f_n(x)\}$ è di Cauchy, e quindi esiste $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. □

Proposizione 1.6 (Criterio di convergenza uniforme)**.** *Siano $A \subset \mathbb{R}$, $f_n : A \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Allora $\{f_n\}$ converge uniformemente in A $\iff$ per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che, per ogni $m, n \in \mathbb{N}$, $m, n > n_\varepsilon$, si ha $|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$, per ogni $x \in A$.*

Dim. ($\Longrightarrow$) Sia $\varepsilon > 0$, e sia $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che, per ogni $n > n_\varepsilon$, si ha $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, per ogni $x \in A$. Allora, per ogni $m, n \in \mathbb{N}$, $m, n > n_\varepsilon$, si ha $|f_m(x) - f_n(x)| \le |f_m(x) - f(x)| + |f_n(x) - f(x)| < 2\varepsilon$, per ogni $x \in A$.

($\Longleftarrow$) Per ogni $x \in A$, $\{f_n(x)\}$ è di Cauchy, e quindi esiste $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. Dimostriamo che la convergenza è uniforme. Infatti, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che, per ogni $m, n \in \mathbb{N}$, $m, n > n_\varepsilon$, si ha $|f_m(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$, per ogni $x \in A$. Passando al limite per $m \to \infty$ si ha $|f(x) - f_n(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$, per ogni $x \in A$, $n > n_\varepsilon$, cioè la tesi. □

Proposizione 1.7. *Siano $A \subset \mathbb{R}$, $f_n : A \to \mathbb{R}$ limitata, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $f_n \rightrightarrows f$ in A. Allora $f : A \to \mathbb{R}$ è limitata.*

Esempio 1.8. Se la convergenza non è uniforme, la tesi della Proposizione 1.7 può non valere. Ad esempio, se $f_n(x) := \begin{cases} n, & 0 < x < \frac{1}{n}, \\ \frac{1}{x}, & \frac{1}{n} \leq x \leq 1, \end{cases}$ allora $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \frac{1}{x}$, $x \in (0,1]$, mentre $\sup_{x\in(0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in(0,\frac{1}{n})} |\frac{1}{x} - n| = +\infty$, e quindi $f_n \not\rightrightarrows f$. Osserviamo che f_n è limitata in $(0,1]$, per ogni $n \in \mathbb{N}$, in quanto $\sup_{x\in(0,1]} |f_n(x)| = n < \infty$, mentre f è illimitata in $(0,1]$, in quanto $\sup_{x\in(0,1]} |f(x)| = +\infty$.

Proposizione 1.9 (Limite uniforme di funzioni continue)**.** *Siano $A \subset \mathbb{R}$, $\{f_n\} \subset C^0(A)$, $f_n \rightrightarrows f$ in A. Allora $f \in C^0(A)$.*

Dim. Sia $x_0 \in A$ un punto di accumulazione di A. Siano $\varepsilon > 0$, e $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che $\sup_{x\in A} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, per ogni $n > n_\varepsilon$. Sia $n_0 := n_\varepsilon + 1$, e sia $\delta_\varepsilon > 0$ tale che $|x - x_0| < \delta_\varepsilon \implies |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| < \varepsilon$. Allora, per ogni $x \in A$ tale che $|x - x_0| < \delta_\varepsilon$, si ha $|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| + |f_{n_0}(x_0) - f_{n_0}(x)| < 3\varepsilon$, da cui segue la tesi. □

Esempio 1.10. Se la convergenza non è uniforme, la tesi della Proposizione 1.9 può non valere. Ad esempio, sia $f_n(x) := x^n$, $x \in [0,1]$. Allora $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1, \\ 1, & x = 1, \end{cases}$ ma $\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = 1 \not\to 0$, cioè $f_n \not\rightrightarrows f$. Si ha $\{f_n\} \subset C^0[0,1]$, e $f \notin C^0[0,1]$.

Proposizione 1.11 (Scambio del limite con la derivata)**.** *Siano $f_n : (a,b) \to \mathbb{R}$ derivabile, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $f_n' \rightrightarrows g$ in (a,b), ed esiste $x_0 \in (a,b)$ tale che $\{f_n(x_0)\}$ converge. Allora*

(1) *esiste $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ tale che $f_n \rightrightarrows f$ in (a,b),*

(2) *f è derivabile in (a,b) e $f' = g$.*
Cioè, $\lim_{n\to\infty} \frac{d}{dx} f_n(x) = \frac{d}{dx} \lim_{n\to\infty} f_n(x)$, per ogni $x \in (a,b)$.

Proposizione 1.12. *Siano $\{f_n\} \subset C^1(a,b)$, $f_n' \rightrightarrows g$ in (a,b), ed esiste $x_0 \in (a,b)$ tale che $\{f_n(x_0)\}$ converge. Allora esiste $f \in C^1(a,b)$ tale che $f_n \rightrightarrows f$ in (a,b).*

Dim. Segue dalla Proposizione 1.11. □

Proposizione 1.13 (Scambio del limite con l'integrale)**.** *Siano $\{f_n\} \subset \mathcal{R}[a,b]$, $f_n \rightrightarrows f$ in $[a,b]$. Allora $f \in \mathcal{R}[a,b]$ e $\int_a^b f_n \to \int_a^b f$.*

Cioè, $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx$.

1.2 Esercizi svolti

Esercizio 1. Studiare la convergenza (puntuale e uniforme) della seguente successione di funzioni $f_n(x) = \sqrt{(n+1)x} - \sqrt{nx}$, $x \in [0,2]$.

Svolgimento. Osserviamo che $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$, per ogni $x \in [0,2]$ [perché, $f_n(0) = 0$, mentre, per $x \in (0,2]$, si ha $f_n(x) = (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})\sqrt{x} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \to 0$]. Si ha $\|f_n - f\| = \sup_{x\in[0,2]} f_n(x) = \sup_{x\in[0,2]} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \to 0$, per cui $f_n \to 0$ uniformemente in $[0,2]$. $\square$

Esercizio 2. Studiare la convergenza (puntuale e uniforme) della seguente successione di funzioni $f_n(x) = \dfrac{x}{1+nx}$, $x \in [0,1]$.

Svolgimento. Osserviamo che $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$, per ogni $x \in [0,1]$. Inoltre si ha $\|f_n - f\| = \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = f_n(1) = \frac{1}{1+n} \to 0$, in quanto $f_n'(x) = \frac{1+nx-nx}{(1+nx)^2} > 0$. Quindi $f_n \to 0$ uniformemente in $[0,1]$. $\square$

Esercizio 3. Studiare la convergenza (puntuale e uniforme) della seguente successione di funzioni $f_n(x) = \dfrac{1}{1+nx}$, $x \in [0,\infty)$.

Svolgimento. Osserviamo che $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ 0, & x > 0. \end{cases}$ Poiché le f_n sono continue su $[0,\infty)$, mentre f non è continua su $[0,\infty)$, la convergenza non può essere uniforme. Più direttamente, poiché $|f_n(x) - f(x)| = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ \frac{1}{1+nx}, & x > 0, \end{cases}$ si ha $\|f_n - f\| = \sup_{x\geq 0} |f_n(x) - f(x)| = 1 \not\to 0$. $\square$

Esercizio 4. Studiare la convergenza (puntuale e uniforme) della seguente successione di funzioni $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^2x^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

Svolgimento. Osserviamo che $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$, per ogni $x \in \mathbb{R}$. Poiché $f_n'(x) =$

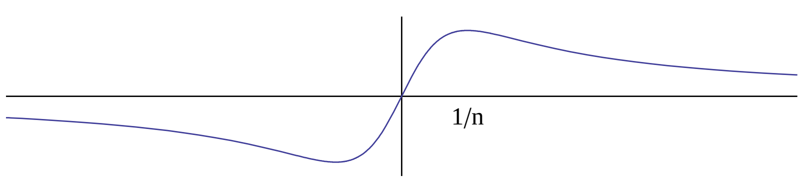

Figure 1: Grafico per l'esercizio 4

$\frac{n(n^2x^2+1)-2n^2x\cdot nx}{(1+n^2x^2)^2} = \frac{n(1-n^2x^2)}{(1+n^2x^2)^2} \geq 0 \iff |x| \leq \frac{1}{n}$, si ha $\|f_n - f\| = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)| = f_n(\frac{1}{n}) = \frac{1}{2} \not\to 0$, per cui $f_n \not\to 0$ uniformemente in $\mathbb{R}$. $\square$

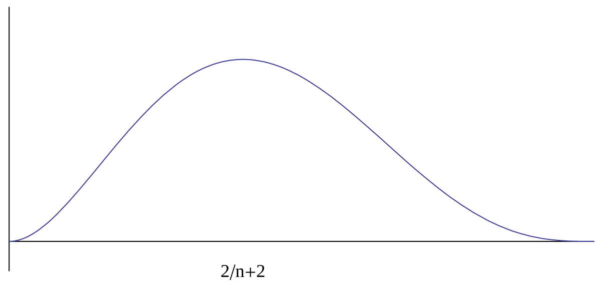

Figure 2: Grafico per l'esercizio 5

Esercizio 5. Studiare la convergenza (puntuale e uniforme) della seguente successione di funzioni $f_n(x) = n^2x^2(1-x)^n$, $x \in [0,1]$.

Svolgimento. Osserviamo che $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$, per ogni $x \in [0,1]$. Poiché $f_n'(x) = n^2\big(2x(1-x)^n - nx^2(1-x)^{n-1}\big) = n^2x(1-x)^{n-1}(2-2x-nx) \geq 0 \iff x \leq \frac{2}{n+2}$, si ha $\|f_n - f\| = \sup_{x\in[0,1]} f_n(x) = f_n(\frac{2}{n+2}) = n^2\frac{4}{(n+2)^2}\left(\frac{n}{n+2}\right)^n \to \frac{4}{e^2} \neq 0$, per cui $f_n \not\to 0$ uniformemente in $[0,1]$. □

Esercizio 6. Studiare la convergenza (puntuale e uniforme) della seguente successione di funzioni $f_n(x) = (1-x)x^n$, $x \in [0,1]$.

Svolgimento. Osserviamo che $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$, per ogni $x \in [0,1]$. Poiché $f_n'(x) =$

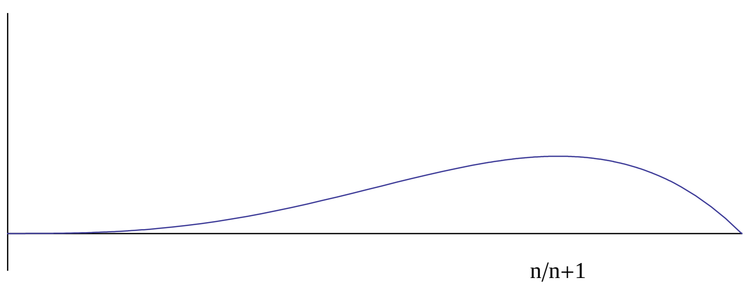

Figure 3: Grafico per l'esercizio 6

$nx^{n-1} - (n+1)x^n = x^{n-1}\big(n-(n+1)x\big) \geq 0 \iff x \leq \frac{n}{n+1}$, si ha $\|f_n - f\| = \sup_{x\in[0,1]} f_n(x) = f_n(\frac{n}{n+1}) = \frac{1}{n+1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \to 0$, per cui $f_n \to 0$ uniformemente in $[0,1]$. □

Esercizio 7. Studiare la convergenza (puntuale e uniforme) della seguente successione di funzioni $f_n(x) = \dfrac{n\sqrt[3]{x}}{1+n^2x^2}$, $x \in [1,\infty)$.

Svolgimento. Osserviamo che $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1+o(1)}{nx^{5/3}} = 0$, per ogni $x \in [1,\infty)$. Si ha $\|f_n - f\| = \sup_{x\in[1,\infty)} f_n(x) \leq \sup_{x\in[1,\infty)} \frac{n\sqrt[3]{x}}{n^2x^2} = \frac{1}{n} \to 0$, per cui $f_n \to 0$ uniformemente in $[1,\infty)$. □

Esercizio 8. Studiare la convergenza (puntuale e uniforme) della seguente successione di funzioni $f_n(x) = \sqrt{\sin^2 x + \dfrac{1}{n^2}}$, $x \in \mathbb{R}$.

Svolgimento. Osserviamo che $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x) = |\sin x|$, per ogni $x \in \mathbb{R}$. Inoltre si ha $\|f_n - f\| = \sup_{x\in\mathbb{R}}[f_n(x) - f(x)] = \sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{\frac{1}{n^2}}{\sqrt{\sin^2 x + \frac{1}{n^2}} + |\sin x|} \le \sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{1/n^2}{1/n} = \frac{1}{n} \to 0$, per cui $f_n \to f$ uniformemente in $\mathbb{R}$. □

Esercizio 9. Studiare la convergenza (puntuale e uniforme) della seguente successione di funzioni $f_n(x) = \dfrac{1+x}{x^n + n^2}$, $x \in [0, \infty)$.

Svolgimento. Osserviamo che $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$, per ogni $x \in [0, \infty)$. Inoltre si ha $\sup_{x\in[0,2]} f_n(x) \le \frac{3}{n^2}$, e $\sup_{x\in[2,\infty)} f_n(x) \le \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{3}{2^{n-1}}$, per cui $\|f_n - f\| = \sup_{x\in[0,\infty)} f_n(x) \le \max\left\{\frac{3}{n^2}, \frac{3}{2^{n-1}}\right\} \to 0$, per cui $f_n \to f$ uniformemente in $\mathbb{R}$. □

Esercizio 10. Studiare la convergenza (puntuale e uniforme) della seguente successione di funzioni $f_n(x) = \dfrac{x^n + x^{2n}}{1 + x^{3n}}$, $x \in [0, 1]$. Dire se la successione $\{f_n\}$ converge uniformemente in $[0, \frac{1}{2}]$.

Svolgimento. Osserviamo che, per ogni $x \in [0, 1)$, si ha $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} x^n(1 + o(1)) = 0$, mentre $f_n(1) = 1$, per cui f non è continua su $[0, 1]$, e quindi $f_n \not\to f$, uniformemente in $[0, 1]$. Infine $\sup_{x\in[0,\frac{1}{2}]} f_n(x) \le \sup_{x\in[0,\frac{1}{2}]} x^n(1 + x^n) \le \left(\frac{1}{2}\right)^n\left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) \to 0$, e quindi $f_n \to f$, uniformemente in $[0, \frac{1}{2}]$. □

1.3 Esercizi proposti

Esercizio 11. Studiare la convergenza (puntuale e uniforme) delle seguenti successioni di funzioni, negli intervalli specificati

(1) $f_n(x) = \dfrac{\log(x^{2n})}{(1+x)^{2n}}$, in $(0, 1]$, o in $[\frac{1}{2}, 1]$,

(2) $f_n(x) = \begin{cases} x^n \sin\left(\frac{1}{x^n}\right) & 0 < x < \frac{1}{\sqrt[n]{\pi}} \\ 0 & \text{altrove,} \end{cases}$ in $\mathbb{R}$,

(3) $f_n(x) = \dfrac{x^n \sin(nx)}{n^{x+1}}$, in $[0, 1]$,

(4) $f_n(x) = x^n \log(x^n)$, in $(0, 1]$, o in $(0, \frac{1}{2}]$,

(5) $f_n(x) = \dfrac{\operatorname{arctg}(x^n)}{n}$, in $\mathbb{R}$,

(6) $f_n(x) = \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^{n^2}$, in $[-1, 0]$,

(7) $f_n(x) = \left(\log\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)\right)^n$, in $(0, 1]$ o in $[\frac{1}{2}, 1]$.

