

Analisi matematica 3 Corso di Ingegneria online

Argomenti del programma

Funzioni di più variabili

- 1 limiti, continuità**
- 2 derivabilità, differenziabilità**
- 3 punti critici, estremi liberi**
- 4 il teorema delle funzioni implicite**
- 5 curve e superfici: definizioni**
- 6 estremi vincolati**
- 7 integrazione multipla, misura di Peano–Jordan in \mathbb{R}^2 (cenni)**
- 8 curve e superfici: calcolo integrale**

Il materiale esposto è tratto principalmente dai seguenti libri:

- 1) M.Bramanti, C.D.Pagani, S.Salsa "MATEMATICA, calcolo infinitesimale e algebra lineare", prima edizione Settembre 2000, Zanichelli, (successivamente indicato con [BPS1])
- 2) M.Bramanti, C.D.Pagani, S.Salsa "MATEMATICA, calcolo infinitesimale e algebra lineare", seconda edizione Settembre 2004, Zanichelli, (successivamente indicato con [BPS2])
- 3) M.Bertsch–R.Dal Passo "Lezioni di Analisi Matematica I" Editrice Aracne oppure M.Bertsch–R.Dal Passo "Elementi di Analisi Matematica I" Editrice Aracne, (successivamente indicati con [BD1] e [BD2]. È sufficiente solo uno dei due)

Volta per volta verrà evidenziato quale dei precedenti volumi è stato usato. Inoltre si indicheranno quali esercizi studiare dalla raccolta pubblica (chiamata d'ora in poi come *esercizi in rete*) e consultabile al sito: www.mat.uniroma2.it/~perfetti/eserci/eserci.html. Bisogna scaricare i file dal titolo

- 1) "funzioni di due variabili: continuita', differenziabilita', punti critici vincolati e non vincolati"
- 2) "integrali curvilinei, doppi, tripli, superficiali, equazioni differenziali".

Prima della stampa è necessario scaricare i due programmi `gs601w32.exe` e `gsv34w32.exe`

Sebbene le presenti lezioni tendano a essere autoconsistenti è opportuno che ci si doti di uno dei libri [BPS1], [BPS2] oppure [BD2]. Il libro [BD1] tratta solo gli argomenti dei capitoli 1), 2) e 3).

Gli esercizi con uno o più asterischi sono più difficili

1 Limiti

Il materiale è tratto da [BD1]. In particolare si è usata la definizione di pag. 292 (7.2) con alcune differenze. In [BD1] gli autori usano $l \in \mathbb{R}^*$ e $\underline{x} \in \mathbb{R}$ in quanto vogliono trattare simultaneamente il caso $l = \pm\infty$ e il caso in cui $|\underline{x}|$ vada all'infinito. Qui abbiamo separato lo studio di l finito e infinito. In [BPS1] l'argomento "limiti" è trattato nel capitolo 4.1. In [BPS2] l'argomento "limiti" è trattato nel capitolo 10, paragrafi 2.1 e 2.2. Si possono consultare gli esercizi ivi contenuti e per quel che riguarda gli *esercizi in rete*, vanno studiati tutti quelli in 1.7 tranne gli esercizi con uno o più asterischi. Questi ultimi possono essere studiati in seconda lettura.

Sia dato lo spazio \mathbb{R}^n con n intero maggiore di uno. Indicheremo gli elementi di \mathbb{R}^n con $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n)$ oppure con $\underline{y} = (y_1, \dots, y_n)$. In \mathbb{R}^n è data la *distanza euclidea* fra due punti $\|\underline{x} - \underline{x}'\| \stackrel{\text{def}}{=} \left(\sum_{i=1}^n (x_i - x'_i)^2 \right)^{1/2}$.

Nella maggior parte dei casi faremo esempi con $n = 2$. È possibile che vengano usate altre distanze come $|\underline{x} - \underline{y}|_1 \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$ oppure $|\underline{x} - \underline{y}|_\infty \stackrel{\text{def}}{=} \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|$

Con la parola distanza si intende una qualsiasi funzione $\rho: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty)$ che soddisfa i seguenti requisiti standard:

- 1) $\rho(\underline{x}, \underline{y}) \geq 0$,
- 2) $\rho(\underline{x}, \underline{y}) = 0 \iff \underline{x} = \underline{y}$
- 3) $\rho(\underline{x}, \underline{y}) = \rho(\underline{y}, \underline{x})$,
- 4) $\rho(\underline{x}, \underline{y}) \leq \rho(\underline{x}, \underline{z}) + \rho(\underline{y}, \underline{z})$

La nozione di distanza genera immediatamente la nozione di convergenza in \mathbb{R}^n . Data una successione $\{\underline{x}_n\}$, essa converge ad \underline{x} , ($\underline{x}_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \underline{x}$) se

$$\forall \varepsilon \exists n_\varepsilon: n > n_\varepsilon \implies \|\underline{x}_n - \underline{y}\| < \varepsilon$$

• Dimostrare che $\underline{x}_n \rightarrow \underline{y}$ se e solo se $(x_n)_k \rightarrow y_k$ per ogni $k = 1, \dots, n$ (convergenza componente per componente). Infatti se $\underline{x}_n \rightarrow \underline{y}$, allora essendo $|(x_n)_k - y_k| \leq \|\underline{x}_n - \underline{y}\|$, dalla convergenza della successione segue la convergenza componente per componente. Viceversa da $\|\underline{x}_n - \underline{y}\| \leq n \max_{1 \leq k \leq n} |(x_n)_k - y_k|$ segue che la convergenza componente per componente implica la convergenza della successione.

Esercizio 1 Dimostrare che le tre distanze sono tutte equivalenti. In altre parole dimostrare che esistono delle costanti c_1, c_2, c_3 , eventualmente dipendenti da n ma non da \underline{x} né da \underline{y} , per cui $|\underline{x} - \underline{y}|_\infty \leq c_1 \|\underline{x} - \underline{y}\| \leq c_2 |\underline{x} - \underline{y}|_1 \leq c_3 |\underline{x} - \underline{y}|_\infty$

Dimostrazione

1) $|\underline{x} - \underline{y}|_\infty \leq c_1 \|\underline{x} - \underline{y}\|$ è immediata con $c_1 = 1$ in quanto $|\underline{x} - \underline{y}|_\infty$ è pari ad almeno una delle quantità $|x_i - y_i|$.

2) $\|\underline{x} - \underline{y}\| \leq c_2 |\underline{x} - \underline{y}|_1$ è pure immediata con $c_2 = 1$. Infatti la disuguaglianza è equivalente a $\sum_{i=1}^n (x_i - x'_i)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i - x'_i| \right)^2$ che è chiaramente vera.

3) $|\underline{x} - \underline{y}|_1 \leq c_3 \|\underline{x} - \underline{y}\|_\infty$ è vera con $c_3 = n$. Innanzitutto se prendiamo $|x_i - y_i| = |x_j - y_j|$ per ogni i e j otteniamo $n|x_1 - y_1| \leq c_3|x_1 - y_1|$ e quindi c_3 deve almeno essere grande quanto n . Poi

facciamo vedere per induzione che effettivamente la costante giusta è n . Per $n = 1$ chiaramente $c_3 = 1$. Supponiamo ora che la disuguaglianza è vera per $1 \leq n \leq n_0$. Per $n = n_0 + 1$ dobbiamo far vedere che $\sum_{i=1}^{n_0+1} |x_i - y_i| \leq \max_{1 \leq i \leq n_0+1} |x_i - y_i| \cdot \sum_{i=1}^{n_0+1} 1 = \sum_{i=1}^{n_0} |x_i - y_i| + |x_{n_0+1} - y_{n_0+1}| \leq n \max_{1 \leq i \leq n_0} |x_i - y_i| + |x_{n_0+1} - y_{n_0+1}| \leq (n+1) \max_{1 \leq i \leq n_0+1} |x_i - y_i| = (n+1) \|\underline{x} - \underline{y}\|_\infty$.

Come si vede dalla dimostrazione, se il numero n delle componenti fosse infinito (spazi di dimensione infinita) l'argomento non è più valido. In tal caso infatti non è più vero che le norme sono equivalenti

Esercizio Trovare la minima costante per cui $\|\underline{x} - \underline{y}\| \leq c \|\underline{x} - \underline{y}\|_\infty$ per ogni \underline{x} e \underline{y}

Dimostrazione

Applicando il risultato precedente troviamo $c = 1$. Per dimostrare che tale numero è il più piccolo possibile dobbiamo far vedere che se $c' < 1$ allora esistono \underline{x}^o e \underline{y}^o tali che $\|\underline{x}^o - \underline{y}^o\| > c' \|\underline{x}^o - \underline{y}^o\|_\infty$. Per facilitare i calcoli assumiamo $\underline{y}^o = \underline{0}$. Basta prendere $x_1^o \neq 0$ e $x_j^o = 0$ per $j = 2, \dots, n$.

Esercizio Trovare la minima costante \bar{c} per cui $|x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| \leq \bar{c} \sqrt{(x_1^2 - y_1^2)^2 + (x_2^2 - y_2^2)^2}$

Dimostrazione

Potremmo applicare il risultato dell'esercizio 1 e scrivere $|x_1 - y_1| \leq c_3 \|\underline{x} - \underline{y}\|_\infty \leq c_3 c \|\underline{x} - \underline{y}\| = 2 \|\underline{x} - \underline{y}\|$ ma non siamo sicuri che 2 sia il numero più piccolo possibile ed infatti non lo è. Allo scopo prendiamo $y_1 = y_2 = 0$ e otteniamo $|x_1| + |x_2| \leq c \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$. Se $x_2 = 0$ abbiamo $|x_1| \leq c|x_1|$ da cui $c \geq 1$. Se $x_2 \neq 0$ possiamo dividere per x_2 ed ottenere $1 + \frac{|x_1|}{|x_2|} \leq c \sqrt{1 + \frac{x_1^2}{x_2^2}}$. Chiamando $\frac{|x_1|}{|x_2|} = t$ ed elevando al quadrato otteniamo $1 + 2t + t^2 \leq c^2(1 + t^2)$ da cui $t^2(c^2 - 1) - 2t + c^2 - 1 \geq 0$ per ogni $t \geq 0$. Per $t = 0$ abbiamo $c \geq 1$ e questo c'era da aspettarselo. Cerchiamo ora il minimo in funzione di c della parabola $t^2(c^2 - 1) - 2t + c^2 - 1$ e imponiamo che sia maggiore o uguale a zero. Il minimo della parabola ha $t = \frac{1}{c^2 - 1}$ e l'ordinata è $(c^2 - 1)^2 - 1 \geq 0$ da cui $c \geq \sqrt{2}$. Dobbiamo far vedere ora che se prendiamo un numero positivo $c' < \sqrt{2}$, troviamo una coppia (x_1^o, x_2^o) tale che $|x_1| + |x_2| > c' \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$. Si può verificare che qualsiasi coppia (a, a) soddisfa la richiesta. ■

Definizione 1.1 Dato $\underline{x}_o \in \mathbb{R}^n$, e dato un numero reale positivo r , l'insieme

$$B_{\underline{x}_o}(r) \stackrel{\text{def}}{=} \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n : \|\underline{x} - \underline{x}_o\| < r\}$$

si dice *sfera aperta di centro \underline{x}_o e raggio r* . A volte la parola "aperta" viene omessa.

L'insieme

$$B_{\underline{x}_o}(r) \stackrel{\text{def}}{=} \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n : \|\underline{x} - \underline{x}_o\| \leq r\}$$

si dice *sfera chiusa di centro \underline{x}_o e raggio r* e si indica con $\overline{B}_{\underline{x}_o}(r)$.

L'insieme

$$B_{\underline{x}_o}(r) \stackrel{\text{def}}{=} \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n : \|\underline{x} - \underline{x}_o\| = r\}$$

si dice *frontiera* di $B_{\underline{x}_o}(r)$ e si indica con $\partial B_{\underline{x}_o}(r)$.

Sia ora $E \subset \mathbb{R}^n$. Un punto $\underline{y} \in E$ è detto *punto interno ad E* se

$$\exists r > 0 : B_{\underline{y}}(r) \subset E$$

L'insieme dei punti interni ad E è indicato $\overset{\circ}{E}$. La *sfera aperta* $B_{\underline{x}_o}(r)$ è chiaramente un insieme aperto.

L'insieme vuoto per definizione è aperto.

Definizione 1.2 La frontiera di E , ∂E , è definita come l'insieme dei punti (non necessariamente appartenenti a E) tali che qualunque sia la sfera aperta contenente il punto, tale sfera contiene sia punti di E che punti del complementare E^c . In formule $\underline{y} \in \partial E$ se

$$\forall r > 0, B_{\underline{y}}(r) \cap E \neq \emptyset \wedge B_{\underline{y}}(r) \cap E^c \neq \emptyset$$

Un punto $\underline{y} \in \partial E$ può appartenere ad E così come al complementare. La frontiera della sfera aperta appartiene al complementare mentre la frontiera della sfera chiusa appartiene alla sfera. Per definizione $\partial E = \partial E^c$.

Definizione 1.3 \underline{y} è punto di accumulazione per E (in simboli $\underline{y} \in E'$) se

$$\forall r > 0 B_{\underline{y}}(r) \cap E \setminus \{\underline{y}\} \neq \emptyset$$

In altre parole, ogni sfera aperta contenente \underline{y} , deve contenere almeno un punto di E . In termini di successioni si traduce in

$$\exists \{\underline{x}_n\} : \underline{x}_n \in E, \underline{x}_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \underline{y} \wedge \exists n_o : \underline{x}_n \neq \underline{y} \forall n > n_o$$

Osservazione *i*) I punti interni sono di accumulazione. Viceversa i punti di accumulazione non è detto siano interni. Un punto di accumulazione, se non è interno, è di frontiera. Non è detto che se $\underline{y} \in E'$ allora $\underline{y} \in E$. Ad esempio la frontiera della sfera aperta è costituita da punti di accumulazione che non appartengono alla sfera aperta.

Definizione 1.31 $\underline{y} \in E$ è punto isolato se

$$\exists r > 0 : B_{\underline{y}}(r) \cap E \setminus \{\underline{y}\} = \emptyset$$

Un punto isolato è necessariamente di frontiera. Un punto di frontiera o è di accumulazione o è isolato.

Definizione 1.32 $E \cup E'$ è detto chiusura di E e si indica con \overline{E} . Dunque un insieme è detto chiuso se $E' \subset E$.

Esempi $E = B_{\underline{x}_o}(r)$ e prendiamo un punto che sta sul bordo della sfera aperta ossia un punto \underline{y} tale che $\|\underline{y} - \underline{x}_o\| = r$. Prendiamo una successione di punti tutti situati lungo il raggio che congiunge \underline{y} a \underline{x}_o e che converge a \underline{y} . Tale successione soddisfa la richiesta della definizione e quindi $\underline{y} \in E'$

Esercizio Dimostrare che sono equivalenti le affermazioni: 1) E è chiuso, 2) $\partial E \subset E$, 3) E^c è aperto

Dimostrazione

1) \implies 2). Siccome ∂E è costituita da punti isolati o da punti di accumulazione, è immediato.

2) \implies 3). Supponiamo E^c non aperto. Vuol dire che esiste $\underline{y} \in E^c$ tale che per $B_{\underline{y}}(r) \cap E \neq \emptyset$ per ogni r . Ma allora vuol dire che \underline{y} o è punto interno ad E e questo è impossibile poiché $\underline{y} \in E^c$, oppure $\underline{y} \in \partial E$ e questo pure è impossibile in quanto abbiamo assunto 2) vera.

3) \implies 1). Sia $\underline{y} \in E'$. Se $\underline{y} \in E$ abbiamo concluso. Se $\underline{y} \notin E$ allora $\underline{y} \in E^c$ ma questo è impossibile in quanto E^c è aperto e quindi tutti i suoi punti sono interni e quindi \underline{y} non può appartenere a E' . ■

Essendo \emptyset aperto, \mathbb{R} è chiuso. Certamente \mathbb{R} è aperto per cui \emptyset è chiuso. Gli insiemi \emptyset e \mathbb{R} sono gli unici insiemi sia aperti che chiusi.

Esercizio 1) Dimostrare che $\overset{\circ}{E} = (\overline{E^c})^c$, 2) $\partial E = \overline{E} \setminus \overset{\circ}{E}$, 3) $(E \setminus \overset{\circ}{E}) = \emptyset$, 4) Dimostrare che ∂E è un insieme chiuso ossia $\partial E = \overline{\partial E}$, 5) dare almeno un esempio in cui $E \subset \partial E$ e $E \neq \partial E$, 6) dire se $\partial(\overset{\circ}{E}) = \partial E$ ed in caso negativo dare un esempio.

Dimostrazione 1) È come dire $(\overset{\circ}{E})^c = \overline{E^c}$. Il complementare di $\overset{\circ}{E}$ è dato dai punti interni di E^c ($(\overset{\circ}{E^c})$) e dai punti di frontiera ossia $(\overset{\circ}{E})^c = (\overset{\circ}{E^c}) \cup \partial E^c = \overline{E^c}$

2) $\overline{E} = \overset{\circ}{E} \cup \partial E$. Se da $\overline{E} = E \cup \partial E$ passiamo a $\overline{E} = \overset{\circ}{E} \cup \partial E$, abbiamo tolto da E esattamente i punti di frontiera.