2 Serie di funzioni

2.1 Teoria

Definizione 2.1. Siano $A \subset \mathbb{R}$, $f_n : A \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $f : A \to \mathbb{R}$. Si dice che $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ converge puntualmente ad f in A se $\sum_{k=1}^{n} f_k$ converge puntualmente ad f.

Definizione 2.2. Siano $A \subset \mathbb{R}$, $f_n : A \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $f : A \to \mathbb{R}$. Si dice che $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ converge uniformemente ad f in A se $\sum_{k=1}^{n} f_k$ converge uniformemente ad f.

Proposizione 2.3. *Siano $A \subset \mathbb{R}$, $f_n : A \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $f : A \to \mathbb{R}$. Allora*

(1) *$\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ converge puntualmente ad f in A $\iff$ per ogni $x \in A$, $\varepsilon > 0$, esiste $n_{\varepsilon,x} \in \mathbb{N}$ tale che, per ogni $m, n \in \mathbb{N}$, $m > n > n_{\varepsilon,x}$, si ha $\left|\sum_{k=n}^{m} f_k(x)\right| < \varepsilon$,*

(2) *$\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ converge uniformemente ad f in A $\iff$ per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che, per ogni $m, n \in \mathbb{N}$, $m > n > n_\varepsilon$, si ha $\sup_{x\in A}\left|\sum_{k=n}^{m} f_k(x)\right| < \varepsilon$.*

Dim. (1) Segue dalla Proposizione 1.5.
(2) Segue dalla Proposizione 1.6. □

Proposizione 2.4. *Siano $A \subset \mathbb{R}$, $f_n : A \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $f : A \to \mathbb{R}$. Allora*

(1) *$\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ converge puntualmente ad f in A $\implies$ $f_n \to 0$ puntualmente in A,*

(2) *$\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ converge uniformemente ad f in A $\implies$ $f_n \rightrightarrows 0$ in A.*

Dim. Segue dalla Proposizione 2.3. □

Proposizione 2.5 (Criterio di Weierstrass)**.** *Siano $A \subset \mathbb{R}$, $f_n : A \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $M_n := \sup_A |f_n| < \infty$, e $\sum_{k=1}^{\infty} M_k < \infty$. Allora $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ converge uniformemente in A.*

Dim. Siano $\varepsilon > 0$ e $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che, per ogni $m, n \in \mathbb{N}$, $m > n > n_\varepsilon$, si ha $\sum_{k=n}^{m} M_k < \varepsilon$. Allora, per ogni $x \in A$, si ha $\left|\sum_{k=n}^{m} f_k(x)\right| \le \sum_{k=n}^{m} |f_k(x)| \le \sum_{k=n}^{m} \sup_{x\in A} |f_k(x)| = \sum_{k=n}^{m} M_k < \varepsilon$, e la tesi segue dalla Proposizione 1.6. □

Proposizione 2.6 (Scambio di limite e serie)**.** *Siano $A \subset \mathbb{R}$, $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ converge uniformemente ad f in A, x_0 punto di accumulazione di A, ed esiste $\lim_{x\to x_0} f_n(x) =: L_n \in \mathbb{R}$, per ogni $n \in \mathbb{N}$. Allora*

(1) *$\sum_{k=1}^{\infty} L_k =: L \in \mathbb{R}$,*

(2) *esiste $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$.*
Cioè, $\lim_{x\to x_0} \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{x\to x_0} f_k(x)$.

Proposizione 2.7. *Siano $A \subset \mathbb{R}$, $\{f_k\} \subset C^0(A)$, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ converge uniformemente ad f in A. Allora $f \in C^0(A)$.*

Dim. Segue dalla Proposizione 1.9. □

Proposizione 2.8 (Scambio della serie con la derivata)**.** *Siano $f_n : (a, b) \to \mathbb{R}$ derivabile, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=1}^{\infty} f_k'$ converge uniformemente a g in (a, b), ed esiste $x_0 \in (a, b)$ tale che $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x_0)$ converge. Allora*

(1) *esiste $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ tale che $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ converge uniformemente a f in (a, b),*

(2) *f è derivabile in (a,b) e $f' = g$.*
Cioè, $\frac{d}{dx}\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d}{dx} f_k(x)$, per ogni $x \in (a,b)$.

Dim. Segue dalla Proposizione 1.11. $\square$

Proposizione 2.9 (Scambio della serie con l'integrale)**.** *Siano $\{f_n\} \subset \mathcal{R}[a,b]$, $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ converge uniformemente ad f in $[a,b]$. Allora $f \in \mathcal{R}[a,b]$ e $\int_a^b \sum_{k=1}^{\infty} f_k = \int_a^b f$.*
Cioè, $\int_a^b \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b f_k(x)\,dx$.

Dim. Segue dalla Proposizione 1.13. $\square$

2.2 Esercizi svolti

Esercizio 12. Studiare la convergenza (puntuale e) uniforme della seguente serie di funzioni $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(1+nx^2)}$, $x \in [1,+\infty)$.

Svolgimento. Osserviamo che, per ogni $x \in [1,+\infty)$ fissato, la serie converge [perché $\frac{1}{n(1+nx^2)} = \frac{1}{n^2x^2(1+o(1))}$]. Per determinare se la serie converge uniformemente, usiamo il criterio di Weierstrass di convergenza totale, e calcoliamo $M_n := \sup_{x\in[1,+\infty)}\left|\frac{1}{n(1+nx^2)}\right| = \frac{1}{n(1+n)}$. Poiché $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ converge, la serie data converge uniformemente in $[1,+\infty)$. $\square$

Esercizio 13. Studiare la convergenza (puntuale e) uniforme della seguente serie di funzioni $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}(x\sqrt{n})}{n^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

Svolgimento. Osserviamo che la serie converge per ogni $x \in \mathbb{R}$ fissato, perché $\left|\frac{\operatorname{arctg}(x\sqrt{n})}{n^2}\right| \le \frac{\pi}{2n^2}$. Per determinare se la serie converge uniformemente, usiamo il criterio di Weierstrass di convergenza totale, e calcoliamo $M_n := \sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\frac{\operatorname{arctg}(x\sqrt{n})}{n^2}\right| = \frac{\pi}{2n^2}$. Poiché $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ converge, la serie data converge uniformemente in $\mathbb{R}$. $\square$

Esercizio 14. Studiare la convergenza (puntuale e) uniforme della seguente serie di funzioni $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(1+x^{2n})}{n^2}$, $x \in [-1,1]$.

Svolgimento. Osserviamo che la serie converge per $x = 0$; inoltre, per ogni $x \in [-1,0)\cup(0,1]$ fissato, la serie converge perché $\frac{\log(1+x^{2n})}{n^2} = \frac{x^{2n}(1+o(1))}{n^2}$. Per determinare se la serie converge uniformemente, usiamo il criterio di Weierstrass di convergenza totale, e calcoliamo $M_n := \sup_{x\in[-1,1]}\left|\frac{\log(1+x^{2n})}{n^2}\right| = \frac{\log 2}{n^2}$. Poiché $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ converge, la serie data converge uniformemente in $[-1,1]$. $\square$

Esercizio 15. Studiare la convergenza (puntuale e) uniforme della seguente serie di funzioni $\sum_{n=1}^{\infty} n^x (\log n)^2$, $x \in (-\infty, -2]$.

Svolgimento. Osserviamo che, per ogni $x \in (-\infty, -2]$ fissato, la serie converge. Per determinare se la serie converge uniformemente, usiamo il criterio di Weierstrass di convergenza totale, e calcoliamo $M_n := \sup_{x \in (-\infty,-2]} |n^x (\log n)^2| = \frac{(\log n)^2}{n^2}$. Poiché $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ converge, la serie data converge uniformemente in $(-\infty, -2]$. □

Esercizio 16. Studiare la convergenza (puntuale e) uniforme della seguente serie di funzioni $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nx^2}}{1+n}$, $x \in [1, \infty)$.

Svolgimento. Osserviamo che la serie converge per ogni $x \in [1, \infty)$ fissato, perché $0 \leq \frac{e^{-nx^2}}{1+n} \leq \frac{e^{-n}}{1+n}$. Per determinare se la serie converge uniformemente, usiamo il criterio di Weierstrass di convergenza totale, e calcoliamo $M_n := \sup_{x \in [1,\infty)} \left| \frac{e^{-nx^2}}{1+n} \right| = \frac{e^{-n}}{1+n}$. Poiché $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ converge, la serie data converge uniformemente in $[1, \infty)$. □

Esercizio 17. Studiare la convergenza (puntuale e) uniforme della seguente serie di funzioni $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n + x^{2n}}$, $x \in (-\infty, -2]$.

Svolgimento. Osserviamo che, per ogni $x \in (-\infty, -2]$ fissato, la serie converge [perché $\frac{1}{n+x^{2n}} = \frac{1}{x^{2n}(1+o(1))}$]. Per determinare se la serie converge uniformemente, usiamo il criterio di Weierstrass di convergenza totale, e calcoliamo $M_n := \sup_{x \in (-\infty,-2]} \left| \frac{1}{n+x^{2n}} \right| = \frac{1}{n+4^n}$. Poiché $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ converge, la serie data converge uniformemente in $(-\infty, -2]$. □

Esercizio 18. Studiare la convergenza (puntuale e) uniforme della seguente serie di funzioni $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-n^x}$, $x \in [1, +\infty)$.

Svolgimento. Osserviamo che, per ogni $x \in [1, +\infty)$ fissato, la serie converge [perché $n^{-n^x} = e^{-n^x \log n} \leq e^{-n \log n}$]. Per determinare se la serie converge uniformemente, usiamo il criterio di Weierstrass di convergenza totale, e calcoliamo $M_n := \sup_{x \in [1,+\infty)} \left| n^{-n^x} \right| = e^{-n \log n}$. Poiché $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ converge, la serie data converge uniformemente in $[1, +\infty)$. □

Esercizio 19. Studiare la convergenza (puntuale e) uniforme della seguente serie di funzioni $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n(x+n)}$, $x \in [0, 5]$.

Svolgimento. Osserviamo che la serie converge per $x = 0$; inoltre la serie converge per ogni $x \in (0, 5]$ fissato, perché $\frac{x}{n(x+n)} = \frac{x}{n^2(1+o(1))}$. Per determinare se la serie converge uniformemente, usiamo il criterio di Weierstrass di convergenza totale, e calcoliamo $M_n := \sup_{x\in[0,5]}\left|\frac{x}{n(x+n)}\right| = \frac{5}{n(5+n)}$, poiché $\frac{d}{dx}\frac{x}{n(x+n)} = \frac{1}{(x+n)^2} \geq 0$, per ogni $x \geq 0$. Poiché $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ converge, la serie data converge uniformemente in $[0, 5]$. $\square$

Esercizio 20. Studiare la convergenza (puntuale e) uniforme della seguente serie di funzioni $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \log\left(1 + \frac{x}{n}\right)}{(x + n)^2}$, $x \in [0, 2]$.

Svolgimento. Osserviamo che la serie converge per $x = 0$; inoltre la serie converge per ogni $x \in (0, 2]$ fissato, perché $\frac{n \log\left(1+\frac{x}{n}\right)}{(x+n)^2} = \frac{x(1+o(1))}{n^2(1+o(1))}$. Per determinare se la serie converge uniformemente, usiamo il criterio di Weierstrass di convergenza totale, e, posto $f_n(x) := \frac{n \log\left(1+\frac{x}{n}\right)}{(x+n)^2}$, calcoliamo $M_n := \sup_{x\in[0,2]} |f_n(x)| = f_n(2)$, poiché $f_n'(x) = \frac{n-2n \log\left(1+\frac{x}{n}\right)}{(x+n)^3} \geq 0 \iff x \leq n(\sqrt{e} - 1)$. Poiché $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ converge, la serie data converge uniformemente in $[0, 2]$. $\square$

Esercizio 21. Studiare la convergenza (puntuale e) uniforme della seguente serie di funzioni $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{1 + (x - n)^2}$, $x \in [0, \infty)$.

Svolgimento. Osserviamo che la serie converge per ogni $x \in [0, \infty)$ fissato, perché $0 \leq \frac{e^{-nx}}{1+(x-n)^2} \leq \frac{1}{1+(x-n)^2} = \frac{1}{n^2(1+o(1))}$. Per determinare se la serie converge uniformemente, usiamo il criterio di Weierstrass di convergenza totale, e, posto $f_n(x) := \frac{e^{-nx}}{1+(x-n)^2}$, calcoliamo $M_n := \sup_{x\in[0,\infty)} |f_n(x)| = f_n(0) = \frac{1}{1+n^2}$, poiché $f_n'(x) = \frac{-e^{-nx}[n(x-n)^2+2(x-n)+n]}{[1+(x-n)^2]^2} < 0$, per ogni $x \geq 0$. Poiché $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ converge, la serie data converge uniformemente in $[0, \infty)$. $\square$

Esercizio 22. Studiare la convergenza (puntuale e) uniforme della seguente serie di funzioni $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{1 + n^2x^2}$, $x \in (-\infty, -1]$.

Svolgimento. Osserviamo che la serie converge per ogni $x \in (-\infty, -1]$ fissato, perché $\left|\frac{\cos(nx)}{1+n^2x^2}\right| \leq \frac{1}{1+n^2x^2} = \frac{1}{n^2x^2(1+o(1))}$. Per determinare se la serie converge uniformemente, usiamo il criterio di Weierstrass di convergenza totale, e calcoliamo $M_n := \sup_{x\in(-\infty,-1]}\left|\frac{\cos(nx)}{1+n^2x^2}\right| \leq \sup_{x\in(-\infty,-1]} \frac{1}{1+n^2x^2} = \frac{1}{1+n^2}$. Poiché $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ converge, la serie data converge uniformemente in $(-\infty, -1]$. $\square$

Esercizio 23. Studiare la convergenza (puntuale e) uniforme della seguente serie di funzioni $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \cos(nx)e^{-nx^2}$, $x \in [1, \infty)$.