3) $(E \setminus \overset{\circ}{E}) = \emptyset$. Ovvio. Se da E tolgo i suoi punti interni, il risultato è un insieme che non ha punti interni.

4) Sappiamo che $\overline{E} = E \cup \partial E$ per cui $\partial E = \overline{\partial E}$ se e solo se $\partial E = \partial E \cup \partial(\partial E)$ e ci basta mostrare che $\partial(\partial E) = \partial E$. Per questo usiamo la definizione. $\underline{y} \in \partial(\partial E)$ significa che

$$\forall r > 0 \quad B_{\underline{y}}(r) \cap \partial E \neq \emptyset, \quad B_{\underline{y}}(r) \cap (\partial E)^c \neq \emptyset$$

Sia $\underline{z} \in B_{\underline{y}}(r) \cap \partial E$ e sia ρ la distanza di \underline{z} dalla frontiera di $B_{\underline{y}}(r)$. Prendiamo ora $B_{\underline{z}}(r')$ con $r' < \rho$. Siccome $\underline{z} \in \partial E$, succede che $B_{\underline{z}}(r') \cap E \neq \emptyset$ e $B_{\underline{z}}(r') \cap E^c \neq \emptyset$ ossia $\underline{y} \in \partial E$.

5) Sia $E \subset \mathbb{R}$, $E = \{x \in \mathbb{R} : x = \frac{1}{n}, n \in \mathbf{N}\}$. Ogni punto è isolato ed inoltre $E' = \{0\}$. Ne segue $\partial E = E \cup \{0\}$.

6) È chiaramente falsa. Sia $E = \{0\}$. Ebbene $\overset{\circ}{E} = \emptyset$ ma $\partial E = \{0\}$.

• Sia dato un insieme E . Dire se $(\overline{E}) = \overline{(\overset{\circ}{E})}$. In caso contrario fornire un esempio.

Risposta È falso. Sia $E = \mathbf{Q} \subset \mathbb{R}$. Ebbene $\overset{\circ}{E} = \emptyset$ mentre $\overline{E} = \mathbb{R}$.

• Dunque $\overline{E} = E \cup E' = E \cup \partial E$. Inoltre i) $\overline{E} = \overset{\circ}{E} \cup \partial E$ e ii) $\overline{E} = \overset{\circ}{E} \cup E'$. Una delle ultime due è sbagliata. Trovare quale e perché. La ii) è sbagliata in quanto non vi sono compresi i punti isolati.

Esercizio Dimostrare che $\partial \overline{E} = \partial E$ oppure dare degli esempi che contraddicono l'affermazione.

Dimostrazione Abbiamo $\partial \overline{E} = \overline{(\overset{\circ}{E})} \setminus \overset{\circ}{E} = \overline{E} \setminus \overset{\circ}{E} \subset \overline{E} \setminus \overset{\circ}{E} = \partial E$ da cui $\partial \overline{E} \subset \partial E$. L'affermazione opposta è falsa. Sia $E = \mathbf{Q}$ e quindi $\overline{\mathbf{Q}} = \mathbb{R}$ e quindi $\partial \overline{E} = \emptyset$. D'altra parte $\partial E = \mathbb{R}$.

Esercizio Dimostrare che $(E')' = E'$ oppure trovare un controesempio.

Risposta È falsa. Vera è $(E')' \subset E'$ e ciò segue facilmente dalla definizione. Chiaramente è falsa $(E')' \supset E'$. Sia $E = \{x \in \mathbb{R} : x = \frac{1}{n}, n \in \mathbf{N}\}$. $E' = \{0\}$ e $(E')' = \emptyset$.

Esercizio Dimostrare che $E' = \overline{E'}$ ossia E' è chiuso.

Dimostrazione Sia $\{x_n\}$ con $x_n \in E'$ e supponiamo che $x_n \rightarrow y$. In tal modo $y \in \overline{E'}$. Per definizione, dentro $B_{x_n}(r)$ c'è per ogni r un elemento di E diverso da x_n , diciamo x'_n . È chiaro che $x'_n \rightarrow y$ ossia $y \in E'$ da cui la tesi

Una seconda dimostrazione è la seguente. Sappiamo che $E' = \overset{\circ}{E} \cup \partial E \setminus \{\text{punti isolati di } E\} = \overline{E} \setminus \{\text{punti isolati di } E\}$. Quindi $\overline{\overline{E} \setminus \{\text{punti isolati di } E\}} = \overline{E} \setminus \{\text{punti isolati di } E\} = E'$

Esercizio Dato l'insieme $E = \{x \in \mathbb{R} : x = \frac{m}{1+nm}, n, m \in \mathbf{N}\}$. Trovare E' , ∂E , $\overset{\circ}{E}$, $(E)'$, \overline{E}

Risposta $E' = \{x \in \mathbb{R} : x = \frac{1}{n}, n \in \mathbf{N}\} \cup \{0\}$, $\partial E = E \cup \{0\}$, $\overset{\circ}{E} = \emptyset$, $(E)' = \{0\}$, $\overline{E} = E \cup \{0\}$.

Esercizio Dimostrare che se E' è numerabile allora pure E è numerabile.

Dimostrazione Consideriamo il caso in cui $E \subset \mathbb{R}$. Supponiamo che E non sia numerabile. Se un punto appartiene ad E o è un punto di accumulazione di E o è un punto isolato. Evidentemente solo la seconda è possibile. Facciamo vedere che dato un qualsiasi insieme E , l'insieme dei punti isolati di E è al più numerabile. Sia quindi $\underline{y} \in E$ isolato. Abbiamo $(a, b) \ni y$ e $(a, b) \cap E = \{y\}$. Al posto di (a, b) prendiamo un intervallo aperto $(\alpha_y, \beta_y) \subset (a, b)$ tale che $\alpha_y, \beta_y \in \mathbf{Q}$. Poi definiamo $f: \mathbb{R} \rightarrow \{\text{insieme degli intervalli aperti}\}$, $f(y) = (\alpha_y, \beta_y)$. La funzione è iniettiva. Infatti se $f(y) = f(z)$ allora $(\alpha_y, \beta_y) = (\alpha_z, \beta_z)$ il che implica $y = z$ in quanto, essendo y e z punti isolati, all'interno di (α_y, β_y) non devono esserci altri punti di E all'interno di y e lo stesso per (α_z, β_z) . Siccome l'insieme degli intervalli cui entrambe gli estremi sono razionali è numerabile, è numerabile anche il dominio della funzione ossia la tesi.

Esercizio Dire quali delle seguenti affermazioni è vera e quale falsa. Quelle vere dimostrarle mentre per quelle false fornire un controesempio: 1) $(A \overset{\circ}{\cup} B) = \overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B}$, 2) $(A \overset{\circ}{\cap} B) = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$, 3) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$, 4) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$, 5) $\partial(A \cup B) = \partial A \cup \partial B$, 6) $\partial(A \cap B) = \partial A \cap \partial B$

Esercizio Sia A una famiglia di indici non necessariamente numerabile e sia $\{E_\alpha\}$ una famiglia di insiemi aperti $\overset{\circ}{E}_\alpha = E_\alpha$. Dimostrare $\bigcup_{\alpha \in A} E_\alpha$ è aperto.

Esercizio Sia $\{E_k\}_{k \geq 1}$ una famiglia di aperti. 1) Dimostrare che l'intersezione di un numero finito di aperti è un insieme aperto. 2) dimostrare che $\bigcap_{k \geq 1} E_k$ è aperto ovvero trovare un controesempio.

Sia data ora una funzione $f: E \rightarrow \mathbb{R}$, $f = f(\underline{x})$

Definizione 1.4 Sia $\underline{x}_o \in E'$ e $l \in \mathbb{R}$. Diremo che $\lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{x}_o} f(\underline{x}) = l$ ($f(\underline{x}) \xrightarrow{\underline{x} \rightarrow \underline{x}_o} l$) se

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon : \underline{x} \in B_{\underline{x}_o}(\delta_\varepsilon) \cap E \setminus \{\underline{x}_o\} \Rightarrow |f(\underline{x}) - l| < \varepsilon$$

$$\text{Per } l = +\infty \text{ si ha } \lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{x}_o} f(\underline{x}) = +\infty \text{ se } \forall M \in \mathbb{R} \exists \delta_\varepsilon : \underline{x} \in B_{\underline{x}_o}(\delta_\varepsilon) \cap E \setminus \{\underline{x}_o\} \Rightarrow f(\underline{x}) > M$$

$$\text{Per } l = -\infty \text{ si ha } \lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{x}_o} f(\underline{x}) = -\infty \text{ se } \forall M \in \mathbb{R} \exists \delta_\varepsilon : \underline{x} \in B_{\underline{x}_o}(\delta_\varepsilon) \cap E \setminus \{\underline{x}_o\} \Rightarrow f(\underline{x}) < M$$

Osservazioni i) La scrittura $\underline{x} \in B_{\underline{x}_o}(\delta_\varepsilon) \cap E \setminus \{\underline{x}_o\}$ vuol dire che: $\|\underline{x} - \underline{x}_o\| < \delta_\varepsilon$ e $\underline{x} \in E \setminus \{\underline{x}_o\}$ (qualora $\underline{x}_o \notin E$, l'ultima parte $\setminus \{\underline{x}_o\}$ è superflua. Metterla contempla tutti i casi). ii) $\underline{x} \in B_{\underline{x}_o}(\delta_\varepsilon) \cap E$ tiene conto del fatto che una funzione potrebbe non essere definita in tutto un intorno del punto \underline{x}_o .

Ad esempio si consideri la funzione $f: E \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x_1, x_2) = x_1 x_2$ $E = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^2 : x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, (x_1, x_2) \neq (0, 0)\}$ (il primo quadrante con esclusione dell'origine). iii) Da un punto di vista grafico, $\lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{x}_o} f(\underline{x}) = l$ vuol dire che più ci si avvicina al punto \underline{x}_o e più ci si avvicina al valore l in ordinate (esattamente come nelle funzioni di una variabile). Porre attenzione al fatto che il valore della funzione in \underline{x}_o (che potrebbe neppure esistere se $\underline{x}_o \notin E$) non ha alcuna importanza. iv) Se $E = \mathbb{R}^n$ allora diremo che

$\lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{x}_o} f(\underline{x}) = l$ se $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon : \|\underline{x} - \underline{x}_o\| < \delta_\varepsilon, \underline{x} \neq \underline{x}_o \Rightarrow |f(\underline{x}) - l| < \varepsilon$
 ed analogamente se $l = \pm\infty$ v) La definizione di limite nel caso in cui \underline{x} "va all'infinito" è la seguente: $\lim_{\|\underline{x}\| \rightarrow +\infty} f(\underline{x}) = l$ se $\forall \varepsilon > 0 \exists M_\varepsilon$ t.c. $\{\underline{x} \in \mathbb{R}^n : \|\underline{x}\| > M_\varepsilon\} \cap E \Rightarrow |f(\underline{x}) - l| < \varepsilon$.

Proprietà dei limiti

P1 Il limite, qualora esista, è unico

P2 Se $\lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{y}} f(\underline{x}) = l \in \mathbb{R}$ e $\lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{y}} g(\underline{x}) = l' \in \mathbb{R}$ allora $\lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{y}} (f + g)(\underline{x}) = l + l'$ (la somma dei limiti è il limite della somma)

$l = +\infty, l' = +\infty \Rightarrow l + l' = +\infty, \quad l = -\infty, l' = -\infty \Rightarrow l + l' = -\infty, \quad l = +\infty, l' = -\infty$
 oppure $l = -\infty, l' = +\infty$ allora $l + l'$ è indeterminato se $l \in \mathbb{R}$ e $l' = \pm\infty$ allora $l + l' = \pm\infty$

P3 Se $\lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{y}} f(\underline{x}) = l$ e $\lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{y}} g(\underline{x}) = l'$ allora $\lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{y}} (f \cdot g)(\underline{x}) = l \cdot l'$ (il prodotto dei limiti è il limite del prodotto)

$l = \pm\infty, l' = \pm\infty \Rightarrow l \cdot l' = +\infty, \quad l = \pm\infty, l' = \mp\infty \Rightarrow l \cdot l' = -\infty, \quad l = \pm\infty, l' = 0$ oppure
 $l = 0, l' = \pm\infty$ allora è indeterminata se $l \in \mathbb{R}$ e $l' = \pm\infty$ allora $|l \cdot l'| = +\infty$

P4 Se $\lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{y}} f(\underline{x}) = l$ e $\lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{y}} g(\underline{x}) = l' \neq 0$ allora $\lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{y}} \left(\frac{f}{g}\right)(\underline{x}) = \frac{l}{l'}$ (il quoziente dei limiti è il limite del quoziente)

P5 Siano date $f: E \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} g = g(y)$. Sia $\underline{x}_o \in E'$ un punto in cui la funzione f ammette limite l (finito o infinito) ed inoltre supponiamo che esiste una sfera $B_{\underline{x}_o}(r)$ tale che $f(\underline{x}) \neq l$ per ogni $\underline{x} \in B_{\underline{x}_o}(r)$ (si dice che f è definitivamente diversa da l). Supponiamo inoltre che $\lim_{y \rightarrow l} g(y) = l'$. Allora la funzione $(g \circ f)(\underline{x})$ ammette limite l' in \underline{x}_o ossia $\lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{x}_o} (g \circ f)(\underline{x}) = l'$

P6 $\lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{y}} f(\underline{x}) = l \iff$ per ogni successione $\{\underline{x}_k\}$ tale che $\underline{x}_k \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \underline{y}$ si ha $y_k \stackrel{\text{def}}{=} f(\underline{x}_k) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} l$.

La P6 (conosciuta anche come *Teorema ponte*) implica che se indichiamo con $S \subset E$ un sottoinsieme di E tale che $\underline{y} \in S'$, e se indichiamo con $f|_S$ la restrizione di f a S , deve accadere che $\lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{y}} f|_S = l$

Osservazioni i) Per capire l'importanza in P5 della limitazione $f(\underline{x}) \neq l$ definitivamente, si considerino

$$\text{le due funzioni per } l \neq 1 : f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \text{ e } g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(\underline{x}) = \begin{cases} l & x_1 \geq 0 \\ x_1 + l & x_1 < 0 \end{cases}, \quad g(y) = \begin{cases} 1 & y = l \neq 1 \\ y & y \neq l \end{cases}$$

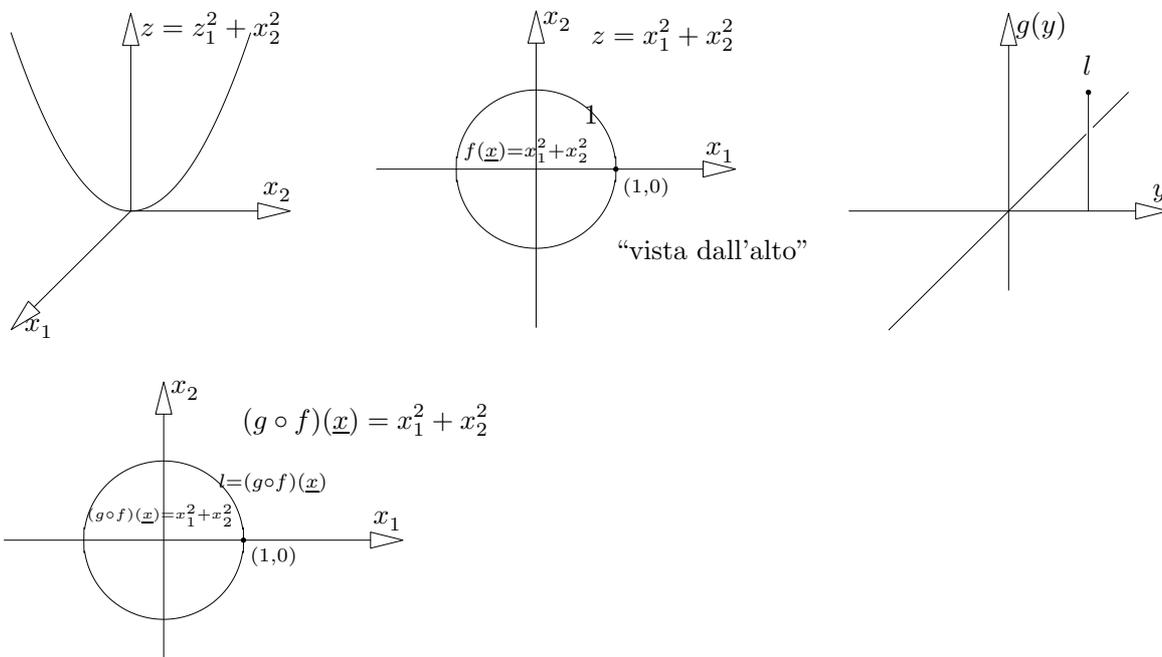
, $g \circ f(\underline{x}) = \begin{cases} 1 & x_1 \geq 0 \\ x_1 + l & x_1 < 0 \end{cases}$. Si vede che $f(\underline{x})$ ammette limite in ogni punto e $g(y)$ ammette limite

per $y \rightarrow l$ e vale l . f però viola la condizione di essere *definitivamente* diversa dal valore l ed infatti la funzione $g \circ f$ non ammette limite in nessun punto che sia del tipo $(0, x_2)$

ii) Un altro esempio, anche più semplice del precedente, è dato da $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ e $g(y) = \begin{cases} l & y = 1 \\ y & y \neq 1 \end{cases}$ con $l \neq 1$. Si ottiene $(g \circ f)(x_1, x_2) = \begin{cases} l & x_1^2 + x_2^2 = 1 \\ x_1^2 + x_2^2 & x_1^2 + x_2^2 \neq 1 \end{cases}$. Come si vede la funzione

$g \circ f$ ammette limite in tutti i punti tranne quelli della circonferenza di raggio 1. Se infatti prendiamo un sfera $B_{\underline{x}_o}(r)$ dove $(x_o, y_o) = (\cos \vartheta, \sin \vartheta)$ accade che se $\underline{x} \in B_{\underline{x}_o}(r)$ ma $\underline{x} \neq (\cos \vartheta, \sin \vartheta)$ allora

$(g \circ f)(\underline{x}) = x_1^2 + x_2^2 \stackrel{\text{def}}{=} \|\underline{x}\|^2$ e per $\underline{x} \rightarrow \underline{x}_o$, $f(\underline{x}) \rightarrow 1$. Se però prendiamo $\underline{x} \in B_{\underline{x}_o}(r)$ e $(x_1, x_2) = (\cos \vartheta, \sin \vartheta)$ allora $(g \circ f)(\underline{x}) \equiv l$. Il limite dunque non esiste nei punti della circonferenza di raggio 1. La ragione è dovuta al fatto che, dato un qualsiasi punto \underline{x} con $x_1^2 + x_2^2 = 1$, non è vero che la funzione $f(x_1, x_2) = \|\underline{x}\|^2$ è *definitivamente* diversa dal valore $\|\underline{x}_o\|^2$ in un intorno di \underline{x}_o . Infatti $f(\|\underline{x}_o\| \cos \vartheta, \|\underline{x}_o\| \sin \vartheta) = \|\underline{x}_o\|^2$ per qualsiasi valore di ϑ .