Svolgimento. Osserviamo che, per ogni $x \in [1, \infty)$ fissato, la serie converge [perché $|\cos(nx)e^{-nx^2}| \leq e^{-nx^2}$]. Per determinare se la serie converge uniformemente, usiamo il criterio di Weierstrass di convergenza totale, e calcoliamo $M_n := \sup_{x\in[1,\infty)} |\cos(nx)e^{-nx^2}| \leq e^{-n}$. Poiché $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ converge, la serie data converge uniformemente in $(-\infty, -2]$. $\square$

Esercizio 24. Studiare la convergenza (puntuale e) uniforme della seguente serie di funzioni $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{x}{n}\right)}{n + x^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

Svolgimento. Osserviamo che la serie converge per $x = 0$; inoltre la serie converge per ogni $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ fissato, perché $\frac{\sin\left(\frac{x}{n}\right)}{n+x^2} = \frac{\frac{x}{n}(1+o(1))}{n(1+o(1))}$. Per determinare se la serie converge uniformemente, usiamo il

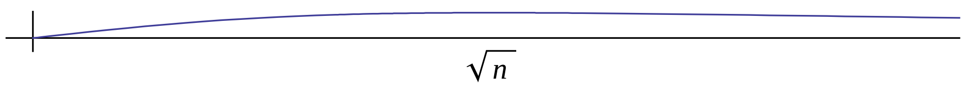

Figure 4: Grafico per l'esercizio 24

criterio di Weierstrass di convergenza totale, e calcoliamo $M_n := \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|\frac{\sin\left(\frac{x}{n}\right)}{n+x^2}\right| \leq \sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{\left|\frac{x}{n}\right|}{n+x^2}$; posto $f_n(x) := \frac{x}{n(n+x^2)}$, si ha $f_n'(x) = \frac{n-x^2}{n(n+x^2)^2} \geq 0 \iff |x| \leq \sqrt{n}$, per cui $M_n \leq f_n(\sqrt{n}) = \frac{1}{2n^{3/2}}$. Poiché $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ converge, la serie data converge uniformemente in $\mathbb{R}$. $\square$

Esercizio 25. Studiare la convergenza (puntuale e) uniforme della seguente serie di funzioni $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{n} + \sin\frac{x}{\sqrt{n}}}{1 + nx}$, $x \in [-10, -2]$.

Svolgimento. Osserviamo che, per ogni $x \in [-10, -2]$ fissato, la serie converge [perché $\frac{\frac{1}{n}+\sin\frac{x}{\sqrt{n}}}{1+nx} = \frac{1}{n^{3/2}}(1+o(1))$]. Per determinare se la serie converge uniformemente, usiamo il criterio di Weierstrass di convergenza totale, e calcoliamo $M_n := \sup_{x\in[-10,-2]} \left|\frac{\frac{1}{n}+\sin\frac{x}{\sqrt{n}}}{1+nx}\right| \leq \sup_{x\in[-10,-2]} \frac{\frac{1}{n}+\frac{|x|}{\sqrt{n}}}{2n-1} \leq \frac{\frac{1}{n}+\frac{10}{\sqrt{n}}}{2n-1}$. Poiché $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ converge, la serie data converge uniformemente in $[-10, -2]$. $\square$

2.3 Esercizi proposti

Esercizio 26. Studiare la convergenza (puntuale e) uniforme delle seguenti serie di funzioni, nell'intervallo indicato,

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n2^n}$, in $[-1,1]$,

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3x^n}{n!}$, in $[-3,3]$,

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n}(\cos x)^n$, in $[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$,

(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x^n e^{-nx^2}$, in $\mathbb{R}$,

(5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{n}\right)}{\sqrt{n}}$, in $[-2,2]$,

(6) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n\sin\left(\frac{e^{-nx^2}}{n}\right)$, in $[1,\infty)$,

(7) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(x^2+n)}{n^2}$, in $[-1,1]$,

(8) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x^{\log\log n} n^{-x}$, in $[2,\infty)$,

(9) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\sqrt{n}\sin\frac{x}{n^2}\right)$, in $[-1,1]$,

(10) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n^2}}{n}$, in $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$,

(11) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 3^{n^5} x^{n!}$, in $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$,

(12) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 3^{-n^x}$, in $[1,\infty)$,

(13) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^{-x^n/n}$, in $[2,\infty)$,

(14) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x^{\sqrt[3]{n}} n^x$, in $[0, \frac{1}{2}]$.

3 Serie di potenze

3.1 Teoria generale

Definizione 3.1. Siano $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$, $z_0, z \in \mathbb{R}$. Si dice serie di potenze di centro z_0 la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$.

Lemma 3.2. *Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ converge in $z = z_1$, allora converge assolutamente per ogni $z \in \mathbb{R}$ tale che $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$.*

Dim. Poiché $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z_1 - z_0)^n$ converge, si ha $\lim_{n\to\infty} a_n(z_1 - z_0)^n = 0$, e quindi esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $|a_n(z_1 - z_0)^n| < 1$, per ogni $n > n_0$. Allora, per ogni $z \in \mathbb{R}$ tale che $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$, si ha $|a_n(z - z_0)^n| = |a_n(z_1 - z_0)^n| \cdot \left|\frac{z-z_0}{z_1-z_0}\right|^n < \left|\frac{z-z_0}{z_1-z_0}\right|^n$, per ogni $n > n_0$. Poiché $\left|\frac{z-z_0}{z_1-z_0}\right| < 1$, per il criterio del confronto $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ converge assolutamente. □

Definizione 3.3. Posto $E := \{|z - z_0| : \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n \text{ converge in } z \in \mathbb{R}\}$, si dice raggio di convergenza della serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ il numero $r := \sup E \in [0, +\infty]$.

Proposizione 3.4. [Cauchy, Hadamard] *Siano $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ e $L := \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \in [0, +\infty]$. Allora il raggio di convergenza della serie è* $r = \begin{cases} 0, & L = +\infty, \\ \frac{1}{L}, & 0 < L < +\infty, \\ +\infty, & L = 0. \end{cases}$

Dim. Eseguiamo la dimostrazione solo nel caso particolare in cui esiste $L := \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \in [0, +\infty]$.

Applicando il criterio della radice alla serie $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|\,|z-z_0|^n$ si ha $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|\,|z - z_0|^n} = |z-z_0| \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L|z - z_0|$. Quindi, se $L = 0$, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ converge assolutamente, per ogni $z \in \mathbb{R}$, per cui $r = +\infty$. Se $L \in (0, +\infty)$, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ converge assolutamente per ogni $z \in \mathbb{R}$ tale che $|z - z_0| < \frac{1}{L}$, e non converge se $|z - z_0| > \frac{1}{L}$, per cui $r = \frac{1}{L}$. Infine, se $L = +\infty$, la serie converge solo per $z = z_0$, cioè $r = 0$. □

Proposizione 3.5. *Siano $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ e $L := \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \in [0, +\infty]$. Allora il raggio di convergenza della serie è* $r = \begin{cases} 0, & L = +\infty, \\ \frac{1}{L}, & 0 < L < +\infty, \\ +\infty, & L = 0. \end{cases}$

Dim. Applicando il criterio del rapporto alla serie $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|\,|z-z_0|^n$, si ha $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|\,|z-z_0|^{n+1}}{|a_n|\,|z-z_0|^n} = L|z - z_0|$. Quindi, se $L = 0$, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ converge assolutamente, per ogni $z \in \mathbb{R}$, per cui $r = +\infty$. Se $L \in (0, +\infty)$, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ converge assolutamente per ogni $z \in \mathbb{R}$ tale che $|z - z_0| < \frac{1}{L}$, e non converge se $|z - z_0| > \frac{1}{L}$, per cui $r = \frac{1}{L}$. Infine, se $L = +\infty$, la serie converge solo per $z = z_0$, cioè $r = 0$. □

Proposizione 3.6. *Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$, con raggio di convergenza $r > 0$, e poniamo $f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$, per ogni $z \in (z_0 - r, z_0 + r)$. Allora*

(1) *$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ converge uniformemente a f in $[z_0 - r', z_0 + r']$, per ogni $r' \in (0, r)$,*

(2) *$f \in C^0(z_0 - r, z_0 + r)$.*

Dim. (1) Sia $r' \in (0, r)$. Intanto $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ converge assolutamente per $z = z_0 + r'$. Inoltre, per ogni $z \in [z_0 - r', z_0 + r']$ si ha $|a_n(z - z_0)^n| \le |a_n|(r')^n$, e poiché $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|(r')^n < +\infty$ [per quanto appena detto], per il criterio di Weierstrass 2.5 si conclude.
(2) Segue da (1) e dalla Proposizione 2.7 che $f \in C^0[z_0 - r', z_0 + r']$, per ogni $r' \in (0, r)$. Per l'arbitrarietà di r', si conclude. □

Proposizione 3.7. *Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$, con raggio di convergenza $r > 0$, e poniamo $f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$, per ogni $z \in (z_0 - r, z_0 + r)$. Allora*

(1) *la serie derivata $\sum_{n=1}^{\infty} na_n(z - z_0)^{n-1}$ ha raggio di convergenza $r' = r$,*

(2) *per ogni $z \in (z_0 - r, z_0 + r)$, esiste $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n(z - z_0)^{n-1}$.*

Dim. (1) Poichè $\sum_{n=1}^{\infty} na_n(z - z_0)^{n-1} = \sum_{k=0}^{\infty} ka_{k+1}(z - z_0)^k$, essa è una serie di potenza con raggio di convergenza r' dato da $\frac{1}{r'} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{(n+1)|a_{n+1}|} = \limsup_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n-1}} |a_n|^{\frac{1}{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \big(n^{\frac{1}{n}}\big)^{\frac{n}{n-1}} \limsup_{n\to\infty} \big(|a_n|^{\frac{1}{n}}\big)^{\frac{n}{n-1}} = \frac{1}{r}$.
(2) Segue dalla Proposizione 2.8. □

Proposizione 3.8. *Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$, con raggio di convergenza $r > 0$, e poniamo $f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$, per ogni $z \in (z_0 - r, z_0 + r)$. Allora*

(1) *$f \in C^{\infty}(z_0 - r, z_0 + r)$,*

(2) *$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)a_n(z - z_0)^{n-k}$, per ogni $z \in (z_0 - r, z_0 + r)$,*

(3) *$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$, per ogni $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.*

Dim. (1) Per la Proposizione 3.7 f è derivabile e quindi continua in $(z_0 - r, z_0 + r)$, e f' è una serie di potenze con lo stesso raggio di convergenza di f, per cui anche f' è continua. Procedendo per induzione, si dimostra che tutte le derivate di f sono continue, e quindi $f \in C^{\infty}(z_0 - r, z_0 + r)$.
(2) Segue dalla Proposizione 3.7, procedendo per induzione.
(3) Da (2) si ha $f^{(k)}(z_0) = k(k-1)\cdots 1 \cdot a_k = a_k \cdot k!$, da cui la tesi. □

Proposizione 3.9. *Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$, con raggio di convergenza $r > 0$, e poniamo $f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$, per ogni $z \in (z_0 - r, z_0 + r)$. Allora*

(1) *$f \in \mathcal{R}[a, b]$, per ogni $[a, b] \subset (z_0 - r, z_0 + r)$,*

(2) *per ogni $z \in (z_0 - r, z_0 + r)$ si ha $\int_{z_0}^{z} f(t)\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(z - z_0)^{n+1}$, e la serie ha raggio di convergenza r.*

Dim. (1) Poiché $f \in C^0[a, b]$, per ogni $[a, b] \subset (z_0 - r, z_0 + r)$, la tesi segue.
(2) Intanto la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(z - z_0)^{n+1}$ ha raggio di convergenza $r' = r$, in quanto, usando la Proposizione 3.4 si ha $\frac{1}{r'} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{|a_{n-1}|}{n}} = \limsup_{n\to\infty} \big(|a_n|^{\frac{1}{n}}\big)^{\frac{n}{n+1}} \lim_{n\to\infty} \big(n^{\frac{1}{n}}\big)^{-1} = \frac{1}{r}$. Posto, allora, $g(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(z - z_0)^{n+1}$, per ogni $z \in (z_0 - r, z_0 + r)$, per la Proposizione 3.8 si ha $g \in C^{\infty}(z_0 - r, z_0 + r)$, e $g'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n = f(z)$, per ogni $z \in (z_0 - r, z_0 + r)$. Essendo, inoltre, $g(z_0) = 0$, la tesi segue dal teorema fondamentale del calcolo integrale. □

Proposizione 3.10. [Abel] *Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$, con raggio di convergenza $r > 0$, e poniamo $f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$, per ogni $z \in (z_0 - r, z_0 + r)$.*

(1) *Se* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ *converge per* $z=z_0+r$*, con somma* S*, allora* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ *converge uniformemente in* $[z_0, z_0+r]$*, e* $lim_{z\to(z_0+r)^-} f(z) = S$.

(2) *Se* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ *converge per* $z=z_0-r$*, con somma* S*, allora* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ *converge uniformemente in* $[z_0-r, z_0]$*, e* $lim_{z\to(z_0-r)^+} f(z) = S$.

3.2 Serie di Taylor e funzioni analitiche

Definizione 3.11. Sia $A \subset \mathbb{R}$ un aperto. Si dice che $f : A \to \mathbb{R}$ è analitica in $x_0 \in A$, se f è sviluppabile in serie di Taylor nell'intorno di x_0, cioè se esiste $r > 0$ tale che $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n = f(x)$, per ogni $x \in (x_0-r, x_0+r)$.

Si dice che f è analitica in A, e si indica $f \in C^\omega(A)$, se f è analitica in ogni $x_0 \in A$.

Osservazione 3.12. Non tutte le funzioni C^∞ sono analitiche. Ad esempio, sia $f(x) := \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$
Allora $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ e $f^{(n)}(0) = 0$, per ogni $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, ma $f \notin C^\omega(\mathbb{R})$.

Dimostriamo, intanto che, per ogni $x \neq 0$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, si ha $f^{(n)}(x) = P_n(\frac{1}{x})e^{-1/x^2}$, dove P_n è un polinomio di grado $3n$. Infatti, per $n = 0$ è ovvio, con $P_0 \equiv 1$. Supponiamo la tesi vera per un certo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, e dimostriamola vera per $n+1$. infatti, $f^{(n+1)}(x) = -\frac{1}{x^2}P_n'(\frac{1}{x})e^{-1/x^2} + \frac{2}{x^3}P_n(\frac{1}{x})e^{-1/x^2} = \big(\frac{2}{x^3}P_n(\frac{1}{x}) - \frac{1}{x^2}P_n'(\frac{1}{x})\big)e^{-1/x^2}$, e se poniamo $P_{n+1}(t) := 2t^3P_n(t) - t^2P_n'(t)$, che è di grado $3n+3 = 3(n+1)$, si ha la tesi.

Dimostriamo ora che $f^{(n)}(0) = 0$, per ogni $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Intanto è vero per $n = 0$, per definizione. Supponiamo la tesi vera per un certo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, e dimostriamola vera per $n+1$. Infatti, $f^{(n+1)}(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f^{(n)}(h)-f^{(n)}(0)}{h} = \lim_{h\to 0^\pm} \frac{P_n(\frac{1}{h})e^{-1/h^2}}{h} = \lim_{t\to\pm\infty} tP_n(t)e^{-t^2} = 0$, e la tesi segue per induzione.