È chiaro che se si fosse definita $g(y) = \begin{cases} l & y = y_o \\ y & y \neq y_o \end{cases}$ con $l \neq y_o$ e $y_o > 0$, il resto tutto uguale, la

nuova funzione $g \circ f$ non avrebbe ammesso limite sull'insieme $x_1^2 + x_2^2 = y_o$. D'altro canto sia $f(\underline{x})$ che $(g \circ f)(\underline{x})$ ammettono limite nel punto $\underline{x} = (0, 0)$ in quanto $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ è definitivamente diversa dal valore zero in un qualsiasi intorno dell'origine privato dell'origine stessa.

iii) Tali esempi sono delle generalizzazioni di esempi analoghi per funzioni di una variabile. Si consideri

$$g(x) = \begin{cases} x & x \neq 1 \\ 2 & x = 1 \end{cases}, \quad f(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ x + 1 & x \leq 0 \end{cases}, \quad (g \circ f)(x) = \begin{cases} x + 1 & x \leq 0 \\ 2 & x > 0 \end{cases}$$

Dimostrazione Dimostriamo la P1. Supponiamo che $l' \neq l$ ed entrambi finiti. Abbiamo $0 = |f(\underline{x}) -$

$f(\underline{x}) = |(f(\underline{x}) - l') + (l' - l) + (l - f(\underline{x}))| \geq |l' - l| - |(f(\underline{x}) - l')| - |(f(\underline{x}) - l)|$. Ora scegliamo $\underline{x} \in B_{\underline{x}_o}(\delta_{\frac{|l-l'|}{4}})$ e quindi si ottiene $0 \geq |l' - l| - \frac{1}{2}|l' - l| = \frac{1}{2}|l' - l|$ che è impossibile

Sia ora $l' = +\infty$ mentre l è finito. Abbiamo $f(\underline{x}) = (f(\underline{x}) - l) + l$. Ora per $\underline{x} \in B_{\underline{x}_o}(\delta_A)$, $A > 0$, abbiamo $|f(\underline{x}) - l| < A$ e quindi $|f(\underline{x})| \leq A + |l|$. Ma questo è impossibile in quanto essendo $l' = +\infty$, $\underline{x} \in B_{\underline{x}_o}(\delta_M)$ implica $f(\underline{x}) > M$. Quindi all'interno del più piccolo fra $B_{\underline{x}_o}(\delta_A)$ e $B_{\underline{x}_o}(\delta_M)$ abbiamo $|f(\underline{x})| \leq A + |l|$ e contemporaneamente $f(\underline{x}) > M$.

Dimostrazione di P6 Supponiamo che $\lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{x}_o} f(\underline{x}) = l \in \mathbb{R}$ e sia $\{x_k\}$ una successione tale che $\underline{x}_k \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \underline{x}_o$. Sappiamo che data una sfera $B_{\underline{x}_o}(\delta_\varepsilon)$, se k_o è abbastanza grande, $\underline{x}_k \in B_{\underline{x}_o}(\delta_\varepsilon)$ per ogni $k > k_o$ e quindi $|f(\underline{x}_k) - l| < \varepsilon$. Viceversa supponiamo ora che $\underline{y}_k \stackrel{\text{def}}{=} f(\underline{x}_k) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} l$. per ogni successione $\{\underline{x}_k\}$ tale che $\underline{x}_k \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \underline{x}_o$. Procediamo per assurdo e supponiamo che il limite della funzione non sia l . Vuol dire che $\exists \varepsilon > 0$ t.c. $\forall \delta > 0 \exists \underline{x}_\delta \in B_{\underline{x}_o}(\delta) \cap E \setminus \{\underline{x}_o\}$ t.c. $|f(\underline{x}_\delta) - l| \geq \varepsilon$. Prendiamo allora la successione $\{\delta_{\frac{1}{n}}\}$ e corrispondentemente la successione $\{\underline{x}_n\} \stackrel{\text{def}}{=} \underline{x}_{\frac{1}{n}}$. Si ha $\underline{x}_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \underline{x}_o$ ma corrispondentemente abbiamo $|f(\underline{x}_n) - l| \geq \varepsilon$ e questo è in contrasto con il fatto che $\underline{y}_k = f(\underline{x}_k) \rightarrow l$

Dimostrazione di P5. Per ipotesi sappiamo che $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon$ t.c. $|y - l| < \delta_\varepsilon$ $y \neq l \Rightarrow |f(y) - l'| < \varepsilon$ e che $\forall \bar{\varepsilon} > 0 \exists \bar{\delta}_\varepsilon: \underline{x} \in B_{\underline{x}_o}(\bar{\delta}_\varepsilon) \cap E \setminus \{\underline{x}_o\} \Rightarrow |f(\underline{x}) - f(\underline{x}_o)| < \bar{\varepsilon}$ e $f(\underline{x}) \neq l$ definitivamente. Ora prendiamo $\underline{x} \in B_{\underline{x}_o}(\bar{\delta}_\varepsilon) \cap E \setminus \{\underline{x}_o\}$ e ne consegue che $|g(f(\underline{x})) - l'| < \varepsilon$. Il fatto che $f(\underline{x}) \neq l$ definitivamente implica che l'argomento di $g(y)$ sarà definitivamente diverso da l' come richiesto nella definizione di limite.

Esempi

E1 Sia data la funzione $f: E \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(\underline{x}) = \begin{cases} x_1^2 + x_2^2 & x_2 < 0 \\ 1 & x_2 = 0 \end{cases}$ $E' = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^2: x_2 \leq 0\}$.

Prendiamo un punto \underline{y} interno a E . Chiaramente il limite in \underline{y} si può fare e vale $y_1^2 + y_2^2$. Sia ora $\underline{y} \in \partial E$. Anche in questo caso si può fare il limite e vale $y_1^2 + y_2^2$.

E2 $f(\underline{x}) = \begin{cases} x_1 + \sin \frac{1}{x_2} & x_2 \neq 0 \\ 1 & x_2 = 0 \end{cases}$ In questo caso non si può fare il limite nei punti con $x_2 =$

0 a causa della presenza di $\sin \frac{1}{x_2}$. La dimostrazione di ciò fa uso della proprietà P6. Sia infatti $\{\underline{x}_k\} = \{(a, \frac{1}{\frac{\pi}{2} + k\pi})\}$ una successione tale $\underline{x}_k \rightarrow (a, 0)$. La funzione sulla successione vale $f(a, (x_2)_k) = a + 1$ e quindi $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(a, (x_2)_k) = a + 1$. Se d'altro canto prendessimo un'altra successione $\{\underline{y}_k\} = \{(a, \frac{1}{\frac{3\pi}{2} + k\pi})\}$, avremmo $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(a, (y_2)_k) = a - 1$. Poiché $\underline{y}_k \rightarrow (a, 0)$ ne segue che la funzione non ammette limite in un qualsiasi punto $(a, 0)$.

E3 $f(x_1, x_2) = \frac{x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2}$ il cui dominio è $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ e si voglia sapere in quali punti la funzione ammette limite. Se il punto (y_1, y_2) è diverso dall'origine, certamente la funzione ammette limite $l = \frac{y_1 y_2}{y_1^2 + y_2^2}$. Questo accade per i teoremi generali sui limiti di funzioni scritti prima. Basta osservare che $x_1 x_2$ e $x_1^2 + x_2^2$ sono polinomi e che fuori dall'origine $x_1^2 + x_2^2 \neq 0$. Nell'origine quest'ultima condizione cade e quindi non si può applicare la proprietà P4). Quando non è possibile usare teoremi generali bisogna andare ad investigare con dei conti specifici il comportamento della funzione. Essendo la funzione il rapporto di due polinomi aventi uguale grado è ragionevole aspettarsi che la funzione non ammetta limite. Ed infatti se consideriamo le infinite restrizioni (ne basterebbero due) $f(x, mx) = \frac{m}{1+m^2}$ vediamo che il limite della funzione dipende da m e quindi non può esistere.

Limiti $\underline{x} \rightarrow \infty$.

Sia $f: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ con D illimitato. Diciamo che

$$\lim_{\underline{x} \rightarrow \infty} f(\underline{x}) = l \in \mathbb{R} \text{ se } \forall \varepsilon \exists r: \underline{x} \in \{\|\underline{x}\| > r\} \cap D \implies |f(\underline{x}) - l| < \varepsilon$$

Se invece $l = +\infty$ allora

$$\lim_{\underline{x} \rightarrow \infty} f(\underline{x}) = +\infty \text{ se } \forall M > 0 \exists r: \underline{x} \in \{\|\underline{x}\| > r\} \cap D \implies f(\underline{x}) > M$$

Se $l = -\infty$

$$\lim_{\underline{x} \rightarrow \infty} f(\underline{x}) = -\infty \text{ se } \forall M < 0 \exists r: \underline{x} \in \{\|\underline{x}\| > r\} \cap D \implies f(\underline{x}) < M$$

Esercizio Sia $\underline{x}_0 \in \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{R}^2$ (ossia bisogna fare il limite all'infinito). Si dica quale delle seguenti due affermazioni è vera (eventualmente tutte e due):

- 1) $E = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^2 \mid x > a, y > a, a > 0\}$ $x^2y: E \rightarrow \mathbb{R}$ $\lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{x}_0} x^2y = +\infty$
- 2) $E = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y > 0\}$ $x^2y: E \rightarrow \mathbb{R}^2$ $\lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{x}_0} x^2y = +\infty$

Risposta

Cominciamo da 1). Detti $\mathcal{V}_M = \{z \in \mathbb{R}^2 \mid z > M, M > 0\}$, $\mathcal{U}_r = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \|\underline{x}\| > r, r > 0\}$, dobbiamo mostrare che

$$\forall M > 0 \exists r > 0 \mid \underline{x} \in \mathcal{U}_r \cap E \implies x^2y \in \mathcal{V}_M \text{ ossia } x^2y > M.$$

$$x^2y \geq C\sqrt{x^2 + y^2}, \quad (C \text{ da calcolare})$$

Eleviamo al quadrato $x^4y^2 = \frac{1}{2}x^4y^2 + \frac{1}{2}x^4y^2 \geq C^2(x^2 + y^2)$ per cui

$$\frac{1}{2}x^4y^2 \geq C^2x^2 \iff \frac{1}{2}x^2y^2 \geq C^2$$

e ciò è implicato da

$$\frac{1}{2}(xy)^2 \geq \frac{a^4}{2} \geq C^2 \iff C \leq a^2/\sqrt{2}$$

L'altra equazione ci dà

$$\frac{1}{2}x^4y^2 \geq C^2y^2 \iff \frac{1}{2}x^4 \geq C^2$$

ed anche qui operiamo

$$\frac{1}{2}x^4 \geq \frac{1}{2}a^4 \geq C^2 \iff C \leq a^2/\sqrt{2}$$

Abbiamo ottenuto che per $x, y \geq a > 0$ e per $C \leq a^2/\sqrt{2}$ si ha

$$x^2y \geq C\sqrt{x^2 + y^2}$$

Ne segue

$$x^2y \geq C\sqrt{x^2 + y^2} > M \implies r \geq \max\{M/C, a\} \geq \max\{M\sqrt{2}/a^2, \sqrt{2}a\}$$

Si può notare come $r = r(a, M) \rightarrow +\infty$ per $a \rightarrow 0$ per ogni valore positivo di M . Questo fatto ci dice che il secondo limite è falso. Prendiamo le due restrizioni di f determinate dai sottoinsiemi di E

$$E_1 \subset E, \quad E_1 = \{\underline{x} \in E: x = y\}, \quad E_2 = \{\underline{x} \in E: y = 1/x^2\}$$

Chiaramente $\lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{x}_0} f|_{E_1} = +\infty$, $f|_{E_2}(\underline{x}) \equiv 1$ per cui il limite vale 1. La conclusione è che il limite in 2) non esiste.

1 Continuità

Sia data sempre $f: E \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e prendiamo $\underline{x}_0 \in E$. Se \underline{x}_0 è un punto isolato di $E^{(1.1)}$ allora per definizione la funzione è continua.

Definizione 1.5 Se $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon : \underline{x} \in B_{\underline{x}_0}(\delta_\varepsilon) \cap E \Rightarrow |f(\underline{x}) - f(\underline{x}_0)| < \varepsilon$ allora si dice che la funzione è continua in \underline{y}

Osservazioni *i)* rispetto alla definizione di limite le differenze sono due. La prima è che $f(\underline{y})$ (presente al posto di l) deve essere finito. La seconda è che stavolta si considera una sfera aperta con centro in \underline{x}_0 senza escludere \underline{x}_0 stesso. *ii)* se una funzione è continua in un punto ammette di certo limite in quel punto *iii)* Se una funzione è continua in ogni punto del suo dominio è detta *continua*

Le proprietà P1–P6 si estendono alle funzioni continue. Per quanto riguarda la P5 è chiaro che non ha senso dire che f è definitivamente diversa da $f(\underline{x}_0)$

Esempi

E1 Sia data la funzione di una variabile $f: E \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} f = f(x)$ e consideriamola come funzione di un certo numero n di variabili. Dunque abbiamo una funzione $F: E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $F(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_1)$. È evidente che se la funzione $f(x_1)$ è continua in x' , la funzione $F(\underline{x})$ è continua nell'insieme $\{x'\} \times \mathbb{R}^{n-1}$.

E2 Con l'esempio E1) e le proprietà P2) e P3) dei limiti (estendibili alle funzioni continue) si dimostra che i polinomi di n variabili sono funzioni continue. Sia infatti $P(\underline{x}) = \sum_{k_1=N_1}^{M_1} \sum_{k_2=N_2}^{M_2} a_{k_1, k_2} x_1^{k_1} x_2^{k_2}$ un polinomio di due variabili (con un numero di variabili maggiori è lo stesso). Con la P2 dimostriamo che se ciascun elemento $a_{k_1, k_2} x_1^{k_1} x_2^{k_2}$ è continuo, tutta la somma è continua. Con la P3 dimostriamo che se $x_1^{k_1}$ e $x_2^{k_2}$ sono continue anche il prodotto lo è. Ora i monomi appena scritti sono continui grazie all'esempio E1).

E3 la proprietà P5) ci consente di dire che molte (quasi tutte) le funzioni che incontreremo sono continue. Ad esempio la funzione $f(x_1, x_2): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} = \sin(x_1 x_2^2)$ è continua in tutto il dominio. Così pure la funzione $f(x_1, x_2, x_3): \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} f(x_1, x_2, x_3) = e^{x_1 x_2^2 x_3^3}$.

E4 la proprietà P6 è utile nel dimostrare quando una funzione non è continua in un punto. Sia data ad

esempio la funzione $f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2} & (x_1, x_2) \neq (0, 0) \\ 0 & (x_1, x_2) = (0, 0) \end{cases}$ e se ne voglia studiare la continuità nel

suo dominio che è \mathbb{R}^2 . Se il punto (y_1, y_2) è diverso dall'origine, certamente la funzione è continua. Ciò

(1.1) Dicesi \underline{y} punto isolato di E se esiste una sfera aperta contenente \underline{y} e nessun altro punto di E . Un punto isolato di E appartiene a ∂E

deriva dall'esempio E3 scritto prima osservando che $l = f(x_1, x_2)$. Nell'origine, non esistendo il limite, la funzione non può essere continua.

Vedremo in seguito che sarà necessario considerare *funzioni vettoriali* ossia funzioni del tipo $\underline{f}: E \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ e $m > 1$. Le definizioni di limiti e continuità sono le stesse solo che ora, nello spazio di arrivo della funzione, vanno considerati sfere aperte e non più intervalli aperti. Ad esempio $\lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{x}_o} \underline{f}(\underline{x}) = \underline{l}$ $\underline{y} \in E'$, vuol dire che $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon : \underline{x} \in B_{\underline{x}_o}(\delta_\varepsilon) \cap E \setminus \{\underline{x}_o\} \Rightarrow \|\underline{f}(\underline{x}) - \underline{l}\| < \varepsilon$ e per la continuità accade lo stesso^(1,2). Si dimostra che la nozione di limite è equivalente a dimostrare che $\lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{x}_o} f_k(\underline{x}) = l_k$ per ogni k ossia la convergenza di $\underline{f}(\underline{x})$ verso \underline{l} avviene *componente per componente*. Abbiamo in altre parole il seguente

Teorema 1.1 $\lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{x}_o} \underline{f}(\underline{x}) = \underline{l}$ se e solo se $\lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{x}_o} f_k(\underline{x}) = l_k$ per ogni k

Dimostrazione Sia $\lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{x}_o} \underline{f}(\underline{x}) = \underline{l}$. Poiché $|f_k(\underline{x}) - l_k| \leq \|\underline{f}(\underline{x}) - \underline{l}\|$ segue che $\underline{x} \in B_{\underline{x}_o}(\delta_\varepsilon) \cap E \setminus \{\underline{x}_o\} \Rightarrow |f_k(\underline{x}) - l_k| < \varepsilon$. Viceversa supponiamo che $\lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{x}_o} f_k(\underline{x}) = l_k$ per ogni k ossia $\forall \frac{\varepsilon}{n} > 0 \exists \delta_{\frac{\varepsilon}{n}}^{(k)} : \underline{x} \in B_{\underline{x}_o}(\delta_{\frac{\varepsilon}{n}}^{(k)}) \cap E \setminus \{\underline{x}_o\} \Rightarrow |f_k(\underline{x}) - l_k| < \frac{\varepsilon}{n}$ (si noti che $\delta_{\frac{\varepsilon}{n}}^{(k)}$ dipende da k). Si prenda ora $\min_{1 \leq k \leq n} \delta_{\frac{\varepsilon}{n}}^{(k)} \stackrel{\text{def}}{=} \delta_\varepsilon$. Per $\underline{x} \in B_{\underline{x}_o}(\delta_\varepsilon) \cap E \setminus \{\underline{x}_o\}$ abbiamo $\|\underline{f}(\underline{x}) - \underline{l}\| \leq \sum_{k=1}^n |f_k(\underline{x}) - l_k| < n \frac{\varepsilon}{n} = \varepsilon$. ■

Ricordiamo qui la definizione di insieme compatto (K) di \mathbb{R}^n . Un insieme $K \subset \mathbb{R}^n$ è detto compatto se da ogni successione $\{\underline{x}^{(k)}\} \subset K$ si può estrarre una sottosuccessione $\{\underline{x}^{(n_k)}\}$ convergente in K ossia tale che $\lim_{k \rightarrow +\infty} \underline{x}^{(n_k)} = \underline{y} \in K$. Questa è solo una delle definizioni di insieme compatto in \mathbb{R}^n . Un'altra possibile è quella che segue. Sia $\{O_\alpha\}$ una famiglia (non necessariamente numerabile) di aperti per cui $K \subset \cup_\alpha O_\alpha$. La famiglia di aperti è detta un ricoprimento di K . Ebbene si ha

Proposizione 1. *Un insieme è compatto se da ogni ricoprimento costituito da insiemi aperti si può estrarre un sottoricoprimento finito.*

Una seconda proposizione è

Proposizione 2. *In \mathbb{R}^n un insieme è compatto (assumiamo la compattezza per successioni) se e solo se è chiuso e limitato.*

Dimostrazione Sia $K \subset \mathbb{R}^n$ compatto. Facciamo vedere che è limitato. Supponiamo che non lo sia e quindi $\forall n \in \mathbb{N} \exists \underline{x}_n : \|\underline{x}_n\| \geq n$. Costruiamo allora una successione di punti in modo tale che $\|\underline{x}_n\| \geq n$ e $\|\underline{x}_j - \underline{x}_i\| \geq 1$ per ogni i, j . Dalla successione così ottenuta e che chiamiamo $\{\underline{x}_n\}$, non si può estrarre nessuna sottosuccessione *convergente* dal momento che tutti i punti della successione distano fra loro almeno 1. Facciamo ora vedere che K è chiuso. Sia quindi $\underline{x} \in K'$ e quindi esiste una successione $\{\underline{x}_n\} \subset K$ tale che $\underline{x}_n \rightarrow \underline{x}$. Essendo K compatto, da $\{\underline{x}_n\}$ possiamo estrarre una sottosuccessione $\{\underline{x}_{n_k}\}$ che converge ad un punto di K . Ma allora anche la successione converge allo stesso punto ossia $\underline{x} \in K$ in quanto se una successione converge, tutte le sue sottosuccessioni convergono allo stesso limite.

Facciamo vedere ora che se un insieme K è chiuso e limitato allora è compatto. Sia quindi $\{\underline{x}_n\} \subset K$ con K chiuso e limitato. Sia $\{\underline{x}_{n_k}\} \subset \{\underline{x}_n\}$ una sottosuccessione di $\{\underline{x}_n\}$. Per Bolzano–Weierstrass, essendo K limitato, la sottosuccessione $\{\underline{x}_{n_k}\}$ converge ad un valore che chiamiamo \underline{x} che quindi è punto di accumulazione di K . Siccome K è chiuso $\underline{x} \in K'$ e quindi K è compatto.

^(1,2) È chiaro che $\|\underline{f}(\underline{x}) - \underline{l}\| = (\sum_{k=1}^m (f_k(\underline{x}) - l_k)^2)^{1/2}$

Esercizio*** Sia dato un insieme compatto. Si individui una famiglia numerabile di insiemi aperti O_k tale che: 1) $K \subset O_k$, $O_{k+1} \subset O_k$, $\bigcap_{k=1}^{\infty} O_k = K$

Esercizio*** Sia E un insieme aperto in \mathbb{R}^n . Dimostrare che esiste una successione di insiemi compatti $\{K_i, i \geq 1\}$ tale che: $K_i \subset E$, $K_i \subset K_{i+1}$, $\bigcup_{i \geq 1} K_i = E$

Teorema 1.2 Sia $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua e $K \subset \mathbb{R}^n$ un insieme compatto. Allora $Im(f)$ è un sottoinsieme compatto di \mathbb{R}

Dimostrazione Si consideri una successione $\{\underline{y}^{(k)}\} \subset Im(f)$ e quindi $\underline{y}^{(k)} = f(\underline{x}^{(k)})$. Poi si consideri $\{\underline{x}^{(k)}\} \subset K$. Essendo K compatto si può estrarre una sottosuccessione $\{\underline{x}^{(n_k)}\}$ convergente a $\underline{\xi} \in K$. Dalla continuità della funzione f segue che $f(\underline{x}^{(n_k)}) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} f(\underline{\xi})$ ed inoltre $\underline{\xi} \in Im(f)$ da cui la tesi. ■

Esercizio Sia data un funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Dimostrare oppure trovare un controesempio all'affermazione: la controimmagine di un insieme compatto è un insieme compatto

Su [BD1] gli esercizi da studiare sono tutti quelli del capitolo 7.1. Per quel che riguarda gli *esercizi in rete* quelli da studiare sono: **2.7** tutti, **4.7** tutti. Non è strettamente necessario studiarli tutti ma un numero sufficiente per poterne risolvere senza l'ausilio delle soluzioni. Su [BPS1] gli esercizi sono: esempio 4.1 pag. 353, esempi 4.2, 4.3 pag. 354, esercizi da 13 a 18 a pag. 355–356. In [BPS2] gli esercizi sono: 1) 2.1 e 2.2 pag.413–414, 2) pag.415–416, 3)

2 derivabilità , differenziabilità

Il materiale è essenzialmente preso da [BD1]. Le pagine sono da 306 a 335. Il libro dà una definizione di differenziabilità a pagina 313 in cui introduce il vettore \underline{a} (fare attenzione in quanto nella formula (7.18) vi è un \leq , certamente errore di stampa). Al suo posto deve esservi un o -piccolo. Successivamente nel corollario 7.1 gli autori dimostrano che $\underline{a} = \underline{\partial}f(\underline{x})$ ($\underline{\partial}f(\underline{x})$ è da loro chiamato $\nabla f(\underline{x})$) come conseguenza della *ii)* del teorema. Per questa ragione, nelle presenti note, si è partiti con $\underline{\partial}f(\underline{x})$ da subito nella definizione di differenziabilità. Il teorema 7.2 è qui suddiviso in: la parte *i)* corrisponde al nostro Teorema 2.2. La *iii)* corrisponde al Teorema 2.1. Il Teorema 2.4 (di Lagrange) corrisponde alla parte *ii)* del Teorema 7.4 di [BD1] e il corollario 2.1 corrisponde alla prima osservazione di pag.319. Nell'esercizio a pag. 335, deve esservi $-\frac{1}{6}$ al posto di $+\frac{1}{6}$ (errore poi corretto in [BD2]).

Consideriamo una funzione $f: E \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sia $\underline{y} \in \overset{\circ}{E}$ che supponiamo essere non vuoto.

Definizione 2.1 Il limite $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t}(f(x_1, x_2, \dots, x_{j-1}, x_j+t, x_{j+1}, \dots, x_n) - f(\underline{x}))$ è la derivata parziale rispetto a x_j $1 \leq j \leq n$ della funzione calcolata nel punto \underline{x} . Una funzione è derivabile in \underline{x} se ammette tutte le derivate parziali in \underline{x}

La derivata parziale j -esima può essere scritta anche come $\partial_j f(\underline{x})$, $\partial_{x_j} f(\underline{x})$, $f_{x_j}(\underline{x})$, $\frac{\partial f}{\partial x_j}(\underline{x})$, $D_{e_j} f(\underline{x})$. Il vettore dato da tutte le n derivate parziali verrà scritto come $\underline{\partial}f(\underline{x})$ ed è detto *gradiente* (in \underline{x}). Le derivate parziali sono un caso particolare delle *derivate direzionali*

Definizione 2.2 Dato il vettore $\underline{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ tale che $v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2 = 1$. Il limite $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t}(f(x_1 + v_1 t, x_2 + v_2 t, \dots, x_n + v_n t) - f(\underline{x}))$ dicesi *derivata direzionale della funzione nel punto* \underline{x}

Osservazioni *i)* Abbreviando si scrive $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t}(f(\underline{x} + t\underline{v}) - f(\underline{x}))$. La derivata direzionale in \underline{x} (che si badi bene è un numero reale e non un vettore) si indica talvolta con $D_{\underline{v}}f(\underline{x})$. Con $\underline{v} = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ (1 al j -esimo posto) si ottiene f_{x_j} .

L'espressione $\underline{x} + t\underline{v}$ rappresenta l'equazione parametrica della retta passante per \underline{x} ed avente direzione data da \underline{v} . Quindi, al variare di t , $f(x_1 + v_1 t, x_2 + v_2 t, \dots, x_n + v_n t) \stackrel{\text{def}}{=} f(\underline{x} + t\underline{v})$ è l'insieme dei valori delle ordinate della funzione quando ci si muove sulla retta in questione.

Definizione 2.3 Una funzione è differenziabile in \underline{x} se accade che $\lim_{\underline{h} \rightarrow \underline{0}} \frac{1}{\|\underline{h}\|}(f(\underline{x} + \underline{h}) - f(\underline{x}) - \underline{\partial}f(\underline{x}) \cdot \underline{h}) = 0$. Se una funzione è differenziabile in ogni punto del suo dominio si dice che è differenziabile

Se una funzione è differenziabile in \underline{x} vuol dire che $f(\underline{x} + \underline{h}) = f(\underline{x}) + \underline{\partial}f(\underline{x}) \cdot \underline{h} + o(\|\underline{h}\|)$. Il limite nella definizione 2.1 è n -dimensionale sul piano \underline{h} . È importante notare che per funzioni di più variabili il concetto di derivabilità è ben distinto da quello di differenziabilità. In particolare sussiste il

Teorema 2.1 Se una funzione è differenziabile in \underline{x} ammette tutte le derivate direzionali e quindi è derivabile. Inoltre la derivata direzionale è data da $D_{\underline{v}}f(\underline{x}) = \underline{\partial}f(\underline{x}) \cdot \underline{v}$

Dimostrazione Essendo la funzione differenziabile abbiamo $f(\underline{x} + \underline{h}) - f(\underline{x}) = (\underline{\partial}f(\underline{x})) \cdot \underline{h} + o(\|\underline{h}\|)$. Prendendo $\underline{h} = t\underline{v}$ con $\|\underline{v}\| = 1$ otteniamo $f(\underline{x} + \underline{h}) - f(\underline{x}) = t(\underline{\partial}f(\underline{x})) \cdot \underline{v} + o(|t|)$. Se ora si divide tutto per t e si manda t a zero si ottiene: a sinistra $\frac{f(\underline{x} + t\underline{v}) - f(\underline{x})}{t}$ e a destra $\underline{\partial}f(\underline{x}) \cdot \underline{v}$ ■

Osservazione La formula $D_{\underline{v}}f(\underline{x}) = \underline{\partial}f(\underline{x}) \cdot \underline{v}$ ci dice che la direzione del gradiente fornisce la direzione di massima ascesa e discesa. Infatti $\underline{\partial}f(\underline{x}) \cdot \underline{v} \leq \|\underline{\partial}f(\underline{x})\| \cdot \|\underline{v}\| \cos \vartheta$ dove ϑ è l'angolo fra i due vettori.

Il coseno è minore o uguale a 1 e vale 1 esattamente quando \underline{v} è parallelo a $\partial f(\underline{x})$ ed ha lo stesso verso. In tal caso $\underline{\partial f(\underline{x})} \cdot \underline{\partial f(\underline{x})} = \|\underline{\partial f(\underline{x})}\|$. Se invece il verso è opposto allora $\underline{\partial f(\underline{x})} \cdot (-\underline{\partial f(\underline{x})}) = -\|\underline{\partial f(\underline{x})}\|$

Il viceversa non è vero ossia esistono funzioni che sono, ad esempio, derivabili in un punto ma non sono differenziabili nello stesso punto (si guardino le funzioni f_1 e f_2 dell'esercizio 2.1.7). Sussiste anche il seguente

Teorema 2.2 *Se una funzione è differenziabile in \underline{x} allora è ivi continua*

Dimostrazione La stessa di prima osservando che la quantità $f(\underline{x} + \underline{h}) - f(\underline{x})$ tende a zero quando \underline{h} tende a zero. ■

Il Teorema seguente fornisce delle condizioni sufficienti per sapere quando una funzione è differenziabile

Teorema 2.3 *Se una funzione ammette derivate parziali in ogni punto di una sfera aperta contenente \underline{x} ed inoltre tali derivate sono continue in \underline{x} allora la funzione è in quel punto differenziabile*

Dimostrazione Ci mettiamo nel caso di $n = 2$. Dobbiamo far vedere che $\lim_{\underline{h} \rightarrow 0} \frac{1}{\|\underline{h}\|} (f(\underline{x} + \underline{h}) - f(\underline{x}) - \underline{\partial f(\underline{x})} \cdot \underline{h}) = 0$. Scriviamo l'identità $f(\underline{x} + \underline{h}) - f(\underline{x}) - \underline{\partial f(\underline{x})} \cdot \underline{h} = (f(x_1 + h_1, x_2 + h_2) - f(x_1 + h_1, x_2)) + (f(x_1 + h_1, x_2) - f(x_1, x_2)) - \underline{\partial f(\underline{x})} \cdot \underline{h}$. Il teorema del valor medio per funzioni di una variabile dà $f(x_1 + h_1, x_2 + h_2) - f(x_1 + h_1, x_2) = f_{x_2}(x_1 + h_1, \xi_2)h_2$ dove $x_2 < \xi_2 < x_2 + h_2$ e $f(x_1 + h_1, x_2) - f(x_1, x_2) = f_{x_1}(\xi_1, x_2)h_1$ dove $x_1 < \xi_1 < x_1 + h_1$. Riunendo il tutto si ottiene $f_{x_2}(x_1 + h_1, \xi_2)h_2 + f_{x_1}(\xi_1, x_2)h_1 - \underline{\partial f(\underline{x})} \cdot \underline{h} = h_1(f_{x_1}(\xi_1, x_2) - f_{x_1}(x_1, x_2)) + h_2(f_{x_2}(x_1 + h_1, \xi_2) - f_{x_2}(x_1, x_2))$.