Infine, $f \notin C^\omega(\mathbb{R})$, perché la sua serie di Taylor in $x_0 = 0$ è la serie nulla, e quindi la sua somma non è $f(x)$, se $x \neq 0$.

Proposizione 3.13 (Caratterizzazione delle funzioni analitiche)**.** *Siano* $I \subset \mathbb{R}$ *un intervallo aperto,* $f \in C^\infty(I)$*. Sono equivalenti*

(1) $f \in C^\omega(I)$*,*

(2) *per ogni intervallo chiuso e limitato* $J \subset I$*, esistono* $A, B > 0$ *tali che, per ogni* $x \in J$*,* $n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$*, si ha* $|f^{(n)}(x)| \leq AB^n n!$.

Vediamo delle condizioni sufficienti per l'analiticità.

Proposizione 3.14. *Siano* $x_0 \in \mathbb{R}$*,* $r > 0$*,* $f \in C^\infty(x_0-r, x_0+r)$*,* $M > 0$ *tale che* $\sup_{|x-x_0|<r} |f^{(n)}(x)| \leq \frac{Mn!}{r^n}$*, per ogni* $n >> 0$*. Allora* $f \in C^\omega(x_0-r, x_0+r)$.

Dim. Sia $x \in (x_0-r, x_0+r)$, per cui $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(c_n)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$, dove $c_n \in \overline{x_0\,x} \subset (x_0-r, x_0+r)$. Ma allora $\big|\frac{f^{(n+1)}(c_n)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\big| \leq \frac{M(n+1)!}{r^{n+1}}\frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!} = M\big(\frac{|x-x_0|}{r}\big)^{n+1} \to 0$, $n \to \infty$, e quindi $f(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$, cioè f è analitica in $x \in (x_0-r, x_0+r)$. Per l'arbitrarietà di $x \in (x_0-r, x_0+r)$, si ha la tesi. $\square$

Proposizione 3.15. *Siano* $x_0 \in \mathbb{R}$*,* $r > 0$*,* $f \in C^\infty(x_0-r, x_0+r)$*,* $M > 0$ *tale che* $\sup_{|x-x_0|<r} |f^{(n)}(x)| \leq M^n$*, per ogni* $n >> 0$*. Allora* $f \in C^\omega(x_0-r, x_0+r)$.

Dim. Poiché $\lim_{n\to\infty} \frac{M^n r^n}{n!} = 0$, esiste $K > 0$ tale che $M^n \le \frac{Kn!}{r^n}$, per ogni $n >> 0$. La tesi segue dalla Proposizione 3.14. $\square$

Esempi 3.16.

(1) $e^x = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$, per ogni $x \in \mathbb{R}$.

(2) $\sin x = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}$, per ogni $x \in \mathbb{R}$.

(3) $\cos x = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$, per ogni $x \in \mathbb{R}$.

(4) $\sinh x = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$, per ogni $x \in \mathbb{R}$.

(5) $\cosh x = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$, per ogni $x \in \mathbb{R}$.

(6) $\log(1+x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} x^k}{k}$, per ogni $x \in (-1, 1]$.

(7) $\operatorname{arctg} x = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}$, per ogni $x \in [-1, 1]$.

(8) $\operatorname{sett\,tgh} x = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$, per ogni $x \in (-1, 1)$.

(9) $(1+x)^\alpha = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$, per ogni $x \in (-1, 1)$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Se $\alpha > 0$, la serie converge uniformemente in $[-1, 1]$.

(10) $\arcsin x = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$, per ogni $x \in (-1, 1)$.

Dim. (1) Infatti, per ogni $r > 0$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, si ha $\sup_{|x|<r} |f^{(n)}(x)| = \sup_{|x|<r} e^x = e^r =: M$, e la tesi segue dalla Proposizione 3.15.

(2) Infatti, per ogni $r > 0$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, si ha $\sup_{|x|<r} |f^{(n)}(x)| = \begin{cases} \sup_{|x|<r} |\sin x|, & n \text{ pari}, \\ \sup_{|x|<r} |\cos x|, & n \text{ dispari}, \end{cases} \le 1$, e la tesi segue dalla Proposizione 3.15.

(3) Infatti, per ogni $r > 0$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, si ha $\sup_{|x|<r} |f^{(n)}(x)| = \begin{cases} \sup_{|x|<r} |\cos x|, & n \text{ pari}, \\ \sup_{|x|<r} |\sin x|, & n \text{ dispari}, \end{cases} \le 1$, e la tesi segue dalla Proposizione 3.15.

(4) Infatti, per ogni $r > 0$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, si ha $\sup_{|x|<r} |f^{(n)}(x)| = \begin{cases} \sup_{|x|<r} |\sinh x|, & n \text{ pari}, \\ \sup_{|x|<r} |\cosh x|, & n \text{ dispari}, \end{cases} \le \cosh r$, e la tesi segue dalla Proposizione 3.15.

(5) Infatti, per ogni $r>0$, $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, si ha $\sup_{|x|<r}|f^{(n)}(x)| = \begin{cases}\sup_{|x|<r}|\cosh x|, & n \text{ pari},\\ \sup_{|x|<r}|\sinh x|, & n \text{ dispari},\end{cases} \leq \cosh r$, e la tesi segue dalla Proposizione 3.15.
(6) Infatti, per ogni $x\in(-1,1)$ si ha

$$\log(1+x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t} = \int_0^x \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k t^k\,dt \overset{(a)}{=} \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \int_0^x t^k\,dt = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1},$$

dove in (a) si è usata la Proposizione 2.9.

Infine, se $x=1$, la serie diventa $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}$, che converge per il criterio di Leibniz. La tesi segue allora dalla Proposizione 3.10 (1).
(7) Infatti, per ogni $x\in(-1,1)$ si ha

$$\operatorname{arctg} x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^x \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k t^{2k}\,dt \overset{(a)}{=} \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \int_0^x t^{2k}\,dt = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1},$$

dove in (a) si è usata la Proposizione 2.9.

Infine, se $x=\pm1$, la serie diventa $\pm\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}$, che converge per il criterio di Leibniz. La tesi segue allora dalla Proposizione 3.10 (1).
(8) Infatti, per ogni $x\in(-1,1)$ si ha

$$\operatorname{sett\,tgh} x = \int_0^x \frac{dt}{1-t^2} = \int_0^x \sum_{k=0}^{\infty} t^{2k}\,dt \overset{(a)}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^x t^{2k}\,dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{2k+1},$$

dove in (a) si è usata la Proposizione 2.9.
(9) (Primo metodo) Dalla formula di Taylor con resto integrale, per ogni $x\in(-1,1)$, $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, si ha $(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{n}\binom{\alpha}{k}x^k + \frac{1}{n!}\int_0^x (x-t)^n\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)(1+t)^{\alpha-n-1}\,dt$. Posto $s=\frac{x-t}{x(1+t)} \iff x-t = sx(1+t) \iff x(1-s)=t(1+sx) \iff t=\frac{x(1-s)}{1+sx}$, si ha $1+t=\frac{1+x}{1+sx}$, e $dt=-\frac{x(1+x)}{(1+sx)^2}\,ds$, e quindi

$$\begin{aligned}
R_n(x) &:= \frac{1}{n!}\int_0^x (x-t)^n\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)(1+t)^{\alpha-n-1}\,dt\\
&= \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{n!}\int_1^0 (sx)^n\Big(\frac{1+x}{1+sx}\Big)^n\Big(\frac{1+x}{1+sx}\Big)^{\alpha-n-1}\frac{-x(1+x)}{(1+sx)^2}\,ds\\
&= \binom{\alpha}{n+1}(n+1)x^{n+1}(1+x)^\alpha\int_0^1 \frac{s^n}{(1+sx)^{\alpha+1}}\,ds.
\end{aligned}$$

Allora

$$\begin{aligned}
|R_n(x)| &\leq \Big|\binom{\alpha}{n+1}\Big||x|^{n+1}(1+x)^\alpha \max_{s\in[0,1]}\frac{1}{|1+sx|^{\alpha+1}}\int_0^1 (n+1)s^n\,ds\\
&\leq \Big|\binom{\alpha}{n+1}\Big||x|^{n+1}(1+x)^\alpha \max_{s\in[0,1]}\frac{1}{|1+sx|^{\alpha+1}}.
\end{aligned}$$

Osserviamo che $\min_{s\in[0,1]}|1+sx| = \begin{cases}1, & x\geq0,\\ 1+x, & x<0,\end{cases}$ per cui, posto, per ogni $x\in(-1,1)$, $g_\alpha(x) := (1+x)^\alpha\max_{s\in[0,1]}\frac{1}{|1+sx|^{\alpha+1}}$, si ha $0\leq g_\alpha(x)\leq \begin{cases}(1+x)^\alpha, & x\geq0,\\ \frac{1}{1+x}, & x<0,\end{cases}$ e quindi, per ogni $r\in(0,1)$,

si ha $k_\alpha(r) := \sup_{|x|<r} g_\alpha(x) \le \max\Big\{(1+r)^\alpha, (1-r)^\alpha, \frac{1}{1-r}\Big\}$. Allora, per ogni $r \in (0,1)$, si ha $\sup_{|x|<r} |R_n(x)| \le \big|\binom{\alpha}{n+1}\big| r^{n+1} k_\alpha(r)$. Osserviamo che $\frac{\left|\binom{\alpha}{n+1}\right| r^{n+1}}{\left|\binom{\alpha}{n}\right| r^n} = r\frac{|\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)|}{(n+1)!} \frac{n!}{|\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)|} = r\frac{|\alpha-n|}{n+1} \to r < 1$, $n \to \infty$, per cui $\big|\binom{\alpha}{n+1}\big| r^{n+1} k_\alpha(r) \to 0$, $n \to \infty$, da cui la tesi segue.
(9) (Secondo metodo) La serie $\sum_{k=0}^\infty \binom{\alpha}{k} x^k$ ha raggio di convergenza 1, e quindi definisce $f_\alpha(x) := \sum_{k=0}^\infty \binom{\alpha}{k} x^k$, per ogni $x \in (-1,1)$. Allora $f \in C^\infty(-1,1)$, ed inoltre, per ogni $x \in (-1,1)$, si ha

$$\begin{aligned}(1+x)f'_\alpha(x) &= \sum_{k=1}^\infty \binom{\alpha}{k} kx^{k-1} + \sum_{k=1}^\infty \binom{\alpha}{k} kx^k = \sum_{k=0}^\infty \binom{\alpha}{k+1}(k+1)x^k + \sum_{k=0}^\infty \binom{\alpha}{k} kx^k \\ &= \sum_{k=0}^\infty \Big((k+1)\binom{\alpha}{k+1} + k\binom{\alpha}{k}\Big)x^k,\end{aligned}$$

e poiché $(k+1)\binom{\alpha}{k+1} + k\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k)}{k!} + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{(k-1)!} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}(\alpha-k+k) = \alpha\binom{\alpha}{k}$, si ha $(1+x)f'_\alpha(x) = \alpha\sum_{k=0}^\infty \binom{\alpha}{k} x^k = \alpha f_\alpha(x)$. Posto $g_\alpha(x) := (1+x)^{-\alpha} f_\alpha(x)$, $x \in (-1,1)$, si ha allora $g'_\alpha(x) = -\alpha(1+x)^{-\alpha-1} f_\alpha(x) + (1+x)^{-\alpha} f'_\alpha(x) = (1+x)^{-\alpha-1}\big(-\alpha f_\alpha(x) + (1+x)f'_\alpha(x)\big) = 0$, e quindi g_α è costante, ed essendo $g_\alpha(0) = f_\alpha(0) = 1$, si ha $g_\alpha \equiv 1$, per cui $f_\alpha(x) = (1+x)^\alpha$, per ogni $x \in (-1,1)$.
(9) ($\alpha > 0$) Dimostriamo che, se $\alpha > 0$, allora $\sum_{k=0}^\infty \big|\binom{\alpha}{k}\big| < \infty$, da cui segue $\sum_{k=0}^\infty \sup_{|x|\le 1} \big|\binom{\alpha}{k} x^k\big| \le \sum_{k=0}^\infty \big|\binom{\alpha}{k}\big| < \infty$, e quindi la convergenza uniforme della serie binomiale in $[-1,1]$. Poniamo $a_k := \big|\binom{\alpha}{k}\big|$. Allora $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{|\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)|}{(n+1)!} \frac{n!}{|\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)|} = \frac{|\alpha-n|}{n+1} = \frac{n-\alpha}{n+1}$, se $n \ge [\alpha]+1$. Quindi, se $n \ge [\alpha]+1$, si ha $(n+1)a_{n+1} = (n-\alpha)a_n \iff na_n - (n+1)a_{n+1} = \alpha a_n \ge 0$, cioè na_n è decrescente, e quindi esiste $L := \lim_{n\to\infty} na_n \ge 0$. Consideriamo ora la serie $\sum_{n=0}^\infty \big(na_n - (n+1)a_{n+1}\big) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^n \big(ka_k - (k+1)a_{k+1}\big) = \lim_{n\to\infty} -(n+1)a_{n+1} = -L$, che quindi è convergente. Poiché $a_n = \frac{1}{\alpha}\big(na_n - (n+1)a_{n+1}\big)$, definitivamente, anche la serie $\sum_{n=0}^\infty a_n$ è convergente.
(10) Infatti, per ogni $x \in (-1,1)$, si ha $\frac{d}{dx}\arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{k=0}^\infty \binom{-1/2}{k}(-x^2)^k$, e poiché $\binom{-1/2}{k} = \frac{-\frac12(-\frac12-1)\cdots(-\frac12-k+1)}{k!} = (-1)^k\frac{1}{2^k}\frac{1(1+2)\ldots(1+2k-2)}{k!} = (-1)^k\frac{(2k-1)!!}{2^k\cdot k!} = (-1)^k\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}$, si ha $\frac{d}{dx}\arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{k=0}^\infty (-1)^k\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}(-x^2)^k = \sum_{k=0}^\infty \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}x^{2k}$. Quindi

$$\arcsin x = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int_0^x \sum_{k=0}^\infty \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}t^{2k}\,dt \overset{(a)}{=} \sum_{k=0}^\infty \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\int_0^x t^{2k}\,dt = \sum_{k=0}^\infty \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\frac{x^{2k+1}}{2k+1},$$

dove in (a) si è usata la Proposizione 2.9. □

3.3 Esercizi svolti

Esercizio 27. Studiare la convergenza puntuale e uniforme della serie di funzioni $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{n^3}{n!}x^n$.