Dividiamo il tutto per $\|\underline{h}\|$ e tenendo conto del fatto che $\frac{|h_i|}{\|\underline{h}\|} \leq 1$ $i = 1, 2$, otteniamo $\frac{1}{\|\underline{h}\|} |(f(\underline{x} + \underline{h}) - f(\underline{x}) - \underline{\partial f(\underline{x})} \cdot \underline{h})| \leq |f_{x_1}(\xi_1, x_2) - f_{x_1}(x_1, x_2)| + |f_{x_2}(x_1 + h_1, \xi_2) - f_{x_2}(x_1, x_2)|$

Quest'ultima quantità tende a zero quando $\underline{h} \rightarrow 0$ in virtù della continuità delle derivate parziali. ■

Osservazione i) Come dovrebbe essere chiaro, per funzioni di due o più variabili, la differenziabilità è il concetto importante rispetto alla derivabilità ^(2.1). Si possono dare infatti delle funzioni di due o più variabili che sono derivabili in un punto ma: 1) sono continue oppure non continue; 2) sono continue, derivabili ma non differenziabili. Per alcuni esempi concreti si può consultare gli *esercizi in rete*.

ii) Il teorema 2.3 costituisce una condizione sufficiente (non necessaria) per avere la differenziabilità ossia può aversi una funzione differenziabile ovunque ma le derivate sono discontinue. L'esempio in una

variabile, dove la differenziabilità equivale alla derivabilità, è $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$. In due

variabili è $f(x, y) = \begin{cases} xy \sin \frac{1}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ *iii)* Notare come nell'ipotesi del teorema sia

inevitabile che le derivate prime esistano non solo in \underline{x} ma in una sfera aperta intorno a \underline{x} . *iv)* Una

(2.1) Vale la pena notare che per funzioni di una variabile i concetti di derivabilità e differenziabilità coincidono ossia una funzione è differenziabile se e solo se è derivabile. Per dimostrare l'equivalenza dei due concetti cominciamo a supporre che una funzione di una variabile $f(x)$ sia derivabile in x_0 . Vuol dire che $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$ e quindi $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) + o(1)$ da cui $f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + o(1)(x - x_0)$. Ne segue che $\frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} = o(1)$ e dunque per $x \rightarrow x_0$ si ottiene 0. Se viceversa supponiamo che la funzione è differenziabile in x_0 , la derivabilità segue esattamente come nel caso delle funzioni di più variabili

funzione f ha derivate parziali prime continue in ogni punto di un insieme E si indica con $f \in C^1(E)$

Per le funzioni differenziabili valgono le seguenti proprietà :

P1 $\underline{\partial}(f + g)(\underline{x}) = \underline{\partial}f(\underline{x}) + \underline{\partial}g(\underline{x})$, P2 $\underline{\partial}(f \cdot g)(\underline{x}) = g(\underline{x}) \cdot \underline{\partial}f(\underline{x}) + f(\underline{x}) \cdot \underline{\partial}g(\underline{x})$, P3 $\underline{\partial}(\frac{f}{g})(\underline{x}) = \frac{g(\underline{x}) \cdot \underline{\partial}f(\underline{x}) - f(\underline{x}) \cdot \underline{\partial}g(\underline{x})}{g^2(\underline{x})}$, P4 Sia $f: A \rightarrow (a, b) \subset \mathbb{R}$ ($A = \overset{\circ}{A} \subseteq \mathbb{R}^n$) differenziabile e sia $g: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile. Allora $\underline{\partial}(g \circ f)(\underline{x}) = g'(f(\underline{x}))\underline{\partial}f(\underline{x})$. Notare che dal punto di vista dimensionale, $g'(f(\underline{x}))$ è un numero.

Dal Teorema 2.1 segue che la direzione individuata nel piano \mathbb{R}^n da $\underline{\partial}f(\underline{x})$ è la direzione di massima crescita in quel punto in \underline{x} . Infatti $f(\underline{x} + t\underline{v}) = f(\underline{x}_o) + D_{\underline{v}}f(\underline{x}) + o(|t|)$ e quindi $f(\underline{x} + t\underline{v}) - f(\underline{x}_o) = t\underline{\partial}f(\underline{x}) \cdot \underline{v} + o(|t|)$ e quindi la differenza $f(\underline{x} + t\underline{v}) - f(\underline{x}_o)$ è tanto più grande quanto più grande è $\underline{\partial}f(\underline{x}) \cdot \underline{v}$. Si deve prendere quindi $\underline{v} = \frac{\underline{\partial}f(\underline{x})}{\|\underline{\partial}f(\underline{x})\|}$

Analizzando la definizione 2.1 si vede che quando $\underline{h} \rightarrow \underline{0}$, la grandezza $f(\underline{x}) + \underline{\partial}f(\underline{x}) \cdot \underline{h}$ costituisce la approssimazione alla funzione nell'intorno di \underline{x} a meno di $o(\|\underline{h}\|)$. Se con \underline{h} indichiamo $\underline{x} - \underline{x}_o$, la relazione $z = f(\underline{x}_o) + \underline{\partial}f(\underline{x}_o) \cdot (\underline{x} - \underline{x}_o)$ è l'equazione di un piano passante per il punto $(\underline{x}_o, f(\underline{x}_o))$ e detto *piano tangente*. Si noti l'analogia con le funzioni di una variabile a proposito della retta tangente.

Un'altra caratteristica importante del gradiente è il fatto che esso è *ortogonale alla curve di livello* (si veda il capitolo 5).

A tal proposito va detto che se una funzione è solo derivabile in un punto (ad esempio l'origine) ma non differenziabile, si può certamente definire la quantità $f(\underline{0}) + \underline{\partial}f(\underline{0}) \cdot \underline{h}$. Ciò non vuol dire che esiste il piano tangente in quanto non è verificata la relazione $\lim_{\|\underline{h}\| \rightarrow 0} \frac{f(\underline{h}) - f(\underline{0}) - \underline{\partial}f(\underline{0}) \cdot \underline{h}}{\|\underline{h}\|} = 0$. È questa una delle differenze maggiori rispetto alle funzioni di una variabile perché in quel caso l'esistenza della derivata equivale a $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_o+h) - f(x_o) - f'(x_o)h}{h} = 0$ e quindi si può definire la retta tangente

Si prenda ad esempio la funzione $f(\underline{x}) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \underline{x} \neq \underline{0} \\ 0 & \underline{x} = \underline{0} \end{cases}$ Si può verificare che è continua

nell'origine e che le derivate parziali sono entrambe uguali a zero. Il presunto piano tangente avrebbe quindi equazione $z = 0$. Dovrebbe però essere $\lim_{\|\underline{h}\| \rightarrow 0} \frac{f(\underline{h}) - f(\underline{0}) - \underline{\partial}f(\underline{0}) \cdot \underline{h}}{\|\underline{h}\|} = \lim_{\|\underline{h}\| \rightarrow 0} \frac{h_1 h_2}{h_1^2 + h_2^2} = 0$ e questo è impossibile non appena ci si mette lungo la restrizione $h_1 = h_2$.

Teorema 2.3.1 (della derivata di funzione composta) Data $f: E \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, differenziabile, $E = \overset{\circ}{E}$ e convesso ^(2.2). Sia inoltre $\underline{x}(t): \mathbb{R} \rightarrow A$ un vettore ad n componenti costituito da funzioni derivabili. Allora detta $h(t) = f(x_1(t), \dots, x_n(t)) \doteq f(\underline{x}(t))$, vale la seguente regola

$$h'(t) = \underline{\partial}f(\underline{x}) \cdot \underline{x}'(t)$$

Dimostrazione La differenziabilità ci dà $f(\underline{x}(t+h)) = f(\underline{x}(t)) + \underline{\partial}f(\underline{x}(t)) \cdot (\underline{x}(t+h) - \underline{x}(t)) + o(\|\underline{x}(t+h) - \underline{x}(t)\|)$ Dividiamo per h e mandiamo $h \rightarrow 0$. Otteniamo

$$\frac{f(\underline{x}(t+h)) - f(\underline{x}(t))}{h} = \underline{\partial}f(\underline{x}(t)) \cdot \underline{x}'(t) + \frac{o(\|\underline{x}(t+h) - \underline{x}(t)\|)}{h} \rightarrow \underline{\partial}f(\underline{x}(t)) \cdot \underline{x}'(t)$$

^(2.2) Un insieme $A = \overset{\circ}{A} \subset \mathbb{R}^n$ è convesso se per ogni $\underline{x} \in A$ e $\underline{y} \in A$ il segmento $t\underline{x} + (1-t)\underline{y} \in A$ dove $0 < t < 1$

Teorema 2.4 (del valor medio o di Lagrange) Data $f: E \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, differenziabile, $E = \overset{\circ}{E}$ e convesso. È verificata la relazione $f(\underline{y}) - f(\underline{x}) = \underline{\partial}f(\underline{\xi}) \cdot (\underline{y} - \underline{x})$ dove $\underline{\xi}$ appartiene al segmento congiungente \underline{x} e \underline{y} (indicato con $[\underline{x}, \underline{y}]$)

Dimostrazione Definiamo la funzione $h(t) = f(t\underline{y} + (1-t)\underline{x})$. Si badi che $h(t)$ è una funzione di una variabile. $h(1) = f(\underline{y})$, $h(0) = f(\underline{x})$. h è derivabile e quindi possiamo applicare il Teorema di Lagrange per cui $h(1) - h(0) = h'(\xi) \cdot (1 - 0)$ dove $0 < \tau < 1$. Dal teorema precedente otteniamo $h'(\tau) = \underline{\partial}f(\tau\underline{y} + (1-\tau)\underline{x}) \cdot (\underline{y} - \underline{x})$ e quindi $h(1) - h(0) = \underline{\partial}f(\tau\underline{y} + (1-\tau)\underline{x}) \cdot (\underline{y} - \underline{x})$, $0 < \tau < 1$ da cui il risultato. ■

Corollario 2.1 (del Teorema di Lagrange) Sia $E = \overset{\circ}{E}$ e convesso. Se $\underline{\partial}f(\underline{x}) = \underline{0}$ per ogni $\underline{x} \in E$ allora $f(\underline{x})$ è costante in E .

Dimostrazione Supponiamo che esistano due punti \underline{x} e \underline{y} tali che $f(\underline{x}) \neq f(\underline{y})$. Vuol dire che $0 \neq h(1) - h(0) = \underline{\partial}f(\tau\underline{y} + (1-\tau)\underline{x}) \cdot (\underline{y} - \underline{x}) = 0$ e questo è impossibile. ■

Derivate di ordine superiore

Se la funzione lo consente, una volta derivato, si può derivare altre volte; tante più volte quanto più la funzione è regolare. Avendo cioè le funzioni $f_{x_j}(\underline{x})$, ci si può porre la domanda se le funzioni sono a loro volta derivabili, differenziabili etc.

Definizione 2.4 Se una funzione $f(\underline{x})$ è differenziabile in ogni punto di una sfera aperta contenente il punto \underline{x} e le derivate parziali sono ancora differenziabili in \underline{x} , si dice che la funzione è due volte differenziabile in \underline{x} . Per estensione se una funzione è differenziabile $k-1$ volte in una sfera aperta contenente il punto \underline{x} e le derivate $k-1$ -esime sono differenziabili nel punto \underline{x} si dice che la funzione è k volte differenziabile in \underline{x} . Se le derivate parziali k -esime sono continue in E si dice che $f \in C^k(E)$. Le derivate seconde della funzione $f_{x_i}(\underline{x})$ sono date da $f_{x_i x_1}(\underline{x}), \dots, f_{x_i x_n}(\underline{x})$. Ad esempio $f_{x_i x_j}(\underline{x}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (f_{x_i}(x_1, \dots, x_{j-1}, x_j + t, x_{j+1}, \dots, x_n) - f_{x_i}(x_1, x_2, \dots, x_n))$

Del Lemma di Schwarz diamo due dimostrazioni (sotto due ipotesi diverse). Lo studente/ssa ne studi una, quella che preferisce.

Lemma 2.1 (di Schwarz, prima dimostrazione) Se una funzione ammette derivate parziali seconde miste $f_{x_i x_j}(\underline{x})$, $f_{x_j x_i}(\underline{x})$ continue in un punto interno \underline{y} , esse sono uguali

Dimostrazione $f_{x_i x_j}(\underline{y}) = \lim_{t_j \rightarrow 0} \frac{1}{t_j} (f_{x_i}(\underline{y} + t_j \underline{e}_j) - f_{x_i}(\underline{y})) = \lim_{t_j \rightarrow 0} \lim_{t_i \rightarrow 0} \frac{1}{t_i t_j} (f(\underline{y} + t_j \underline{e}_j + t_i \underline{e}_i) - f(\underline{y} + t_j \underline{e}_j) - (f(\underline{y} + t_i \underline{e}_i) - f(\underline{y})))$. Detta $P(t_i) \stackrel{\text{def}}{=} f(\underline{y} + t_j \underline{e}_j + t_i \underline{e}_i) - f(\underline{y} + t_i \underline{e}_i)$, la quantità dentro i due limiti è $P(t_i) - P(0) = P'(\tau_i) t_i$, $0 < \tau_i(t_i) < t_i$ per il Teorema di Lagrange che possiamo applicare in quanto la funzione è derivabile rispetto a x_i in un intorno del punto \underline{y} . $P'(\tau_i) = t_j (f_{x_i}(\underline{y} + \tau_i \underline{e}_i + t_j \underline{e}_j) - f_{x_i}(\underline{y} + \tau_i \underline{e}_i))$.

Definiamo ora $Q(t_j) \stackrel{\text{def}}{=} f_{x_i}(\underline{y} + \tau_i \underline{e}_i + t_j \underline{e}_j)$ per cui $t_i P'(\tau_i) = t_i (Q(t_j) - Q(0)) = t_j t_i Q'(t_j) = t_i t_j f_{x_i x_j}(\underline{y} + \tau_j \underline{e}_j + \tau_i \underline{e}_i)$. Si usa di nuovo il Teorema di Lagrange in quanto f_{x_i} è a sua volta derivabile in un intorno di \underline{y} ; inoltre abbiamo $0 < \tau_j(t_j) < t_j$. Ora dividiamo tutto per $t_i t_j$ e mandiamo $(t_i, t_j) \rightarrow (0, 0)$ ottenendo $\lim_{(t_i, t_j) \rightarrow (0, 0)} f_{x_i x_j}(\underline{y} + \tau_j \underline{e}_j + \tau_i \underline{e}_i) = f_{x_i x_j}(\underline{y})$ in quanto le derivate miste sono continue in \underline{y} . Ripetendo il ragionamento invertendo t_i e t_j otteniamo l'altra derivata. ■

Osservazioni

i) notare che il limite da eseguire è $(t_i, t_j) \rightarrow (0, 0)$ e non prima $t_j \rightarrow 0$ e poi $t_i \rightarrow 0$ o viceversa. Quest'ultimo limite potrebbe anche non esistere *ii)* Poiché bisogna calcolare $f_{x_i x_j}(\underline{y})$ e quindi eseguire $\frac{\partial f_{x_i}}{\partial x_j}$, si potrebbe pensare che la derivata $f_{x_i}(\underline{x})$ debba essere continua in \underline{y} sulla scorta del teorema per funzioni *di una variabile* secondo cui se una funzione è derivabile in un punto deve essere continua in quel punto. Invertendo il ruolo di i e j , la stessa cosa si può pensare della derivata f_{x_j} dovendoci fare sopra la derivata rispetto a x_i . Così non è e quindi si dia un esempio di funzione di due variabili che verifica le ipotesi del Teorema di Schwarz ma almeno una delle due derivate parziali prime non è continua in \underline{y} . *iii)* non si richiede che la funzione sia differenziabile in \underline{y} né una volta né, tantomeno, due volte. Si dia un esempio quindi di funzione: 1) non differenziabile una volta in \underline{y} per cui vale il teorema 2) differenziabile una volta in un intorno di \underline{y} ma non due volte in \underline{y} per cui vale il teorema.

Lemma 2.1 (di Schwarz, seconda dimostrazione) *Se una funzione è differenziabile due volte in \underline{y} allora $f_{x_i x_j}(\underline{y}) = f_{x_j x_i}(\underline{y})$*

Dimostrazione $f_{x_i x_j}(\underline{y}) = \lim_{t_j \rightarrow 0} \frac{1}{t_j} (f_{x_i}(\underline{y} + t_j \underline{e}_j) - f_{x_i}(\underline{y})) = \lim_{t_j \rightarrow 0} \lim_{t_i \rightarrow 0} \frac{1}{t_i t_j} (f(\underline{y} + t_j \underline{e}_j + t_i \underline{e}_i) - f(\underline{y} + t_j \underline{e}_j) - (f(\underline{y} + t_i \underline{e}_i) - f(\underline{y}))).$ Detta $P(t_i) \stackrel{\text{def}}{=} f(\underline{y} + t_j \underline{e}_j + t_i \underline{e}_i) - f(\underline{y} + t_i \underline{e}_i)$, la quantità dentro i due limiti è $P(t_i) - P(0) = P'(\tau_i) t_i$, $0 < \tau_i(t_i) < t_i$ per il Teorema di Lagrange che possiamo applicare in quanto la funzione è derivabile rispetto a x_i in un intorno del punto \underline{y} ^(2.3) $P'(\tau_i) = t_i (f_{x_i}(\underline{y} + \tau_i \underline{e}_i + t_j \underline{e}_j) - f_{x_i}(\underline{y} + \tau_i \underline{e}_i))$. Fino a qui la dimostrazione è la stessa di prima. Ora però non possiamo usare di nuovo il teorema di Lagrange in quanto, per le ipotesi date, sappiamo che le derivate seconde esistono solo se calcolate in \underline{y} . Sappiamo però che le derivate sono funzioni differenziabili in \underline{y} e quindi $f_{x_i}(\underline{y} + \tau_i \underline{e}_i + t_j \underline{e}_j) = f_{x_i}(\underline{y}) + \underline{D}f_{x_i}(\underline{y}) \cdot (\tau_i \underline{e}_i + t_j \underline{e}_j) + o(|\tau_i| + |t_j|)$ e $f_{x_i}(\underline{y} + \tau_i \underline{e}_i) = f_{x_i}(\underline{y}) + \underline{D}f_{x_i}(\underline{y}) \cdot (\tau_i \underline{e}_i) + o(|\tau_i|)$. Sottraendo e moltiplicando per t_i otteniamo $t_i (\underline{D}f_{x_i}(\underline{y})) t_j \underline{e}_j + o(|\tau_i| + |t_j|) + o(|\tau_i|)$ Ora prendiamo $t_i = t_j$ e dividiamo tutto per t_i^2 . Otteniamo $f_{x_i x_j}(\underline{y}) + \frac{o(|\tau_i| + |t_i|)}{t_i} + \frac{o(|\tau_i|)}{t_i}$. Di questa espressione facciamo il limite $t_j \rightarrow 0$. Essendo $\left| \frac{o(|\tau_i| + |t_i|)}{t_i} \right| \leq \left| \frac{o(|\tau_i| + |t_i|)}{|\tau_i| + |t_i|} \right| \frac{|\tau_i| + |t_i|}{|t_i|} \leq 2 \left| \frac{o(|\tau_i| + |t_i|)}{|\tau_i| + |t_i|} \right|$ il limite è $f_{x_i x_j}(\underline{y})$.

Invertendo i ruoli di t_i e t_j otteniamo lo stesso risultato da cui la uguaglianza delle derivate seconde. ■

Osservazione *i)* non si richiede che le derivate miste siano continue. Dare quindi un esempio di funzione che soddisfa le ipotesi della seconda dimostrazione ma ha almeno una delle derivate miste discontinua nell'origine.

Esercizio Data la funzione (Peano) $f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \underline{x} \neq \underline{0} \\ 0 & \underline{x} = \underline{0} \end{cases}$ si dica se sono uguali o meno le

derivate parziali miste calcolate nell'origine.

Definizione 2.5 *Sia data una funzione $f: E \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ differenziabile un numero sufficiente di volte. Definiamo le seguenti grandezze $df(\underline{x}_o) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^n f_{x_i}(\underline{x}_o) dx_i$, $d^2 f(\underline{x}_o) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i,j=1}^n f_{x_i x_j}(\underline{x}_o) dx_i dx_j$, $d^k f(\underline{x}_o) = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_k=1}^n f_{x_{i_1} \dots x_{i_k}}(\underline{x}_o) dx_{i_1} \dots dx_{i_k}$ rispettivamente il differenziale di ordine 1, 2, etc.. Si può anche scrivere h_i al posto di dx_i .*

(2.3) deriva dal fatto che differenziabile due volte in \underline{y} significa che la funzione è differenziabile una volta nell'intorno di \underline{y} e ciascuna derivata è differenziabile una volta in \underline{y}

Sussiste il seguente Teorema (di Taylor per funzioni di più variabili)

Teorema 2.5 Sia $f: E \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ m volte differenziabile in $\underline{x} \in E$. Sia $\underline{h} \in \mathbb{R}^n$ tale che il segmento $[\underline{x}, \underline{x} + \underline{h}] \subset E$ ^(2.4). Vale allora $f(\underline{x} + \underline{h}) = f(\underline{x}) + \sum_{k=1}^m \frac{d^k f(\underline{x})}{k!} + o(\|\underline{h}\|^m)$ per $\underline{h} \rightarrow \underline{0}$. Inoltre

- 1) $f(\underline{x}) + \sum_{k=1}^m \frac{d^k f(\underline{x})}{k!}$ è l'unico polinomio di grado $\leq m$ che verifica la relazione precedente
- 2) Se f è m volte differenziabile in $[\underline{x}, \underline{x} + \underline{h}]$, le derivate di ordine m sono ivi continue, f è $m + 1$ volte differenziabile in $(\underline{x}, \underline{x} + \underline{h})$ esiste $\lambda \in (0, 1)$ tale che

$$f(\underline{x} + \underline{h}) = f(\underline{x}) + \sum_{k=1}^m \frac{d^k f(\underline{x})}{k!} + \frac{d^{m+1} f(\underline{x} + \lambda \underline{h})}{(m+1)!}$$

Dimostrazione La prima parte della 1) si dimostra per induzione. Se $m = 1$ è la differenziabilità. Sia $F^{(j)}(\underline{h}) \stackrel{\text{def}}{=} f(\underline{x} + \underline{h}) - f(\underline{x}) - \sum_{k=1}^j \frac{d^k f(\underline{x})}{k!}$ e supponiamo che $F^{(j)}(\underline{h}) = o(\|\underline{h}\|^j)$ per $\underline{h} \rightarrow \underline{0}$, $1 \leq j \leq m-1$. Vogliamo far vedere che $F^{(m)}(\underline{h}) = o(\|\underline{h}\|^m)$ (che $F^{(m)}$ esista, è conseguenza del fatto che $f(\underline{x})$ è m volte differenziabile). Ricordiamo che^(2.5)

$$d^k f(\underline{x}) = \sum_{\substack{i_1, i_2, \dots, i_n=0 \\ i_1+i_2+\dots+i_n=k}}^k \frac{k!}{i_1! i_2! \dots i_n!} h_1^{i_1} \dots h_n^{i_n} \frac{\partial^k f(\underline{x})}{(\partial x_1)^{i_1} (\partial x_2)^{i_2} \dots (\partial x_n)^{i_n}}$$

e quindi $d^m f(\underline{x})$ è un polinomio nelle variabili h_1, \dots, h_n . $F^{(m)}(\underline{h})$ è m volte differenziabile in $\underline{h} = \underline{0}$ e le sue derivate si annullano. Ciò implica che $\partial_{h_i} F^{(m)}(\underline{h})$ è $m-1$ volte differenziabile e per l'ipotesi induttiva abbiamo $\partial_{h_i} F^{(m)}(\underline{h}) = o(\|\underline{h}\|^{m-1})$ $i = 1, \dots, m$. Per il teorema del valor medio

$$F^{(m)}(\underline{h}) - F^{(m)}(\underline{0}) = F^{(m)}(\hat{\underline{h}}) = \underline{\partial} F^{(m)}(\hat{\underline{h}}) \underline{h} = \underline{\partial}(\|\underline{h}\|^{m-1}) \cdot \underline{h} = o(\|\underline{h}\|^m), \quad \hat{\underline{h}} \in [\underline{x}, \underline{x} + \underline{h}]$$

Unicità ; supponiamo che esista un polinomio $P(\underline{h})$ di grado $\leq m$ tale che $f(\underline{x} + \underline{h}) - P(\underline{h}) = o(\|\underline{h}\|^m)$. Essendo

$$f(\underline{x} + \underline{h}) = f(\underline{x}) + \sum_{k=1}^m \frac{d^k f(\underline{x})}{k!} + o(\|\underline{h}\|^m) \doteq T^{(m)}(\underline{h})$$

ne segue che $P(\underline{h}) - T^{(m)}(\underline{h}) = o(\|\underline{h}\|^m)$. D'altra parte supponiamo che $P(\underline{h}) \neq T^{(m)}(\underline{h})$. Ciò vuol dire che almeno uno dei coefficienti di $P(\underline{h})$ è diverso da quello di $T^{(m)}(\underline{h})$ avente lo stesso ordine e quindi non può essere $P(\underline{h}) - T^{(m)}(\underline{h}) = o(\|\underline{h}\|^m)$ in quanto i due polinomi sono di grado $\leq m$.

2) Con le ipotesi di 2) la funzione $\varphi(t) = f(\underline{x} + t\underline{v})$, $\underline{v} = \frac{\underline{h}}{\|\underline{h}\|}$ è m volte derivabile in $[0, \|\underline{h}\|]$ e $m+1$ volte derivabile in $(0, \|\underline{h}\|)$. Possiamo applicare il teorema di Taylor con resto di Lagrange per funzioni di un variabile per cui $\varphi(t) = \varphi(0) + \sum_{k=1}^m \frac{1}{k!} \varphi^{(k)}(0) t^k + \frac{1}{(m+1)!} \varphi^{(m+1)}(\tilde{\lambda}) t^{m+1}$, $0 < \tilde{\lambda} < t$ oppure $t < \tilde{\lambda} < 0$.

^(2.4) In [BD1], Teorema 7.6 pag. 333 e [BD2], Teorema 9.12 pag. 403, vi è $[\underline{x}, \underline{x} + d\underline{x}] \subset A$. Ad eccezione di A al posto di E , non può accadere che $[\underline{x}, \underline{x} + d\underline{x}] = E$ in quanto E non sarebbe più aperto e del fatto che E debba essere aperto non vi è dubbio

^(2.5) Si noti che tale espressione è uguale alla formula $d^k f(\underline{x}) = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_k=1}^n f_{x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k}} dx_{i_1} dx_{i_2} \dots dx_{i_k}$, successiva alla (7.29)

del libro [BD1]

Se $t = \|\underline{h}\|$, si ottiene (guardiamo solo l'ultima derivata)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(m+1)!} \sum_{\substack{i_1, i_2, \dots, i_n=0 \\ \sum_{j=1}^n i_j = m+1}}^{m+1} \frac{(m+1)!}{i_1! i_2! \dots i_n!} \left(\frac{h_1}{\|\underline{h}\|}\right)^{i_1} \dots \left(\frac{h_n}{\|\underline{h}\|}\right)^{i_n} \frac{\partial^k f(\underline{x} + \tilde{\lambda}\underline{v})}{(\partial x_1)^{i_1} (\partial x_2)^{i_2} \dots (\partial x_n)^{i_n}} (\|\underline{h}\|)^{m+1} = \\ & = \frac{1}{(m+1)!} \sum_{\substack{i_1, i_2, \dots, i_n=0 \\ \sum_{j=1}^n i_j = m+1}}^{m+1} \frac{(m+1)!}{i_1! i_2! \dots i_n!} \left(\frac{h_1}{\|\underline{h}\|}\right)^{i_1} \dots \left(\frac{h_n}{\|\underline{h}\|}\right)^{i_n} \frac{\partial^k f(\underline{x} + \lambda\|\underline{h}\|\underline{v})}{(\partial x_1)^{i_1} (\partial x_2)^{i_2} \dots (\partial x_n)^{i_n}} (\|\underline{h}\|)^{m+1} = \\ & = \frac{1}{(m+1)!} d^{m+1} f(\underline{x} + \lambda\|\underline{h}\|\underline{v}). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Notare che, ad esempio, da $0 < \tilde{\lambda} < t \leq \|\underline{h}\|$, scrivendo $\tilde{\lambda} = \lambda\|\underline{h}\|$, ne segue $0 < \lambda < 1$.

Osservazioni i) La parte in cui parla della unicità del polinomio è estremamente importante nella pratica in quanto, per le funzioni che comunemente incontreremo, si potrà usare il teorema di Taylor per funzioni di una variabile

Esempi Si voglia sapere il polinomio di Taylor di ordine ≤ 6 nel punto $(0, 0)$ della funzione $\cos(x_1 x_2^2)$. Poiché $x_1 x_2^2 \rightarrow 0$ per $\underline{x} \rightarrow \underline{0}$ usiamo le formule del coseno: $\cos(x_1 x_2^2) = 1 - \frac{1}{2} x_1^2 x_2^4 + \frac{1}{24} x_1^4 x_2^8 + o(x_1^5 x_2^{10})$

Se dimostriamo che $\lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{0}} \frac{x_1^4 x_2^8}{(x_1^2 + x_2^2)^3} = 0$ il polinomio che cerchiamo è $1 - \frac{1}{2} x_1^2 x_2^4$. Ma $\frac{x_1^4 x_2^8}{(x_1^2 + x_2^2)^3} \leq x_1^4 x_2^2$ e quindi tende a zero. Si tenga presente che ciò che nel Teorema è \underline{x} , nell'esercizio è $\underline{0}$ e ciò che nel teorema è $d\underline{x}$, nell'esercizio è (x_1, x_2) . Senza l'unicità avremmo dovuto eseguire le derivate della funzione fino all'ordine 6.

Esempi Si vuole calcolare il polinomio di Taylor di ordine 1 della funzione $f(x, y) = \ln(1 + x(1 + y))$ centrato in $x = 0$ e $y = 1$. Poiché $x(1 + y) = 0$ per $x = 0$, possiamo usare $\ln(1 + z) = z + O(z^2)$ da cui $\ln(1 + x(1 + y)) = x(1 + y) + O(x^2(1 + y)^2)$ e quindi il polinomio è $P(x) = x$. Se invece vogliamo il polinomio fino all'ordine 2, dobbiamo fare $\ln(1 + x(1 + y)) = x(1 + y) - \frac{1}{2} x^2(1 + y)^2 + O(x^3(1 + y)^3)$. Riscriviamo $x(1 + y) - \frac{1}{2} x^2(1 + y)^2$ come $x + x(y - 1) + x - \frac{1}{2} x^2((y - 1) + 2)^2 = 2x + x(y - 1) - \frac{1}{2} x^2(4) - \frac{1}{2} x^2(2(y - 1) + (y - 1)^2)$ e $-\frac{1}{2} x^2(2(y - 1) + (y - 1)^2)$ ha ordine 3 per cui il polinomio di ordine 2 è $P(x, y) = 2x + x(y - 1) - 2x^2$

Esercizio supponendo che in una data funzione di k variabili le derivate miste non sono uguali, quante sono le derivate di ordine M ? Se invece le derivate miste sono uguali quante sono?