Svolgimento. Il raggio di convergenza è $\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{n!}\frac{(n+1)!}{(n+1)^3} = \lim_{n\to\infty} n(1+o(1)) = +\infty$. Quindi la serie converge puntualmente e assolutamente per ogni $x \in \mathbb{R}$. Converge uniformemente in ogni insieme chiuso e limitato di $\mathbb{R}$. □

Esercizio 28. Studiare la convergenza puntuale e uniforme della serie di funzioni $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}\, x^n$.

Svolgimento. Il raggio di convergenza è $\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} \frac{(2n+2)!}{((n+1)!)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} = 4$. Quindi la serie converge puntualmente e assolutamente per ogni $x \in (-4, 4)$. Per $x = -4$ la serie diventa $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{(n!)^2}{(2n)!}\, 4^n$, che non converge perché [usando Stirling] $\frac{(n!)^2}{(2n)!}\, 4^n = \frac{n^{2n}e^{-2n}2\pi n(1+o(1))}{(2n)^{2n}e^{-2n}\sqrt{2\pi n}\,(1+o(1))}\, 4^n = \sqrt{\pi n}\,(1 + o(1)) \not\to 0$. Per $x = 4$ la serie diventa $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}\, 4^n$, che non converge. La serie converge uniformemente in ogni insieme chiuso e limitato della forma $[-4 + \delta, 4 - \delta]$, con $\delta > 0$. □

Esercizio 29. Studiare la convergenza puntuale e uniforme della serie di funzioni $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}\, (x-1)^n$.

Svolgimento. Il raggio di convergenza è $\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n2^n}\, (n + 1)2^{n+1} = \lim_{n\to\infty} 2(1 + o(1)) = 2$. Quindi la serie converge puntualmente e assolutamente per ogni $|x - 1| < 2 \iff x \in (-1, 3)$. Per $x = -1$ la serie diventa $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$, che converge (ma non assolutamente) per Leibniz. Per $x = 3$ la serie diventa $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, che non converge. Usando il teorema di Abel, la serie converge uniformemente in ogni insieme chiuso e limitato della forma $[-1, 3 - \delta]$, con $\delta > 0$. □

Esercizio 30. Studiare la convergenza puntuale e uniforme della serie di funzioni $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^2}\, (x+1)^n$.

Svolgimento. Il raggio di convergenza è $\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n(\log n)^2}\, (n + 1)\big(\log(n + 1)\big)^2 = 1$. Quindi la serie converge puntualmente e assolutamente per ogni $|x + 1| < 1 \iff x \in (-2, 0)$. Per $x = -2$ la serie diventa $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(\log n)^2}$, che converge assolutamente. Per $x = 0$ la serie diventa $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^2}$, che converge. Usando il teorema di Abel, la serie converge uniformemente in $[-2, 0]$. □

Esercizio 31. Studiare la convergenza puntuale e uniforme della serie di funzioni $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n^2}}{n!}\, x^n$.

Svolgimento. Il raggio di convergenza è $\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n^2}}{n!} \frac{(n+1)!}{2^{(n+1)^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2^{2n+1}} = 0$. Quindi la serie converge solo per $x = 0$. □

Esercizio 32. Studiare la convergenza puntuale e uniforme della serie di funzioni $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n(2x-1)^n$.

Svolgimento. La serie si riscrive $\sum_{n=1}^{\infty} n2^n(x-\frac{1}{2})^n$, il cui raggio di convergenza è $\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{n2^n}{(n+1)2^{n+1}} = \frac{1}{2}$. Quindi la serie converge puntualmente e assolutamente per ogni $|x-\frac{1}{2}| < \frac{1}{2} \iff x \in (0,1)$. Per $x = 0$ la serie diventa $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n$, che non converge. Per $x = 1$ la serie diventa $\sum_{n=1}^{\infty} n$, che non converge. La serie converge uniformemente in ogni insieme chiuso e limitato della forma $[\delta, 1-\delta]$, con $\delta > 0$. □

Esercizio 33. Studiare la convergenza puntuale e uniforme della serie di funzioni $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n^2}}{(n!)^2}$.

Svolgimento. È una serie di potenze con tanti coefficienti nulli [solo i coefficienti a_{n^2} sono non nulli]. Per determinare l'insieme di convergenza assoluta usiamo il criterio del rapporto. Si ha $\lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{(n+1)^2}}{((n+1)!)^2} \frac{(n!)^2}{|x|^{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{2n+1}}{(n+1)^2} = \begin{cases} 0, & |x| \le 1, \\ +\infty, & |x| > 1. \end{cases}$ Quindi la serie converge puntualmente e assolutamente per ogni $x \in [-1,1]$, e uniformemente in $[-1,1]$. □

Esercizio 34. Studiare la convergenza puntuale e uniforme della serie di funzioni $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^n x^{n^3}$.

Svolgimento. È una serie di potenze con tanti coefficienti nulli [solo i coefficienti a_{n^3} sono non nulli]. Per determinare l'insieme di convergenza assoluta usiamo il criterio del rapporto. Si ha $\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1}|x|^{(n+1)^3}}{n^n|x|^{n^3}} = \lim_{n\to\infty} e(1+o(1))|x|^{3n^2+3n+1} = \begin{cases} 0, & |x| < 1, \\ +\infty, & |x| \ge 1. \end{cases}$ Quindi la serie converge puntualmente e assolutamente per ogni $x \in (-1,1)$, e uniformemente in ogni insieme chiuso e limitato della forma $[-1+\delta, 1-\delta]$, con $\delta > 0$. □

Esercizio 35. Studiare la convergenza puntuale e uniforme della serie di funzioni $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 3^n x^{2n}$.

Svolgimento. È una serie di potenze nella variabile $y = \varphi(x) = x^2$. Il raggio di convergenza della serie $\sum_{n=1}^{\infty} 3^n y^n$ è $\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{3^n}{3^{n+1}} = \frac{1}{3}$. Quindi la serie converge puntualmente e assolutamente per ogni $y \in (-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$. Per $y = \frac{1}{3}$ la serie diventa $\sum_{n=1}^{\infty} 1$, che non converge. Allora la serie data converge puntualmente e assolutamente per ogni $x \in (-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$, e uniformemente in ogni insieme chiuso e limitato della forma $[-\frac{1}{\sqrt{3}}+\delta, \frac{1}{\sqrt{3}}-\delta]$, con $\delta > 0$. □

Esercizio 36. Studiare la convergenza puntuale e uniforme della serie di funzioni $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n} (\operatorname{arctg} x)^n$.

Svolgimento. È una serie di potenze nella variabile $y = \varphi(x) = \operatorname{arctg} x$. Il raggio di convergenza della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n} y^n$ è $\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{n} \frac{n+1}{\log(n+1)} = 1$. Quindi la serie converge puntualmente e assolutamente per ogni $y \in (-1, 1)$. Per $y = -1$ la serie diventa $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\log n}{n}$, che converge (ma non assolutamente) per Leibniz [in quanto $\frac{\log n}{n}$ è decrescente per $n \geq 3$]. Per $y = 1$ la serie diventa $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n}$, che non converge. Allora la serie data converge puntualmente per ogni $\operatorname{arctg} x \in [-1, 1) \iff x \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$, e uniformemente in ogni insieme chiuso e limitato della forma $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} - \delta]$, con $\delta > 0$. $\square$

Esercizio 37. Studiare la convergenza puntuale e uniforme della serie di funzioni $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^5 e^{nx}$.

Svolgimento. È una serie di potenze nella variabile $y = \varphi(x) = e^x$. Il raggio di convergenza della serie $\sum_{n=1}^{\infty} n^5 y^n$ è $\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{n^5}{(n+1)^5} = 1$. Quindi la serie converge puntualmente e assolutamente per ogni $y \in (-1, 1)$. Per $y = 1$ la serie diventa $\sum_{n=1}^{\infty} n^5$, che non converge. Allora la serie data converge puntualmente per ogni $e^x \in (-1, 1) \iff x \in (-\infty, 0)$, e uniformemente in ogni insieme della forma $(-\infty, -\delta]$, con $\delta > 0$, perché $\varphi((-\infty, -\delta]) = (0, e^{-\delta}]$, dove la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n^5 y^n$ converge uniformemente. $\square$

Esercizio 38. Studiare la convergenza puntuale e uniforme della serie di funzioni $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x^n e^{-nx^2}$.

Svolgimento. È una serie di potenze nella variabile $y = \varphi(x) = xe^{-x^2}$. Il raggio di convergenza della serie $\sum_{n=1}^{\infty} y^n$ è $\rho = 1$. Quindi la serie converge puntualmente e assolutamente per ogni $y \in (-1, 1)$. Per $y = \pm 1$ la serie non converge. Allora la serie data converge puntualmente per ogni $xe^{-x^2} \in (-1, 1) \iff x \in \mathbb{R}$, e uniformemente in $\mathbb{R}$, perché $\varphi(\mathbb{R}) = [-\frac{1}{\sqrt{2e}}, \frac{1}{\sqrt{2e}}]$, dove la serie $\sum_{n=1}^{\infty} y^n$ converge uniformemente. $\square$

Esercizio 39. Studiare la convergenza puntuale e uniforme della serie di funzioni $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 + n}{e^{2n} + 2^n} x^{2n} (\log |x|)^n$.

Svolgimento. È una serie di potenze nella variabile $y = \varphi(x) = x^2 \log |x|$. Il raggio di convergenza della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+n}{e^{2n}+2^n} y^n$ è $\rho = e^2$. Quindi la serie converge puntualmente e assolutamente per ogni $y \in (-e^2, e^2)$. Per $y = \pm e^2$ la serie non converge in quanto $\frac{n^3+n}{e^{2n}+2^n} e^n = n^3(1 + o(1)) \not\to 0$. Allora la serie data converge puntualmente per ogni $x^2 \log |x| \in (-e^2, e^2) \iff x \in (-e, e)$, e uniformemente in ogni insieme della forma $[-e + \delta, e - \delta]$, con $\delta > 0$. $\square$

3.4 Esercizi proposti

Esercizio 40. Trovare il generico intervallo di convergenza uniforme per le seguenti serie.

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n-1}}{n(2n-1)}$,

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n \log n}{1+\sqrt{n}}$,

(3) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(x-\frac{1}{2})^n}{\log n}$,

(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n (n+1) x^n$,

(5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(3-x)^n}{3^n\sqrt{n^2-1}}$,

(6) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2(x+1)^n}{\sqrt{n^2-1}+3^n}$,

(7) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(\frac{2}{3}\right)^n \left(x-\frac{3}{2}\right)^n$,

(8) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} ne^{-nx}$,

(9) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} ne^{-nx^2}$,

(10) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{n+1}}{e^{nx}}$,

(11) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{e^{-n|x^2-x|}}{n(\log n)^2}$,

(12) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 x^n}$,

(13) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}\sqrt{n^2-1}}{(x+1)^n}$,

(14) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n(\sin x)^n}{n}$,

(15) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (n^2+2)\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^n$,

(16) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(4-3^x)^n\ \mathrm{tg}\left(\frac{\sqrt{n}+2}{n+n^2}\right)$,

(17) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}|x|^{nx}$,

4 Serie di Fourier

4.1 Teoria

Definizione 4.1 (Serie di Fourier con coefficienti reali)**.** Siano $T>0$, $\omega := \frac{2\pi}{T}$, $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, T-periodica, $f\in\mathcal{R}^*[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}]$. Si dicono coefficienti di Fourier di f i numeri

$$a_n := \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\cos\big(n\omega x\big)\,dx, \qquad n\in\mathbb{N}\cup\{0\},$$
$$b_n := \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\sin\big(n\omega x\big)\,dx, \qquad n\in\mathbb{N}.$$

Ad f si associa la serie di Fourier $\displaystyle\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n\cos\big(n\omega x\big)+b_n\sin\big(n\omega x\big)\Big)$.

Definizione 4.2 (Serie di Fourier con coefficienti complessi)**.** Siano $T>0$, $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, T-periodica, $f\in\mathcal{R}^*[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}]$. Si dicono coefficienti di Fourier (complessi) di f i numeri

$$c_n \equiv \hat{f}(n) := \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)e^{-in\omega x}\,dx, \qquad n\in\mathbb{Z}.$$

Ad f si associa la serie di Fourier $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega x}$.

Proposizione 4.3. *Siano $T>0$, $\omega := \frac{2\pi}{T}$, $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, T-periodica, $f\in\mathcal{R}^*[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}]$. Allora, per ogni $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, si ha*

(1) $c_{-n}=\overline{c_n}$,

(2) $c_n=\frac{1}{2}(a_n-ib_n)$, *dove* $b_0:=0$,

(3) $a_n=2\mathrm{Re}\,c_n=c_n+c_{-n}$, $b_n=2\mathrm{Im}\,c_n=i(c-n-c_{-n})$.

Dim. (1) Si ha $c_{-n}=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(x)e^{in\omega x}\,dx=\overline{c_n}$.
(2) Si ha $c_n=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(x)e^{-in\omega x}\,dx=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(x)\big[\cos\big(n\omega x\big)-i\sin\big(n\omega x\big)\big]\,dx=\frac{1}{2}(a_n-ib_n)$.
(3) Segue da (1) e (2). □

Proposizione 4.4. *Siano $T>0$, $\omega := \frac{2\pi}{T}$, $h,k\in\mathbb{Z}$. Allora $\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}e^{ik\omega x}e^{-ih\omega x}\,dx=\delta_{hk}$.*

Dim. Infatti, se $h = k$ il risultato è evidente. Sia, allora $h \neq k$, per cui $\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} e^{ik\omega x}e^{-ih\omega x}\,dx = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} e^{i(k-h)\omega x}\,dx = \frac{1}{T}\big[\frac{1}{(k-h)\omega}e^{i(k-h)\omega x}\big]_{-T/2}^{T/2} = \frac{1}{2\pi(k-h)}(e^{i(k-h)\pi} - e^{-i(k-h)\pi}) = \frac{2i}{2\pi(k-h)}\sin\big((k-h)\pi\big) = 0$. □

Proposizione 4.5. *Siano $T > 0$, $\omega := \frac{2\pi}{T}$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, T-periodica, $f \in \mathcal{R}^*[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$. Allora*

(1) *f pari $\implies b_n = 0$, per ogni $n \in \mathbb{N}$,*

(2) *f dispari $\implies a_n = 0$, per ogni $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.*

Dim. Seguono dal fatto che $\cos(n\omega x)$ è pari in $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ e $\sin(n\omega x)$ è dispari in $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$. □

Proposizione 4.6. *Siano $T > 0$, $\omega := \frac{2\pi}{T}$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, T-periodica, $f \in \mathcal{R}^*[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$. Allora, per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, si ha*

$$\begin{aligned}
\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\cos\big(n\omega x\big)\,dx &= \frac{2}{T}\int_{\alpha-T/2}^{\alpha+T/2} f(x)\cos\big(n\omega x\big)\,dx,\\
\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\sin\big(n\omega x\big)\,dx &= \frac{2}{T}\int_{\alpha-T/2}^{\alpha+T/2} f(x)\sin\big(n\omega x\big)\,dx,\\
\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)e^{-in\omega x}\,dx &= \frac{1}{T}\int_{\alpha-T/2}^{\alpha+T/2} f(x)e^{-in\omega x}\,dx.
\end{aligned}$$

Dim. Seguono dalla T-periodicità delle funzioni integrande. □

Definizione 4.7 (Polinomio trigonometrico)**.** Siano $T > 0$, $\omega := \frac{2\pi}{T}$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\alpha_k, \beta_k \in \mathbb{R}$, $k = 0, \dots, n$. Si dice polinomio trigonometrico di periodo T e grado n la funzione

$$\sigma(x) := \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}\Big(\alpha_k\cos\big(k\omega x\big) + \beta_k\sin\big(k\omega x\big)\Big).$$

Indichiamo con $\mathcal{P}_{T,n}$ l'insieme di tali polinomi trigonometrici.

Osservazione 4.8. Osserviamo che, posto $\gamma_k := \frac{1}{2}(\alpha_k - i\beta_k)$, $\gamma_{-k} := \overline{\gamma_k}$, si ha $\sigma_k = \sum_{k=-n}^{n}\gamma_n e^{in\omega x}$. Infatti,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=-n}^{n}\gamma_k e^{ik\omega x} &= \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2}(\alpha_k - i\beta_k)\Big(\cos\big(k\omega x\big) + i\sin\big(k\omega x\big)\Big)\\
&\quad + \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2}(\alpha_k + i\beta_k)\Big(\cos\big(k\omega x\big) - i\sin\big(k\omega x\big)\Big)\\
&= \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}\Big(\alpha_k\cos\big(k\omega x\big) + \beta_k\sin\big(k\omega x\big)\Big).
\end{aligned}$$

Proposizione 4.9. *Siano $T > 0$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, T-periodica, $f \in \mathcal{R}^*[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$, e siano $\{a_n, b_n : n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$, $\{c_n : n \in \mathbb{Z}\}$ i suoi coefficienti di Fourier. Poniamo, per ogni $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$,*

$$s_n(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}\Big(a_k\cos\big(k\omega x\big) + b_k\sin\big(k\omega x\big)\Big) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ik\omega x}.$$

Allora, per ogni $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$,

(1) *s_n minimizza lo scarto quadratico medio da f tra tutti i polinomi trigonometrici di periodo T e di grado n, cioè per ogni $\sigma \in \mathcal{P}_{T,n}$*

$$\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} |f(x)-s_n(x)|^2\,dx \le \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} |f(x)-\sigma(x)|^2\,dx,$$

(2) $$\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} |f(x)-s_n(x)|^2\,dx = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} |f(x)|^2\,dx - \sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2$$
$$= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} |f(x)|^2\,dx - \frac{a_0^2}{4} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2),$$

(3) $$\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} |f(x)|^2\,dx \ge \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2) \qquad [\,\textit{Disuguaglianza di Bessel}].$$

Dim. (1) Sia $\sigma(x) := \sum_{k=-n}^{n} \gamma_k e^{ik\omega x}$ un polinomio trigonometrico, e calcoliamo

$$\begin{aligned}
\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} |f(x)-\sigma(x)|^2\,dx &= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} |f(x)|^2\,dx - \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \overline{f(x)} \sum_{k=-n}^{n} \gamma_k e^{ik\omega x}\,dx \\
&\quad - \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x) \sum_{k=-n}^{n} \overline{\gamma_k} e^{-ik\omega x}\,dx + \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \sum_{h,k=-n}^{n} \overline{\gamma_h}\gamma_k e^{i\frac{2\pi(k-h)}{T}x}\,dx \\
&= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} |f(x)|^2\,dx - \sum_{k=-n}^{n} (\overline{c_k}\gamma_k + c_k\overline{\gamma_k}) + \sum_{k=-n}^{n} |\gamma_k|^2 \\
&= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} |f(x)|^2\,dx + \sum_{k=-n}^{n} (|\gamma_k|^2 - \overline{c_k}\gamma_k - c_k\overline{\gamma_k} + |c_k|^2) - \sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2 \\
&= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} |f(x)|^2\,dx + \sum_{k=-n}^{n} |\gamma_k - c_k|^2 - \sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2.
\end{aligned}$$

Ma allora il minimo valore dello scarto quadratico medio si ha per $\gamma_k = c_k$, per ogni $k = -n, \dots, n$, cioè per $\sigma = s_n$.
(2) Dalla formula finale di (1) si ha

$$\begin{aligned}
\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} |f(x)-s_n(x)|^2\,dx &= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} |f(x)|^2\,dx - \sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2 \\
&= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} |f(x)|^2\,dx - \frac{a_0^2}{4} - 2\sum_{k=1}^{n}\Big|\frac{a_k - ib_k}{2}\Big|^2 \\
&= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} |f(x)|^2\,dx - \frac{a_0^2}{4} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2).
\end{aligned}$$

(3) Segue da (2). $\square$

Proposizione 4.10 (Lemma di Riemann-Lebesgue)**.** *Siano $T > 0$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, T-periodica, $f \in \mathcal{R}^*[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$. Allora, per $n \to \infty$, si ha*

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \cos\big(n\omega x\big)\, dx \to 0,$$
$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \sin\big(n\omega x\big)\, dx \to 0.$$

Dim. Segue dalla disuguaglianza di Bessel che $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) < \infty$, e quindi $a_n, b_n \to 0$. □

Proposizione 4.11. *Siano $T > 0$, $k \in \mathbb{N}$, $f \in C^k(\mathbb{R})$. Allora $a_n, b_n = o(\frac{1}{n^k})$, $n \to \infty$.*

Dim. Siano $a_n^{(k)} := \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f^{(k)}(x)\cos(n\omega x)\, dx$, $b_n^{(k)} = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f^{(k)}(x)\sin(n\omega x)\, dx$ i coefficienti di Fourier di $f^{(k)} \in C^0(\mathbb{R})$. Integrando per parti si ha

$$\begin{aligned}
a_n^{(k)} &= \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f^{(k)} \cos\big(n\omega t\big)\, dt = \frac{2}{T}\Big[f^{(k-1)}(t)\cos\big(n\omega t\big)\Big]_{-T/2}^{T/2} + \frac{2}{T}\, n\omega \int_{-T/2}^{T/2} f^{(k-1)}(t)\sin\big(n\omega t\big)\, dt \\
&= \frac{2}{T}\Big[f^{(k-1)}\Big(\frac{T}{2}\Big) - f^{(k-1)}\Big(-\frac{T}{2}\Big)\Big]\cos(n\pi) + n\omega\, b_n^{(k-1)} = n\omega\, b_n^{(k-1)}, \\
b_n^{(k)} &= \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f^{(k)} \sin\big(n\omega t\big)\, dt = \frac{2}{T}\Big[f^{(k-1)}(t)\sin\big(n\omega t\big)\Big]_{-T/2}^{T/2} - \frac{2}{T}\, n\omega \int_{-T/2}^{T/2} f^{(k-1)}(t)\cos\big(n\omega t\big)\, dt \\
&= \frac{2}{T}\Big[f^{(k-1)}\Big(\frac{T}{2}\Big)\sin(n\pi) + f^{(k-1)}\Big(-\frac{T}{2}\Big)\sin(n\pi)\Big] - n\omega\, a_n^{(k-1)} = -n\omega\, a_n^{(k-1)}.
\end{aligned}$$

Iterando questo procedimento, si ottiene $|a_n^{(k)}| = \begin{cases}(n\omega)^k|a_n|, & k \text{ pari},\\ (n\omega)^k|b_n|, & k \text{ dispari},\end{cases}$ $|b_n^{(k)}| = \begin{cases}(n\omega)^k|b_n|, & k \text{ pari},\\ (n\omega)^k|a_n|, & k \text{ dispari},\end{cases}$
da cui segue $|a_n| = \begin{cases}\frac{1}{(n\omega)^k}\,|a_n^{(k)}|, & k \text{ pari},\\ \frac{1}{(n\omega)^k}\,|b_n^{(k)}|, & k \text{ dispari},\end{cases}$ $|b_n| = \begin{cases}\frac{1}{(n\omega)^k}\,|b_n^{(k)}|, & k \text{ pari},\\ \frac{1}{(n\omega)^k}\,|a_n^{(k)}|, & k \text{ dispari}.\end{cases}$
Poiché $|a_n^{(k)}|, |b_n^{(k)}| \to 0$ per la Proposizione 4.10, la tesi segue. □

Vogliamo ora dimostrare dei teoremi di convergenza puntuale o uniforme delle serie di Fourier.

Definizione 4.12.

(1) Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Essa si dice continua a tratti in $[a,b]$ se esiste $\{x_1, \ldots, x_N\} \subset [a,b]$ tale che f è continua in $[a,b] \setminus \{x_1, \ldots, x_N\}$, ed esistono $f(x_k^{\pm}) := \lim_{x \to x_k^{\pm}} f(x) \in \mathbb{R}$, per ogni $k = 1, \ldots, N$.

(2) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Essa si dice continua a tratti in $\mathbb{R}$, se è continua a tratti in $[a,b]$, per ogni $[a,b] \subset \mathbb{R}$.

Proposizione 4.13 (Convergenza puntuale)**.** *Siano $T > 0$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, T-periodica, continua a tratti, e $s_n(x) := \displaystyle\sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k) e^{ik\omega x}$, $x \in \mathbb{R}$. Sia $x_0 \in \mathbb{R}$ tale che esistono $\lim_{x \to x_0^{\pm}} \frac{f(x) - f(x_0^{\pm})}{x - x_0} \in \mathbb{R}$ [in particolare, se f è continua in x_0, esistono $f'_{\pm}(x_0) \in \mathbb{R}$]. Allora $s_n(x_0) \to \frac{1}{2}\big(f(x_0^+) + f(x_0^-)\big)$, $n \to \infty$.*

Proposizione 4.14 (Convergenza uniforme)**.** *Siano* $T>0$, $f\in C^0(\mathbb{R})$, T*-periodica,* f' *continua a tratti, e* $s_n(x) := \dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n\cos\big(n\omega x\big) + b_n\sin\big(n\omega x\big)\Big)$, $x\in\mathbb{R}$. *Allora* $s_n \rightrightarrows f$ *in* $\mathbb{R}$.

Dim. Dalle ipotesi segue che $f'\in\mathcal{R}[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}]$, e quindi, detti, $\{\alpha_n,\beta_n : n\in\mathbb{N}\cup\{0\}\}$ i suoi coefficienti di Fourier, dalla disuguaglianza di Bessel [vedi la Proposizione 4.9 (3)] si ha $\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n^2+\beta_n^2)<\infty$. Ora

$$\begin{aligned}
\alpha_n &= \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f'(t)\cos\big(n\omega t\big)\,dt = \frac{2}{T}\Big[f(t)\cos\big(n\omega t\big)\Big]_{-T/2}^{T/2} + \frac{2}{T}\,n\omega\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin\big(n\omega t\big)\,dt \\
&= \frac{2}{T}\Big[f\Big(\frac{T}{2}\Big) - f\Big(-\frac{T}{2}\Big)\Big]\cos(n\pi) + n\omega\,b_n = n\omega\,b_n, \\
\beta_n &= \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f'(t)\sin\big(n\omega t\big)\,dt = \frac{2}{T}\Big[f(t)\sin\big(n\omega t\big)\Big]_{-T/2}^{T/2} - \frac{2}{T}\,n\omega\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos\big(n\omega t\big)\,dt \\
&= \frac{2}{T}\Big[f\Big(\frac{T}{2}\Big)\sin(n\pi) + f\Big(-\frac{T}{2}\Big)\sin(n\pi)\Big] - n\omega\,a_n = -n\omega\,a_n,
\end{aligned}$$

per cui $\sum_{n=1}^{\infty} n^2(a_n^2+b_n^2)<\infty$. Poiché $|a_n| = n|a_n|\cdot\frac{1}{n} \le \frac{1}{2}(n^2a_n^2+\frac{1}{n^2})$, e $|b_n|\le\frac{1}{2}(n^2b_n^2+\frac{1}{n^2})$, si ha $\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|+|b_n|) \le \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} n^2(a_n^2+b_n^2) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}<\infty$. Ma allora $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\big(a_n\cos(n\omega t) + b_n\sin(n\omega t)\big)$ converge totalmente, e per il criterio di Weierstrass [vedi la Proposizione 2.5] si ha la tesi. □

Proposizione 4.15 (Derivazione)**.** *Siano* $T>0$, $f\in C^0(\mathbb{R})$, T*-periodica,* f' *continua a tratti,* $x_0\in\mathbb{R}$ *tale che esistono* $\lim_{x\to x_0^\pm}\frac{f'(x)-f'(x_0^\pm)}{x-x_0}\in\mathbb{R}$, *e*

$$s_n(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n\cos\big(n\omega x\big) + b_n\sin\big(n\omega x\big)\Big), \quad x\in\mathbb{R}.$$

Allora $s_n'(x_0)\to\frac{1}{2}\big(f'_+(x_0)+f'_-(x_0)\big)$, $n\to\infty$.

Proposizione 4.16 (Integrazione)**.** *Siano* $T>0$, $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, T*-periodica e continua a tratti,* $\{a_n,b_n : n\in\mathbb{N}\cup\{0\}\}$ *i suoi coefficienti di Fourier,* $x_0,x\in\mathbb{R}$. *Allora* $\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt = \int_{x_0}^{x}\frac{a_0}{2}\,dt + \sum_{n=1}^{\infty}\int_{x_0}^{x}\big(a_n\cos(n\omega t)+b_n\sin(n\omega t)\big)\,dt$.

4.2 Esercizi svolti

Esercizio 41. Si trovi lo sviluppo di Fourier della funzione $f(x)=\sin^2 x$.

Svolgimento. La funzione f può essere riscritta come:

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$$

e di conseguenza gli unici coefficienti di Fourier diversi da zero sono

$$a_0 = 1\ , \quad a_2 = \frac{1}{2}\ .$$

□

Esercizio 42.

(i) Disegnare il prolungamento periodico f della funzione $g(x) = |x|$, per $x \in (-\pi, \pi]$.

(ii) Scrivere la corrispondente serie di Fourier per f, e calcolarla per $x = 0$.

(iii) Usare il risultato ottenuto per calcolare la somma della serie $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$.