Risposta: $\sum_{\substack{j_1 + \dots + j_k = M \\ j_k \geq 0}} \frac{M!}{j_1! j_2! \dots j_k!} = k^M$ nel primo caso e $\sum_{\substack{j_1 + \dots + j_k = M \\ j_k \geq 0}} 1 = \frac{(M + k - 1)!}{M!(k - 1)!}$ nel secondo

funzioni vettoriali (differenziabili) di più variabili reali

Una funzione $f: E \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ $E = \overset{\circ}{E}$ si dice derivabile, (differenziabile) in $\underline{y} \in E$ se ciascuna delle

componenti f_k $k = 1, \dots, m$ è (derivabile) differenziabile. La matrice $J_f(\underline{y}) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} (f_1)_{x_1} & \dots & (f_1)_{x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ (f_m)_{x_1} & \dots & (f_m)_{x_n} \end{pmatrix}$

(le derivate calcolate in \underline{y}) è detta *matrice Jacobiana* o *Jacobiano*. Siano date ora due funzioni

$f: E \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\underline{f} = \underline{f}(\underline{x})$ e $\underline{g}: U \subseteq \mathbb{R}^k \rightarrow V \subseteq \mathbb{R}^n$, $U = \overset{\circ}{U}$, dove $V \cap E \neq \emptyset$, $\underline{g} = \underline{g}(\underline{z})$. Si può definire $\underline{f} \circ \underline{g}: U \rightarrow \mathbb{R}^m$

Teorema 2.6 Se \underline{f} e \underline{g} sono differenziabili, la funzione $\underline{f} \circ \underline{g}$ è differenziabile e il suo Jacobiano è

$$J_{\underline{f} \circ \underline{g}}(\underline{z}) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} (f_1)_{x_1} & \cdots & (f_1)_{x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ (f_m)_{x_1} & \cdots & (f_m)_{x_n} \end{pmatrix}_{(m,n)} \begin{pmatrix} (g_1)_{z_1} & \cdots & (g_1)_{z_k} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ (g_n)_{z_1} & \cdots & (g_n)_{z_k} \end{pmatrix}_{(n,k)}$$

Dimostrazione Dobbiamo far vedere che esiste una matrice $A_{m \times k}$ tale che

$$\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{\underline{f}(\underline{g}(\underline{z} + h)) - \underline{f}(\underline{g}(\underline{z})) - Ah}{\|h\|} = 0.$$

$\underline{f}(\underline{g}(\underline{z} + h)) - \underline{f}(\underline{g}(\underline{z})) = J_{\underline{f}}(\underline{g}(\underline{z})) \cdot (\underline{g}(\underline{z} + h) - \underline{g}(\underline{z})) + o(\|\underline{g}(\underline{z} + h) - \underline{g}(\underline{z})\|)$ per la differenziabilità di f .
 Dalla differenziabilità di \underline{g} si ha $\underline{f}(\underline{g}(\underline{z} + h)) - \underline{f}(\underline{g}(\underline{z})) = J_{\underline{f}}(\underline{g}(\underline{z})) (J_{\underline{g}}(\underline{z})h + o(\|h\|)) + o(\|J_{\underline{g}}(\underline{z})h + o(\|h\|)\|) = J_{\underline{f}}(\underline{g}(\underline{z})) (J_{\underline{g}}(\underline{z})h + o(\|h\|))$ La matrice A è chiaramente quella data. Inoltre abbiamo $o(\|J_{\underline{g}}(\underline{z})h + o(\|h\|)\|) = o(\|h\|)$ essendo $\|J_{\underline{g}}(\underline{z})h\| \leq \|J_{\underline{g}}(\underline{z})\| \|h\|$ ■

Su [BD1], sezione 7.2. gli esercizi da studiare sono: Esempi da 12 (compreso) a 25. Sugli *esercizi in rete* gli esercizi da studiare sono: **2.7** da f_1 a f_{12} , **4.7**, **6.7** tranne la terza domanda, **8.7** domande iii) e iv).
 Su [BPS1] gli esercizi sono: esempi 2.1–2.8 pag. 376–384, esercizi 5–22 pag. 387–390 (con eccezione del 18), 23–26 pag.394. In [BPS2] gli esercizi sono: 1) capitolo 10 4.1, 4.3, 4.4 pag. 423–426 2) esercizi di pag. 434–436 ad eccezione degli esercizi del num.27

Si dica in quali punti la seguente funzione è differenziabile e in quali sono continue le sue derivate

parziali prime. È vera la relazione $f_{xy}(0, 0) = f_{yx}(0, 0)$? $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} & \underline{x} \neq \underline{0} \\ 0 & \underline{x} = \underline{0} \end{cases}$

Si ha $f_y(x, y) = \begin{cases} \frac{3x^2y^2 + y^4 - 2yx^3}{(x^2 + y^2)^2} & \underline{x} \neq \underline{0} \\ 1 & \underline{x} = \underline{0} \end{cases}$ e $f_x(x, y) = \begin{cases} \frac{3x^2y^2 + x^4 - 2xy^3}{(x^2 + y^2)^2} & \underline{x} \neq \underline{0} \\ 1 & \underline{x} = \underline{0} \end{cases}$ Le derivate

sono continue in ogni punto all'infuori dell'origine e quindi la funzione è differenziabile in $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.
 Nell'origine le derivate non sono continue e quindi bisogna usare la definizione che dà $\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{h_1^3 + h_2^3}{h_1^2 + h_2^2} - h_1 - h_2 = 0$ per cui la funzione è differenziabile anche nell'origine. La relazione $f_{xy}(0, 0) = f_{yx}(0, 0)$ è vera.

Risposta ad alcuni degli esercizi proposti nelle Osservazioni

- Prima dimostrazione del Teorema di Schwarz, osservazione ii) .

La funzione $f(x, y) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x^2} + y^2 \sin \frac{1}{y^2} & x \neq 0, \quad y \neq 0 \\ x^2 \sin \frac{1}{x^2} & y = 0, \quad x \neq 0 \\ y^2 \sin \frac{1}{y^2} & x = 0, \quad y \neq 0 \\ 0 & \underline{x} = \underline{0} \end{cases}$ fa al caso nostro. Detta $h(z) \stackrel{\text{def}}{=} z^2 \sin \frac{1}{z^2}$

$$\text{si ha } f_x(x, y) = \begin{cases} h'(x) & x \neq 0, \quad y \neq 0 \\ h'(x) & y = 0, \quad x \neq 0 \\ 0 & x = 0, \quad y \neq 0 \\ 0 & \underline{x} = \underline{0} \end{cases} \quad f_y(x, y) = \begin{cases} h'(y) & x \neq 0, \quad y \neq 0 \\ 0 & y = 0, \quad x \neq 0 \\ h'(y) & x = 0, \quad y \neq 0 \\ 0 & \underline{x} = \underline{0} \end{cases} \quad \text{dove } h'(z) = \frac{dh}{dz}. \text{ Se}$$

ora facciamo $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,y)} f_x(x, y)$ con qualsiasi y vediamo che il limite non esiste in quanto, come funzione di una variabile, $h'(z)$ non ammette limite per $z \rightarrow 0^{(2.6)}$. La stessa cosa accade per $\lim_{(x,y) \rightarrow (x,0)} f_y(x, y)$. Quindi le derivate parziali prime *non sono continue in* $(0, 0)^{(2.7)}$. D'altra parte abbiamo $f_{xy}(0, 0) = f_{yx}(0, 0) = 0$ e quindi il Teorema è applicabile. Infatti essendo $f_{xy} = f_{yx} \equiv 0^{(2.8)}$, le ipotesi del Teorema sono vere.

- Prima dimostrazione del Teorema di Schwarz, osservazione *iii)* 1).

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & x \neq y \quad \vee (x, y) = (0, 0) \\ 1 & y = x, \quad x \neq 0 \end{cases} \quad \text{Si ha } f_x(x, y) = \begin{cases} 0 & x \neq y \quad \vee (x, y) = (0, 0) \\ \exists & y = x, \quad x \neq 0 \end{cases} \quad f_y(x, y) = \begin{cases} 0 & x \neq y \quad \vee (x, y) = (0, 0) \\ \exists & y = x, \quad x \neq 0 \end{cases}$$

Si vede che $f_{xy}(0, 0) = f_{yx}(0, 0) = 0$ ma la funzione non è differenziabile in $(0, 0)$ non essendo ivi neppure continua.

- Prima dimostrazione del Teorema di Schwarz, osservazione *iii)* 2).

La funzione relativa alla Osservazione *ii)* ha f_x non continua su nessun punto dell'asse delle y . Se f fosse due volte differenziabile in $\underline{0}$ la f_x sarebbe differenziabile in $\underline{0}$ e quindi continua in quel punto ma questo è escluso. Quindi la funzione è una volta differenziabile in un intorno di $\underline{0}^{(2.9)}$ ma non due volte in $\underline{0}$.

- Seconda dimostrazione del Teorema di Schwarz, osservazione *i)* .

$$\text{Sia } g(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \quad \text{e } f(x, y) = \begin{cases} g(x)g(y) & x \neq 0 \wedge y \neq 0 \\ 0 & x = 0 \vee y = 0 \end{cases}$$

$$f_x = \begin{cases} g'(x)g(y) & x \neq 0 \wedge y \neq 0 \\ 0 & x = 0 \vee y = 0 \end{cases} \quad f_y = \begin{cases} g(x)g'(y) & x \neq 0 \wedge y \neq 0 \\ 0 & x = 0 \vee y = 0 \end{cases}$$

$$\frac{1}{\|\underline{h}\|} (f(h_1, h_2) - h_1 f_x(0, 0) - h_2 f_x(0, 0)) = \frac{1}{\|\underline{h}\|} f(h_1, h_2) \rightarrow 0 \text{ per } \|\underline{h}\| \rightarrow 0 \text{ e quindi } f \text{ è differenziabile nell'origine. Chiaramente } f \text{ è differenziabile fuori dall'origine.}$$

$$f_{xx} = \begin{cases} g''(x)g(y) & x \neq 0 \wedge y \neq 0 \\ 0 & y = 0 \\ \exists & x = 0 \wedge y \neq 0 \end{cases} \quad f_{xy} = \begin{cases} g'(x)g'(y) & x \neq 0 \wedge y \neq 0 \\ 0 & y = 0 \vee x = 0 \end{cases}$$

$$\frac{1}{\|\underline{h}\|} (f_x(h_1, h_2) - h_1 f_{xx}(0, 0) - h_2 f_{xy}(0, 0)) = \frac{1}{\|\underline{h}\|} f_x(h_1, h_2) = \frac{1}{\|\underline{h}\|} g'(h_1)g(h_2) \rightarrow 0 \text{ per } \|\underline{h}\| \rightarrow 0.$$

(2.6) si verifichi tale affermazione

(2.7) f_x non è continua in nessun punto dell'asse y e f_y non è continua in nessun punto dell'asse x

(2.8) Si verifichi tale affermazione

(2.9) si verifichi tale affermazione

Dunque f_x è differenziabile nell'origine così come f_y . D'altro canto f_{xy} non è continua nell'origine stessa.

• Le derivate di $f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \underline{x} \neq \underline{0} \\ 0 & \underline{x} = \underline{0} \end{cases}$ sono $f_y(x, y) = \begin{cases} x \frac{x^4 - y^4 - 4x^2y^2}{(x^2 + y^2)^2} & \underline{x} \neq \underline{0} \\ 0 & \underline{x} = \underline{0} \end{cases}$

e $f_x(x, y) = \begin{cases} y \frac{x^4 + 4x^2y^2 - y^4}{(x^2 + y^2)^2} & \underline{x} \neq \underline{0} \\ 0 & \underline{x} = \underline{0} \end{cases}$ $f_{xy}(\underline{0}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (f_y(t, 0) - f_y(0, 0)) = 1$ mentre

$f_{yx}(\underline{0}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (f_x(0, t) - f_x(0, 0)) = -1$ e quindi non sono uguali. Ne segue che le derivate

non possono essere continue *nell'origine* (fuori dall'origine sono continue). Infatti $f_{yx}(x, y) =$

$\begin{cases} \frac{x^6 + 9x^4y^2 - 9x^2y^4 - y^6}{(x^2 + y^2)^3} & \underline{x} \neq \underline{0} \\ 1 & \underline{x} = \underline{0} \end{cases}$. Poiché $\lim_{x \rightarrow 0} f_{yx}(x, mx) = \frac{1 - m^6 + 9m^2 - 9m^4}{(1 + m^2)^3}$ (una quantità che

dipende da m) la funzione non è continua nell'origine. Stessa cosa accade per $f_{xy}(x, y)$. Si verifichi che la funzione non soddisfa le ipotesi della seconda dimostrazione del Torema di Schwarz.

Certamente è differenziabile una volta in un intorno dell'origine (è per la verità differenziabile ovunque). Fuori dall'origine è differenziabile in quanto trattasi del rapporto di due polinomi in cui il denominatore non si annulla. Nell'origine le derivate parziali sono nulle e quindi la differenziabilità si riduce a

$\lim_{(h_1, h_2) \rightarrow (0, 0)} \frac{1}{\|\underline{h}\|} h_1 h_2 \frac{h_1^2 - h_2^2}{h_1^2 + h_2^2} = 0$. Circa la differenziabilità due volte nell'origine bisogna che le derivate parziali siano a loro volta differenziabili nell'origine. Dobbiamo quindi calcolare $f_{yy}(0, 0)$, e $f_{xx}(0, 0)$,

$f_{xy}(0, 0)$, $f_{yx}(0, 0)$. $f_{yy}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (f_y(0, t) - f_y(0, 0)) = 0$, $f_{yx}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (f_x(t, 0) - f_x(0, 0)) = 1$.

La differenziabilità nell'origine della funzione f_y dipende dall'essere zero o meno del seguente limite

$\lim_{(h_1, h_2) \rightarrow (0, 0)} \frac{1}{\|\underline{h}\|} \frac{h_1^4 - h_2^4 - 4h_2^2}{(h_1^2 + h_2^2)^2} = \lim_{(h_1, h_2) \rightarrow (0, 0)} \frac{1}{\|\underline{h}\|} \frac{-2h_1h_2^4 - 6h_1^3h_2^2}{(h_1^2 + h_2^2)^2}$. Ma tale limite non esiste (il valore del limite cambia cambiando restrizione). Tale funzione (controesempio) è dovuto a G.Peano in un

lavoro del 1884.

3 punti critici, estremi liberi

Il materiale di questo capitolo è essenzialmente il contenuto delle pagine 395–401 di [BPS1] oppure 442–454 di [BPS2]. Anche in [BD1] e [BD2] è presente lo stesso argomento. I teoremi sulla convessità alla fine sono presi da [BD1].

Definizione 3.1 Data una funzione $f: E \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $E = \overset{\circ}{E}$, sia $\underline{y} \in E$ tale che $f(\underline{x}) \leq f(\underline{y})$ per ogni $\underline{x} \in B_{\underline{y}}(r) \subseteq E$, $r > 0$ opportuno. Allora \underline{y} è detto *massimo locale*. Se al posto di \leq vi è \geq , \underline{y} è detto *minimo locale*. Se al posto di \leq e \geq vi sono rispettivamente $<$ e $>$ allora \underline{y} è detto *massimo o minimo locale forte*. Se in ogni sfera aperta contenente \underline{y} vi sono punti in cui $f(\underline{x}) < f(\underline{y})$ e punti in cui $f(\underline{x}) > f(\underline{y})$, \underline{y} è detto *punto di sella* (3.1)

Definizione 3.2 Data $f: E \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $E = \overset{\circ}{E}$ differenziabile, se $\underline{\partial}f(\underline{y}) = \underline{0}$, \underline{y} è detto *punto critico*

Teorema 3.1 (di Fermat) Sia data una funzione $f: E \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ differenziabile e sia \underline{y} di massimo oppure di minimo locale. Allora \underline{y} è un punto critico ossia $\underline{\partial}f(\underline{y}) = \underline{0}$.

Dimostrazione Detto $\underline{e}_k = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$, 1 al k -esimo posto, il versore nella direzione k -esima, sia $h(t) \stackrel{\text{def}}{=} f(\underline{y} + t\underline{e}_k)$, al variare di t in \mathbb{R} . Per $t = 0$ la funzione $h(t)$ ha un massimo oppure un minimo e per il teorema di Fermat relativo alle funzioni di una variabile, deve essere $h'(0) = \frac{\partial f(\underline{x})}{\partial x_k} \Big|_{\underline{x}=\underline{y}} = 0$. ■

Osservazione *i)* Il teorema dimostrato è estremamente importante in quanto indica la strada maestra per trovare massimi o minimi purchè siano punti di un insieme aperto ossia punti interni. Un dato punto può essere massimo o minimo solo se soddisfa le n equazioni $\underline{\partial}f(\underline{y}) = \underline{0}$.

Per completare lo studio dei punti critici è necessario sapere alcune nozioni sulle *forme quadratiche*.

Definizione 3.3 Dicesi *forma quadratica* in \mathbb{R}^n l'espressione $A(\underline{v}) = \sum_{i,j=1}^n A_{i,j} v_i v_j$. $A_{i,j} \in \mathbb{R}$, la cui forma matriciale è $A(\underline{v}) = \underline{v}^T A \underline{v}$ (3.2) dove

$$A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \dots & \dots & A_{1,n} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} & \dots & A_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ A_{n,1} & A_{n,2} & \dots & A_{n,n-1} & A_{n,n} \end{pmatrix}$$

- 1) $A(\underline{v})$ è detta *definita positiva (negativa)* se per ogni $\underline{v} \neq \underline{0}$ si ha $A(\underline{v}) > 0$ (< 0)
- 2) $A(\underline{v})$ è detta *semidefinita positiva (negativa)* se per ogni $\underline{v} \neq \underline{0}$ si ha $A(\underline{v}) \geq 0$ (≤ 0) ed esiste $\underline{v}_0 \neq \underline{0}$ tale che $A(\underline{v}_0) = 0$
- 3) $A(\underline{v})$ è *indefinita* se esiste \underline{v}_0 tale che $A(\underline{v}_0) < 0$ ed esiste \underline{v}_1 tale che $A(\underline{v}_1) > 0$ (una forma quadratica è indefinita se non è né semidefinita positiva né negativa).

(3.1) è fondamentale che $f(\underline{x}) - f(\underline{y})$ cambi segno in ogni intorno del punto \underline{y}

(3.2) in questa espressione \underline{v} è un vettore colonna ossia è una matrice con n righe e una colonna: $\underline{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ mentre \underline{v}^T è

un vettore riga $\underline{v}^T = (v_1, \dots, v_n)$

4) $A(\underline{v})$ è simmetrica se $A_{i,j} = A_{j,i}$.