Svolgimento. (i)

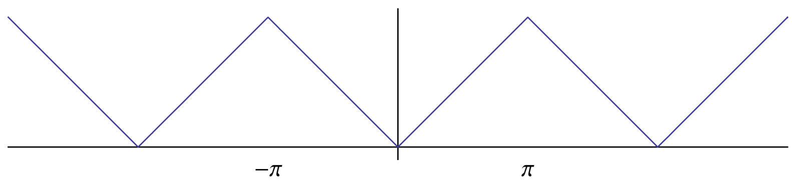

Figure 5: Grafico per l'esercizio 42

(ii) Poiché f è pari, i coefficienti di Fourier b_k sono nulli. Per quanto riguarda il coefficiente a_0:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} g(x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\,dx = \frac{2}{\pi}\Big[\frac{1}{2}x^2\Big]_0^{\pi} = \pi,$$

e per $k \geq 1$ si ottiene:

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} g(x)\cos kx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos kx\,dx \\ &\overset{(a)}{=} \frac{2}{\pi}\Big[\frac{1}{k}x\sin(kx) + \frac{1}{k^2}\cos(kx)\Big]_0^{\pi} \\ &= \frac{2}{\pi}\frac{1}{k^2}\big(\cos(k\pi) - 1\big) = \begin{cases} 0 & k = 2n \\ -\frac{4}{\pi(2n+1)^2} & k = 2n+1, \end{cases} \end{aligned}$$

dove in (a) si è usato il risultato $\int x\cos kx\,dx = \frac{1}{k}x\sin(kx) - \frac{1}{k}\int \sin(kx)\,dx = \frac{1}{k}x\sin(kx) + \frac{1}{k^2}\cos(kx)$.

Osserviamo che f soddisfa le ipotesi del teorema di Dirichlet in ogni punto $x \in \mathbb{R}$. Per il teorema di Dirichlet, concludiamo, per ogni $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}\cos((2n+1)x).$$

Quindi, per $x = 0$, si ha $\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = f(0) = 0$.

(iii) Da (ii) segue che $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$. □

Esercizio 43.

(i) Disegnare il prolungamento periodico f della funzione $g(x) = x$, per $x \in (-\pi, \pi]$.

(ii) Scrivere la corrispondente serie di Fourier per f, e calcolarla per $x = \pi$.

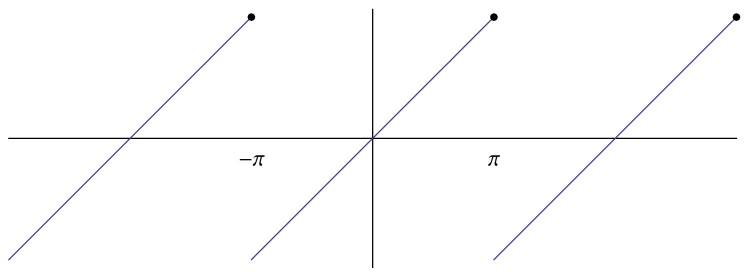

Figure 6: Grafico per l'esercizio 43

(iii) Usare il risultato ottenuto per calcolare la somma della serie $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$.

Svolgimento. (i)
(ii) Poiché f è dispari, i coefficienti di Fourier a_k sono nulli. Per quanto riguarda i coefficienti b_k si ottiene:

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} g(x)\sin kx\,dx = \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin kx\,dx = \frac{2}{\pi}\Big[-\frac{x}{k}\cos(kx) + \frac{1}{k^2}\sin(kx)\Big]_0^{\pi} \\ &= -\frac{2}{k}\cos(k\pi) = (-1)^{k+1}\frac{2}{k}. \end{aligned}$$

Osserviamo che f soddisfa le ipotesi del teorema di Dirichlet in ogni punto $x \in \mathbb{R}$. Per il teorema di Dirichlet, concludiamo

$$f(x) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin(nx)\,, \quad x \neq (2k+1)\pi,\ k \in \mathbb{Z},$$

mentre, per $x = \pi$ si ha $2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin(n\pi) = 0 = \frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}$.
(iii) Osserviamo che dall'uguaglianza di Parseval si ottiene $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\,dx = \frac{1}{12\pi}\Big[x^3\Big]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{6}\pi^2$. □

Esercizio 44.

(i) Disegnare il prolungamento periodico f della funzione $g(x) = x^2$, per $x \in (-\pi, \pi]$.

(ii) Scrivere la corrispondente serie di Fourier per f, e calcolarla per $x = \pi$.

(iii) Usare il risultato ottenuto per calcolare la somma della serie $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$.

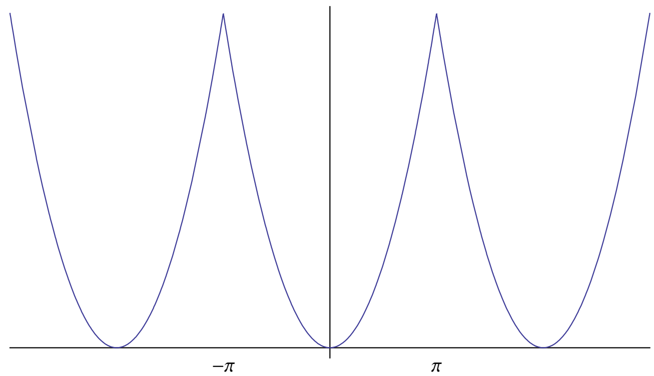

Figure 7: Grafico per l'esercizio 44

Svolgimento. (i)
(ii) Poiché f è pari, i coefficienti di Fourier b_k sono nulli. Per quanto riguarda il coefficiente a_0:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} g(x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\,dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^{\pi} = \frac{2}{3}\pi^2,$$

e per $k \geq 1$ si ottiene:

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} g(x)\cos kx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\cos kx\,dx \\ &\overset{(a)}{=} \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{k}x^2\sin(kx) + \frac{2}{k^2}x\cos(kx) - \frac{2}{k^3}\sin(kx)\right]_0^{\pi} \\ &= \frac{2}{\pi}\frac{2}{k^2}\pi\cos(k\pi) = (-1)^k\frac{4}{k^2}, \end{aligned}$$

dove in (a) si è usato il risultato $\int x^2\cos kx\,dx = \frac{1}{k}x^2\sin(kx) - \frac{2}{k}\int x\sin(kx)\,dx = \frac{1}{k}x^2\sin(kx) + \frac{2}{k^2}x\cos(kx) - \frac{2}{k^3}\sin(kx)$.

Osserviamo che f soddisfa le ipotesi del teorema di Dirichlet in ogni punto $x \in \mathbb{R}$. Per il teorema di Dirichlet, concludiamo, per ogni $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{1}{3}\pi^2 + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nx).$$

Quindi, per $x = \pi$, si ha $\frac{1}{3}\pi^2 + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = f(\pi) = \pi^2$.
(iii) Da (ii) segue che $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. □

Esercizio 45.

(i) Disegnare il prolungamento periodico f della funzione $g(x) = x^4$, per $x \in (-\pi, \pi]$.

(ii) Scrivere la corrispondente serie di Fourier per f, e calcolarla per $x = \pi$.

(iii) Usare il risultato ottenuto per calcolare la somma della serie $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4}$.

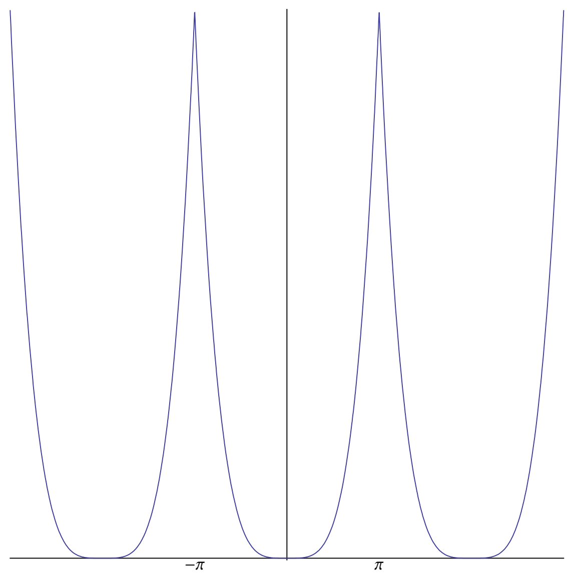

Figure 8: Grafico per l'esercizio 45

Svolgimento. (i)
(ii) Poiché f è pari, i coefficienti di Fourier b_k sono nulli. Per quanto riguarda il coefficiente a_0:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} g(x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^4\,dx = \frac{2}{\pi}\Big[\frac{1}{5}x^5\Big]_0^{\pi} = \frac{2}{5}\pi^4,$$

e per $k \geq 1$ si ottiene:

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} g(x)\cos kx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^4\cos kx\,dx \\ &\overset{(a)}{=} \frac{2}{\pi}\Big[\frac{1}{k}x^4\sin(kx) + \frac{4}{k^2}x^3\cos(kx) - \frac{12}{k^3}x^2\sin(kx) - \frac{24}{k^4}x\cos(kx) + \frac{24}{k^5}\sin(kx)\Big]_0^{\pi} \\ &= \frac{2}{\pi}\Big(\frac{4}{k^2}\pi^3\cos(k\pi) - \frac{24}{k^4}\pi\cos(k\pi)\Big) = (-1)^k\frac{8}{k^2}\Big(\pi^2 - \frac{6}{k^2}\Big), \end{aligned}$$

dove in (a) si è usato il risultato $\int x^4\cos kx\,dx = \frac{1}{k}x^4\sin(kx) - \frac{4}{k}\int x^3\sin(kx)\,dx = \frac{1}{k}x^4\sin(kx) + \frac{4}{k^2}x^3\cos(kx) - \frac{12}{k^2}\int x^2\cos(kx)\,dx = \frac{1}{k}x^4\sin(kx) + \frac{4}{k^2}x^3\cos(kx) - \frac{12}{k^3}x^2\sin(kx) + \frac{24}{k^3}\int x\sin(kx)\,dx = \frac{1}{k}x^4\sin(kx) + \frac{4}{k^2}x^3\cos(kx) - \frac{12}{k^3}x^2\sin(kx) - \frac{24}{k^4}x\cos(kx) + \frac{24}{k^5}\sin(kx)$.

Osserviamo che f soddisfa le ipotesi del teorema di Dirichlet in ogni punto $x \in \mathbb{R}$. Per il teorema di Dirichlet, concludiamo, per ogni $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{\pi^4}{5} + 8\pi^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nx) - 48\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^4}\cos(nx).$$

Quindi, per $x = \pi$, si ha $\frac{\pi^4}{5} + 8\pi^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} - 48\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = f(\pi) = \pi^4$.
(iii) Da (ii) segue che $48\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = -\frac{4}{5}\pi^4 + 8\pi^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = -\frac{4}{5}\pi^4 + 8\pi^2\frac{\pi^2}{6} = \frac{8}{15}\pi^4$, per cui $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$. $\square$

Esercizio 46. Si trovi lo sviluppo di Fourier della funzione:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & -\pi \le x < 0 \\ 1 & 0 \le x < \pi \ . \end{cases}$$

Svolgimento. La funzione f è dispari ed ha quindi uno sviluppo di soli seni. Si ha:

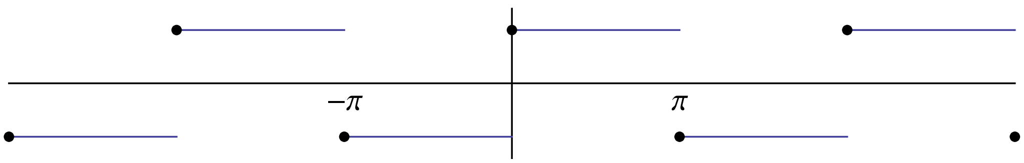

Figure 9: Grafico per l'esercizio 46

$$\begin{aligned} b_n &= -\int_{-\pi}^{0} \sin nx \, dx + \int_0^{\pi} \sin nx \, dx = 2\int_0^{\pi} \sin nx \, dx = \\ &= -\frac{2}{n}[\cos nx]_0^{\pi} = -\frac{2}{n}(\cos n\pi - 1) = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ è pari} \\ \frac{4}{n} & \text{se } n \text{ è dispari} \ . \end{cases} \end{aligned}$$

Osserviamo che f soddisfa le ipotesi del teorema di Dirichlet in ogni punto $x \in \mathbb{R}$. Per il teorema di Dirichlet, concludiamo

$$f(x) = 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \sin\big((2n-1)x\big) \ , \quad x \ne k\pi, \ k \in \mathbb{Z},$$

mentre, per $x = 0$, o $x = \pi$ la somma della serie è zero. □

Esercizio 47.

(i) Disegnare il prolungamento periodico f della funzione ottenuta quale estensione pari in $[-\pi, \pi]$ della funzione $g = g(x)$ definita in $[0, \pi]$ come segue:

$$g(x) = \begin{cases} 1 & 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \\ -1 & \frac{\pi}{2} < x \le \pi. \end{cases}$$

(ii) Scrivere la corrispondente serie di Fourier per f, e calcolarla per $x = \frac{\pi}{2}$.

(iii) Usare il risultato ottenuto per calcolare la somma della serie $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$.

Svolgimento. (i)
(ii) Poiché f è pari, i coefficienti di Fourier b_k sono nulli. Per quanto riguarda il coefficiente a_0:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} g(x)\, dx = 0,$$

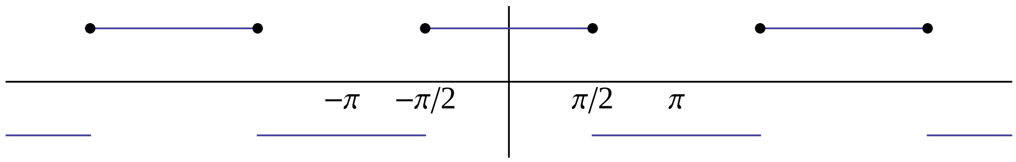

Figure 10: Grafico per l'esercizio 47

e per $k \geq 1$ si ottiene:

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} g(x)\cos kx\,dx = \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\cos kx\,dx - \frac{2}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi}\cos kx\,dx = \\ &= \frac{2}{\pi}\frac{1}{k}\Big([\sin kx]_0^{\pi/2} - [\sin kx]_{\pi/2}^{\pi}\Big) = \frac{4}{k\pi}\sin\Big(\frac{k\pi}{2}\Big) \\ &= \begin{cases} 0 & k = 2n \\ (-1)^n\,\frac{4}{(2n+1)\pi} & k = 2n+1\,. \end{cases} \end{aligned}$$

Osserviamo che f soddisfa le ipotesi del teorema di Dirichlet in ogni punto $x \in \mathbb{R}$. Per il teorema di Dirichlet, concludiamo

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\cos(2n+1)x\,, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z},$$

mentre, per $x = \frac{\pi}{2}$ si ha $\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\cos(2n+1)\frac{\pi}{2} = 0 = \frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}$.

(iii) Osserviamo che $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}f(0) = \frac{\pi}{4}$. □

Esercizio 48. Data la funzione

$$g(x) = \begin{cases} 0 & -\pi < x \leq -\frac{\pi}{2} \\ 1 & -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi \end{cases}$$

sia f il suo prolungamento 2π–periodico. Disegnare f, scrivere la serie di Fourier ad essa associata, e calcolarne la somma per $x = 1$ e $x = \frac{\pi}{2}$.

Svolgimento. Poiché f è pari si ha $b_k = 0$. Inoltre

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos kx\,dx = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ \frac{2}{k\pi}[\sin kx]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{k\pi}\sin\left(k\frac{\pi}{2}\right) & k > 0\,. \end{cases}$$

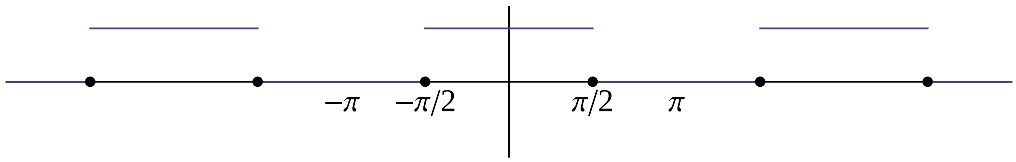

Figure 11: Grafico per l'esercizio 48

Poiché f in $x = 1$ e $x = \frac{\pi}{2}$ verifica le ipotesi del teorema di Dirichlet si ha:

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \sin\left(k\frac{\pi}{2}\right) \cos k = f(1) = 1$$

e

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k\pi} \sin\left(k\frac{\pi}{2}\right) \cos\left(k\frac{\pi}{2}\right) = \frac{f\left(\frac{\pi^-}{2}\right) + f\left(\frac{\pi^+}{2}\right)}{2} = \frac{1}{2}$$

essendo

$$\sin\left(k\frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0 & k = 2n \\ 1 & k = 4n+1 \\ -1 & k = 4n+3 \ . \end{cases}$$

□

Esercizio 49. (i) Disegnare il prolungamento periodico f della funzione ottenuta quale estensione pari in $[-\pi, \pi]$ della funzione $g = g(x)$ definita in $[0, \pi]$ come segue:

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - x & 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \\ 0 & \frac{\pi}{2} < x \le \pi \end{cases}$$

(ii) Scrivere la corrispondente serie di Fourier per f.

Svolgimento. (i)

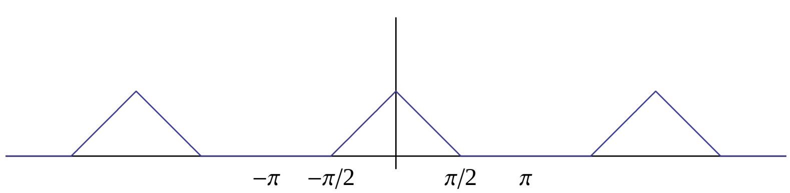

Figure 12: Grafico per l'esercizio 49

(ii) Poiché f è pari, i coefficienti di Fourier b_k sono nulli. Per quanto riguarda il coefficiente a_0:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} g(x)\,dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \left(\frac{\pi}{2} - x\right) dx = \frac{\pi}{4}$$

e per $k \geq 1$ si ottiene:

$$
\begin{aligned}
a_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} g(x)\cos kx\,dx = \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cos kx\,dx = \\
\text{(per parti)}\quad &= \frac{2}{\pi}\frac{1}{k}\left(\left[\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\sin kx\right]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2}\sin kx\,dx\right) = \\
&= -\left[\frac{2}{\pi}\frac{1}{k^2}\cos kx\right]_0^{\pi/2}
\end{aligned}
$$

e quindi

$$
a_k = \frac{2}{\pi}\frac{1}{k^2}\left(1-\cos k\frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} \frac{2}{\pi(2n+1)^2} & k = 2n+1 \\ \frac{2}{\pi(2n)^2}\big(1-(-1)^n\big) & k = 2n \end{cases}
$$

Poiché f è continua e soddisfa tutte le ipotesi del teorema di Dirichlet, concludiamo

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{\pi}{8} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx = \\
&= \frac{\pi}{8} + \frac{2}{\pi}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\cos(2n+1)x + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}\big(1-(-1)^n\big)\cos 2nx\right).
\end{aligned}
$$

□

Esercizio 50.

(i) Disegnare il prolungamento periodico f della funzione $g(x) = e^x$, per $x \in (-\pi, \pi]$.

(ii) Scrivere la corrispondente serie di Fourier per f, e calcolarla per $x = 0$ e $x = \pi$.

(iii) Usare il risultato ottenuto per calcolare la somma della serie $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2+1}$.

Svolgimento. (i)
(ii) Calcoliamo i coefficienti di Fourier c_k in forma complessa. Si ha, per ogni $k \in \mathbb{Z}$,

$$
\begin{aligned}
c_k &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)e^{-ikx}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{(1-ik)x}\,dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{1-ik}e^{(1-ik)x}\right]_{-\pi}^{\pi} \\
&= \frac{1}{2\pi(1-ik)}\left(e^{(1-ik)\pi} - e^{-(1-ik)\pi}\right) = (-1)^k\frac{1}{2\pi}\left(e^{\pi}-e^{-\pi}\right)\frac{1}{1-ik},
\end{aligned}
$$

da cui segue che $a_0 = 2c_0 = \frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{\pi}$, $a_k = c_k + c_{-k} = (-1)^k\frac{1}{2\pi}\Big(e^{\pi}-e^{-\pi}\Big)\Big(\frac{1}{1-ik}+\frac{1}{1+ik}\Big) = (-1)^k\frac{1}{2\pi}\Big(e^{\pi}-e^{-\pi}\Big)\frac{2}{k^2+1}$, e $b_k = i(c_k - c_{-k}) = (-1)^k\frac{1}{2\pi}\Big(e^{\pi}-e^{-\pi}\Big)\Big(\frac{i}{1-ik}-\frac{i}{1+ik}\Big) = (-1)^k\frac{1}{2\pi}\Big(e^{\pi} - e^{-\pi}\Big)\frac{-2k}{k^2+1}$.

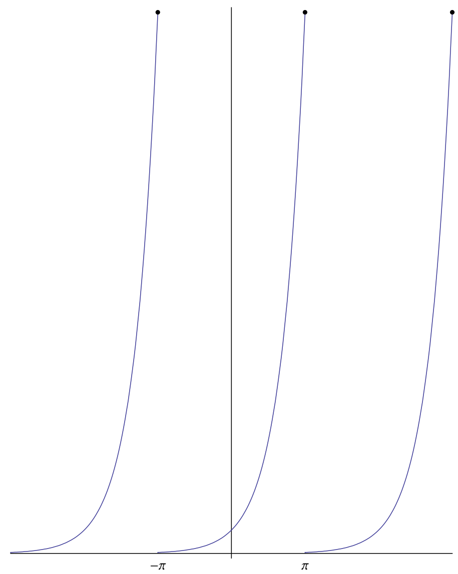

Figure 13: Grafico per l'esercizio 50

Osserviamo che f soddisfa le ipotesi del teorema di Dirichlet in ogni punto $x \in \mathbb{R}$. Per il teorema di Dirichlet, concludiamo, per ogni $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2\pi} + \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1} \big(\cos(nx) - n\sin(nx)\big).$$

Quindi, per $x = 0$, si ha $\frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{2\pi} + \frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1} = f(0) = 1$.

Mentre, per $x = \pi$, si ha $\frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{2\pi} + \frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} = \frac{f(x^+)+f(x^-)}{2} = \frac{e^{\pi}+e^{-\pi}}{2}$.

(iii) Da (ii) segue che $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1} = \frac{\pi}{e^{\pi}-e^{-\pi}} - \frac{1}{2}$. □

Esercizio 51. (i) Dopo aver disegnato l'estensione periodica della funzione

$$f(x) = 1 - |\sin x| \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}\,,\ \frac{\pi}{2}\right]$$

specificandone il periodo T, calcolare la corrispondente serie di Fourier.

(ii) Calcolare la somma della serie:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2-1}\ .$$

Svolgimento. (i) $f(x) = 1 - |\sin x| \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}\,,\ \frac{\pi}{2}\right]$:
$\tilde{f}$ è periodica di periodo $T = \pi$, continua e soddisfa *tutte* le ipotesi del teorema di Dirichlet.

Poiché f è pari, $b_k \equiv 0$ e quindi

$$\tilde{f}(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos 2kx$$

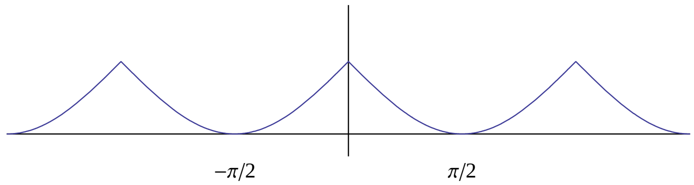

Figure 14: Grafico per l'esercizio 51

dove, tenendo ancora conto che f è pari,

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(1-|\sin x|)\cos 2kx\,dx = \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2}(1-\sin x)\cos 2kx\,dx$$

e quindi

$$a_0 = \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2}(1-\sin x)\,dx = \frac{4}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-1\right) = 2-\frac{4}{\pi}$$

e, se $k \geq 1$

$$a_k = \frac{4}{\pi}\left(\left[\frac{1}{2k}\sin 2kx\right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2}\sin x\cos(2kx)\,dx\right)\ .$$

Per valutare

$$\int_0^{\pi/2}\sin x\cos(2kx)\,dx$$

si ricordano le formule:

$$\sin x\cos 2kx = \frac{1}{2}[\sin(2k+1)x + \sin(1-2k)x]$$

da cui si ha

$$\begin{aligned}&\int_0^{\pi/2}\sin x\cos(2kx)\,dx = \\ &\qquad = -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2k+1}\cos(2k+1)x - \frac{1}{2k-1}\cos(1-2k)x\right]_0^{\pi/2} = \\ &\qquad = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k-1}\right) = -\frac{1}{4k^2-1}.\end{aligned}$$

Si ottiene quindi, per ogni $k \geq 1$,

$$a_k = \frac{4}{\pi}\frac{1}{4k^2-1}$$

e di conseguenza:

$$\tilde{f}(x) = 1-\frac{2}{\pi}+\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4k^2-1}\cos 2kx$$

(ii) Per $x=0$ si ottiene:

$$1 = f(0) = \tilde{f}(0) = 1-\frac{2}{\pi}+\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4k^2-1}$$

da cui

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2-1} = \frac{1}{2}.$$

Questo risultato si poteva anche ottenere osservando che $\sum \frac{1}{4k^2-1}$ è una serie telescopica, infatti:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4k^2-1} = -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k-1}\right) = -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(a_k - a_{k-1})$$

con $a_k = \frac{1}{2k+1}$ $(k = 0,\, 1,\, 2\ldots)$. Si ottiene quindi:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4k^2-1} = -\frac{1}{2}(a_n - a_0) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right) \to \frac{1}{2}\,,\ (n \to +\infty).$$

□

Esercizio 52.

(i) Disegnare il prolungamento 2-periodico f della funzione $g(x) = 1 - x^2$, per $x \in (-1,\, 1]$.

(ii) Scrivere la corrispondente serie di Fourier per f, e calcolarla per $x = 0$.

(iii) Usare il risultato ottenuto per calcolare la somma della serie $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}$.

Svolgimento. (i)

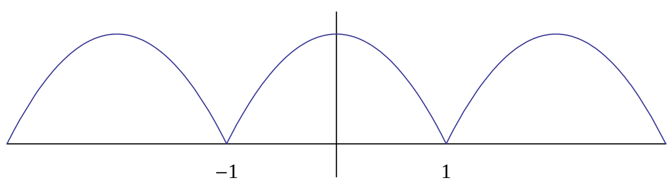

Figure 15: Grafico per l'esercizio 52

(ii) Poiché f è pari, i coefficienti di Fourier b_k sono nulli. Per quanto riguarda il coefficiente a_0:

$$a_0 = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 2\int_0^1 (1-x^2)\,dx = 2\Big[x - \frac{1}{3}x^3\Big]_0^1 = \frac{4}{3},$$

e per $k \geq 1$ si ottiene:

$$\begin{aligned} a_k &= \int_{-1}^{1} f(x)\cos(k\pi x)\,dx = 2\int_0^1 (1-x^2)\cos(k\pi x)\,dx \\ &\overset{(a)}{=} 2\Big[\frac{1}{k\pi}\sin(k\pi x) - \frac{1}{k\pi}x^2\sin(k\pi x) - \frac{2}{k^2\pi^2}x\cos(k\pi x) + \frac{2}{k^3\pi^3}\sin(k\pi x)\Big]_0^1 \\ &= -2\frac{2}{k^2\pi^2}\cos(k\pi) = (-1)^{k+1}\frac{4}{k^2\pi^2}, \end{aligned}$$

dove in (a) si è usato il risultato $\int x^2\cos(k\pi x)\,dx = \frac{1}{k\pi}x^2\sin(k\pi x) - \frac{2}{k\pi}\int x\sin(k\pi x)\,dx = \frac{1}{k\pi}x^2\sin(k\pi x) + \frac{2}{k^2\pi^2}x\cos(k\pi x) - \frac{2}{k^3\pi^3}\sin(k\pi x)$.

Osserviamo che f soddisfa le ipotesi del teorema di Dirichlet in ogni punto $x \in \mathbb{R}$. Per il teorema di Dirichlet, concludiamo, per ogni $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{2}{3} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos(n\pi x).$$

Quindi, per $x = 0$, si ha $\frac{2}{3} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} = f(0) = 1$.
(iii) Da (ii) segue che $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$. □

4.3 Esercizi proposti

Esercizio 53. Disegnare il prolungamento T-periodico f delle seguenti funzioni g, definite in $(-T/2, T/2]$ e scrivere la corrispondente serie di Fourier per f

(1) $g(x) = \cos^2 x$, con $T = 2\pi$,

(2) $g(x) = \sin x\cos x$, con $T = 2\pi$,

(3) $g(x) = \begin{cases} 4 & |x| \le \frac{\pi}{2} \\ 0 & \frac{\pi}{2} < |x| \le \pi, \end{cases}$ con $T = 2\pi$,

(4) $g(x) = 1 - \dfrac{2|x|}{\pi}$, con $T = 2\pi$,

(5) $g(x) = x\cos x$, con $T = 2\pi$,

(6) $g(x) = x\sin x$, con $T = 2\pi$,

(7) $g(x) = \begin{cases} 0 & x \in (-\pi, 0) \\ \sin x & x \in [0, \pi]\,, \end{cases}$ con $T = 2\pi$,

(8) $g(x) = \begin{cases} \cos(2x) & |x| \le \pi/2 \\ -1 & \pi/2 < |x| \le \pi\,, \end{cases}$ con $T = 2\pi$,

(9) $g(x) = x(1 - 2|x|)$, con $T = 1$,

(10) $g(x) = \begin{cases} -1 & -2 < x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ 1 & 0 < x \le 2\,, \end{cases}$ con $T = 4$,

(11) $g(x) = \begin{cases} 0 & 1 < |x| < 2 \\ 1 & |x| \le 1\,, \end{cases}$ con $T = 4$,

(12) $g(x) = \begin{cases} -3 - x & -3 < x < -1 \\ 2x & -1 \le x \le 1 \\ 3 - x & 1 < x \le 3\,, \end{cases}$ con $T = 6$.