Teorema 3.2 Sia data una forma quadratica simmetrica $A(\underline{v})$ definita positiva (negativa). Allora esiste una costante $a > 0$ ($a' < 0$) tale che $A(\underline{v}) \geq a\|\underline{v}\|^2$ ovvero $A(\underline{v}) \leq a'\|\underline{v}\|^2$

Dimostrazione La dimostrazione fa esclusivamente uso di teoremi di algebra lineare. La matrice A è simmetrica e quindi ha n autovalori reali non necessariamente distinti. Esiste inoltre una trasformazione lineare M tale che $M^T = M^{-1}$ (la trasposta è uguale all'inversa) e $M^T A M = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \stackrel{\text{def}}{=} \Lambda$ dove $\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ è la matrice che sulla diagonale principale ha gli autovalori e 0 altrove. Detto

$\underline{v}' = M^{-1}\underline{v}$ si ha $(\underline{v}, A\underline{v}) = (\underline{v}', \Lambda\underline{v}') = \sum_{i=1}^n \lambda_i |v'_i|^2 > 0$ qualsiasi sia \underline{v} . Ne segue che tutti gli autovalori

sono positivi e quindi $(\underline{v}, A\underline{v}) \geq (\min_{i=1, \dots, n} \lambda_i) \|\underline{v}'\|^2$. Osservando che $M^T = M^{-1}$ si ottiene $(\underline{v}, A\underline{v}) \geq$

$(\min_{i=1, \dots, n} \lambda_i) \|\underline{v}\|^2$ e $a = \min_{i=1, \dots, n} \lambda_i$.

Ragionando allo stesso modo per una forma quadratica definita negativa si ha $A(\underline{v}) \leq a'\|\underline{v}\|^2$ e $a' = \max_{i=1, \dots, n} \lambda_i$ ■

Lo studio delle forme quadratiche in due dimensioni $av_1^2 + 2bv_1v_2 + cv_2^2$ è particolarmente agevole essendo tali forme identificate da una matrice 2×2 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$. Sussiste il seguente

Teorema 3.3 Sia data la forma quadratica in due dimensioni $av_1^2 + 2bv_1v_2 + cv_2^2$ con $a \neq 0$. Essa è

- 1) definita positiva (negativa) se e solo se $\det A > 0$ e $a > 0$ ($a < 0$)
- 2) indefinita se e solo se $\det A < 0$
- 3) semidefinita positiva (negativa) se e solo se $\det A = 0$ e $a > 0$ ($a < 0$).

Se $a = 0, c \neq 0$ si possono riscrivere le affermazioni precedenti con c al posto di a . Se $a = c = 0$ la forma quadratica è indefinita.

Dimostrazione Con $a \neq 0$ abbiamo $A(\underline{v}) = a(v_1 + \frac{b}{a}v_2)^2 + \frac{ac-b^2}{a}v_2^2$. Cominciamo dalla 1). Sia $A(\underline{v})$ definita positiva. Se fosse $a < 0$, prendendo v_1 grande abbastanza si otterrebbe $A(\underline{v}) < 0$ e quindi deve essere $a > 0$. A questo punto prendiamo $v_1 = -\frac{b}{a}v_2$ da cui $A(-\frac{b}{a}v_2, v_2) = \frac{ac-b^2}{a}v_2^2 > 0$ se e solo se $ac - b^2 > 0$ ossia $\det A > 0$. Che viceversa se $\det A > 0$ e $a > 0$ la forma quadratica è definita positiva appare essere evidente. Lo stesso identico ragionamento si applica nel caso in cui è definita negativa.

Passiamo al punto 2). Sia $A(\underline{v})$ indefinita. Supponiamo $a > 0$. La parte $a(v_1 + \frac{b}{a}v_2)^2$ è positiva o nulla e quindi deve aversi $\det A < 0$ se vogliamo che la forma quadratica sia negativa per qualche scelta della coppia (h_1, h_2) . Se $a < 0$ il ragionamento segue le stesse linee. Viceversa sia $\det A < 0$ e $a > 0$. Se v_1 è molto grande $A(v_1, v_2) > 0$. Se $v_1 = -\frac{b}{a}v_2$, $A(-\frac{b}{a}v_2, v_2) < 0$ e quindi è indefinita.

3) Sia $A(\underline{v})$ semidefinita positiva. Certamente deve essere $a > 0$. Al solito prendendo $v_1 = -\frac{b}{a}v_2$, si arriva alla conclusione che $\det A > 0$. Un analogo ragionamento si ha nel caso la forma quadratica sia semidefinita negativa.

Se $a = c = 0$ la forma è chiaramente indefinita. ■

Data una qualsiasi funzione $f: E \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ supponiamo che sia due volte differenziabile in \underline{y} . In base al Teorema 1.4 si può scrivere $f(\underline{y} + \underline{h}) = f(\underline{y}) + \underline{\partial}f(\underline{y}) \cdot \underline{h} + \frac{1}{2}f_{x_1x_1}(\underline{y})h_1^2 + \frac{1}{2}f_{x_2x_2}(\underline{y})h_2^2 + f_{x_1x_2}(\underline{y})h_1h_2 +$

$o(\|\underline{h}\|^2)$. La parte quadratica è $(\underline{h}, H(\underline{y})\underline{h})$ dove $H = \begin{pmatrix} f_{x_1x_1}(\underline{y}) & f_{x_1x_2}(\underline{y}) \\ f_{x_1x_2}(\underline{y}) & f_{x_2x_2}(\underline{y}) \end{pmatrix}$ e se necessario verrà indicata con $H_2(\underline{y})$

Teorema 3.4 Sia data una funzione $f: E \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $E = \overset{\circ}{E}$ e sia $\underline{y} \in E$ un punto critico della funzione. Supponiamo che la funzione sia due volte differenziabile in \underline{y} . Allora abbiamo le seguenti conclusioni:

- 1) se $H_2(\underline{y})$ è definita negativa (positiva) \underline{y} è di massimo (minimo) locale forte
- 2) se $H_2(\underline{y})$ è indefinita \underline{y} è di sella ^(3.3)
- 3) Se $H_2(\underline{y})$ è semidefinita positiva il punto può essere di minimo oppure di sella. Se $H_2(\underline{y})$ è semidefinita negativa il punto può essere di massimo oppure di sella.

Dimostrazione 1) Essendo \underline{y} un punto critico di f , in una sfera aperta sufficientemente piccola del punto si scrive $f(\underline{y} + \underline{h}) = f(\underline{y}) + \frac{1}{2}(\underline{h}, H(\underline{y})\underline{h}) + o(\|\underline{h}\|^2)$. Grazie al Teorema 3.2, se $H(\underline{y})$ è definita positiva $(\underline{h}, H(\underline{y})\underline{h}) \geq c\|\underline{h}\|^2$, ($c > 0$), e quindi $f(\underline{y} + \underline{h}) = f(\underline{y}) + \frac{1}{2}(\underline{h}, H(\underline{y})\underline{h}) + o(\|\underline{h}\|^2) > f(\underline{y}) + \frac{c}{2}\|\underline{h}\|^2 + o(\|\underline{h}\|^2) = f(\underline{y}) + \|\underline{h}\|^2(\frac{1}{2}c + \frac{o(\|\underline{h}\|^2)}{\|\underline{h}\|^2}) > f(\underline{y})$ se \underline{h} è sufficientemente piccolo.

Il caso in cui è definita negativa si tratta allo stesso modo

3) Il risultato è ovvio se $H_2(\underline{y})$ è indefinita .

3) Sia data la funzione $f(x, y) = x^2 + y^4$. $H_2(\underline{0})$ è semidefinita positiva ed il punto è di minimo. Se $f(x, y) = x^2 - y^4$ il punto è di sella e $H_2(\underline{0})$ ugualmente è semidefinita positiva. Se $f(x, y) = -x^2 - y^4$ il punto è di minimo e $H_2(\underline{0})$ è semidefinita negativa. Se $f(x, y) = -x^2 + y^4$ il punto è di sella e $H_2(\underline{0})$ è semidefinita negativa. ■

Per forme quadratiche simmetriche (quali sono quelle definite da matrici hessiane di funzioni due volte differenziabili) vi è una importante connessione con il segno degli autovalori della matrice. Sia data la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$. Dalla geometria sappiamo che essa ha due autovalori reali λ_1, λ_2 (non necessariamente distinti). Se $\det A > 0$, essendo $\det A = ac - b^2 = \lambda_1 \lambda_2 > 0$ vuol dire che i due autovalori hanno lo stesso segno e che a e c pure devono avere lo stesso segno. Se quindi $a > 0$ vuol dire che $c > 0$. Essendo però $a + c = \lambda_1 + \lambda_2$, $a > 0$ vuol dire che la condizione di definizione positiva della forma quadratica equivale ad avere positivi entrambi gli autovalori. La condizione di definizione negativa equivale ad avere entrambi gli autovalori negativi ($\det A > 0$ e $a < 0$). Se la forma quadratica è indefinita allora $\det A < 0$ e quindi $\lambda_1 \lambda_2 < 0$ (gli autovalori hanno segno discorde). Se la forma quadratica è semidefinita positiva allora $\det A = 0$ e quindi, ad esempio, $\lambda_1 = 0$. Se $b = 0$ ossia la matrice è $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ allora il secondo autovalore è $a > 0$. Se invece $b \neq 0$, la condizione $a > 0$, unitamente al fatto che $a + c = \lambda_2$, impone $\lambda_2 > 0$ per cui la forma è semidefinita positiva (negativa) se e solo se uno uno degli autovalori è nullo e l'altro è positivo (negativo).

Per forme quadratiche in dimensione maggiore di due si ha il seguente teorema (di *Sylvester*)

(3.3) vuol dire che esistono coppie (h_1, h_2) per le quali $f(\underline{y} + \underline{h}) < f(\underline{y})$ e coppie per le quali $f(\underline{y} + \underline{h}) > f(\underline{y})$. Si veda la 3) della Definizione 3.3

Teorema 3.5 Data la forma quadratica $A(\underline{v}) = \sum_{i,j=1}^n A_{i,j} v_i v_j$ sia: $A_1 = A_{1,1}$, $A_2 = \begin{vmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{vmatrix}$,

$$A_3 = \begin{vmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} \\ A_{3,1} & A_{3,2} & A_{3,3} \end{vmatrix} \text{ ecc.}$$

- 1) Se $A_j > 0$ per ogni j la forma quadratica è definita positiva
- 2) Se $A_1 < 0$, $A_2 > 0$, $A_3 < 0$, ecc., la forma quadratica è definita negativa
- 3) Se $A_j \neq 0$ per ogni j ma i loro segni si alternano in modo qualunque, la forma quadratica è indefinita. Se almeno uno degli $A_j = 0$ il criterio non dà informazioni.

Dimostrazione Omessa

In quest'ultima parte diamo delle definizioni e teoremi relativi alle funzioni convesse.

Sia dato $E \subset \mathbb{R}^n$ aperto e convesso^(3.4).

Definizione 3.4 Una funzione $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ si dice *convessa* in E se per ogni coppia di punti $\underline{x} \in E$, $\underline{y} \in E$, $\underline{x} \neq \underline{y}$ risulta $f(t\underline{x} + (1-t)\underline{y}) \leq tf(\underline{x}) + (1-t)f(\underline{y})$ per ogni $t \in (0, 1)$. Se la disuguaglianza vale con $<$ invece di \leq si dice che la funzione è *strettamente convessa*. Se (\leq) ($<$) sono sostituiti con (\geq) ($>$) la funzione è detta *concava* oppure *strettamente concava*

Teorema 3.6 Sia $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ differenziabile in $\underline{x} \in E$, $E = \overset{\circ}{E}$, e convesso. Allora se f è convessa in E si ha $f(\underline{x} + \underline{h}) \geq f(\underline{x}) + \underline{\partial}f(\underline{x}) \cdot \underline{h}$ per ogni \underline{h} tale che $\underline{x} + \underline{h} \in E$. Se f è strettamente convessa si ha $f(\underline{x} + \underline{h}) > f(\underline{x}) + \underline{\partial}f(\underline{x}) \cdot \underline{h}$ per ogni $\underline{h} \neq \underline{0}$ tale che $\underline{x} + \underline{h} \in E$.

Dimostrazione Omessa

Osservazione *i)* dal teorema segue che se la funzione è convessa, giace non al di sotto del piano tangente alla funzione in \underline{x} in quanto $f(\underline{x} + \underline{h}) > f(\underline{x}) + \underline{\partial}f(\underline{x}) \cdot \underline{h}$.

Teorema 3.7 Sia $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ due volte differenziabile in $\underline{x} \in E$, $E = \overset{\circ}{E}$, e convesso. Allora f è convessa in E se e solo se $(\underline{h}, H_2(\underline{x})\underline{h}) \geq 0$ per ogni $\underline{x} \in E$ e per ogni \underline{h} tale che $\underline{x} + \underline{h} \in E$. f è strettamente convessa in E se per ogni $\underline{x} \in E$ si ha $(\underline{h}, H_2(\underline{x})\underline{h}) > 0$ $\underline{h} \neq \underline{0}$

Osservazione nella prima affermazione il teorema ci dice che se la funzione è differenziabile due volte in E allora la funzione giace non al di sotto del piano tangente se e solo se la matrice hessiana è positiva e viceversa se è concava. Nella seconda affermazione abbiamo che se la matrice hessiana è strettamente positiva allora la funzione giace strettamente sopra al piano tangente (ad eccezione del punto di tangenza ovviamente).

Dimostrazione

parte \Rightarrow della prima affermazione. Sia f convessa in E . Dal Teorema 3.6 segue che $f(\underline{x} + \underline{h}) \geq f(\underline{x}) + \underline{\partial}f(\underline{x}) \cdot \underline{h}$ per ogni $\underline{x} \in E$ e \underline{h} tale che $\underline{x} + \underline{h} \in E$. Dalla doppia differenziabilità di f in \underline{x} segue che $f(\underline{x} + \underline{h}) - f(\underline{x}) - \underline{\partial}f(\underline{x}) \cdot \underline{h} = \frac{1}{2}(\underline{h}, H_2(\underline{x})\underline{h}) + o(\|\underline{h}\|^2) \geq 0$. Ne consegue che $(\underline{h}, H_2(\underline{x})\underline{h}) \geq 0$ per ogni $\|\underline{h}\|$ sufficientemente piccolo. Infatti se esistesse \underline{h}_0 tale che $(\underline{h}_0, H_2(\underline{x})\underline{h}_0) = r < 0$, avremmo

^(3.4) un insieme aperto E è convesso se per ogni coppia di punti \underline{x} , e \underline{y} appartenenti a E , il segmento $t\underline{x} + (1-t)\underline{y}$ appartiene a E per ogni $0 < t < 1$

$\frac{1}{2}(\underline{h}_0, H_2(\underline{x})\underline{h}_0) + o(\|\underline{h}_0\|^2) = \frac{1}{2}(\underline{h}_0, H_2(\underline{x})\underline{h}_0) \left(1 + \frac{2o(\|\underline{h}_0\|^2)}{(\underline{h}_0, H_2(\underline{x})\underline{h}_0)}\right)$ dentro la parentesi c'è una quantità positiva. Moltiplicando però \underline{h} per un numero reale λ positivo o negativo possiamo ottenere un vettore $\lambda\underline{h}$ di modulo grande a piacere e al contempo $(\lambda\underline{h}, H_2(\underline{x})\lambda\underline{h}) = \lambda^2(\underline{h}, H_2(\underline{x})\underline{h}) \geq 0$ da cui il risultato. Quest'ultimo passaggio in cui si è introdotta λ serve a comprendere tutti i vettori \underline{h} per cui $\underline{x} + \underline{h} \in E$.
 parte \Leftarrow della prima affermazione. Utilizziamo la seconda parte del Teorema 2.5 con $m = 1$ e quindi $f(\underline{x} + \underline{h}) - f(\underline{x}) - \underline{\partial}f(\underline{x}) \cdot \underline{h} = \frac{1}{2}(\underline{h}, H_2(\underline{x} + \lambda\underline{h})\underline{h})$. Per ipotesi $\frac{1}{2}(\underline{h}, H_2(\underline{x} + \lambda\underline{h})\underline{h}) \geq 0$ per ogni \underline{x} e per ogni \underline{h} . Ne segue che $f(\underline{x} + \underline{h}) - f(\underline{x}) - \underline{\partial}f(\underline{x}) \cdot \underline{h} \geq 0$.

seconda affermazione. La parte \Leftarrow della prima affermazione stavolta non basta. Infatti se neghiamo che $(\underline{h}, H_2(\underline{x})\underline{h}) > 0$ per ogni $\underline{x} \in E$ e \underline{h} tale che $\underline{x} + \underline{h} \in E$, vuol dire che esiste \underline{x}_0 e \underline{h}_0 per cui $(\underline{h}_0, H_2(\underline{x}_0)\underline{h}_0) \leq 0$. ■

Osservazione non si può dimostrare che se f è strettamente convessa in E allora per ogni $\underline{x} \in E$ si ha $(\underline{h}, H_2(\underline{x})\underline{h}) > 0$ $\underline{h} \neq \underline{0}$. Infatti da $\frac{1}{2}(\underline{h}, H_2(\underline{x})\underline{h}) + o(\|\underline{h}\|^2) > 0$ non segue che $\frac{1}{2}(\underline{h}, H_2(\underline{x})\underline{h}) > 0$. Una analoga situazione si ha per funzioni di una variabile. Si prenda la funzione $f(x) = x^4$ che è strettamente convessa. In tal caso la quantità $\frac{1}{2}(\underline{h}, H_2(\underline{x})\underline{h})$ diventa $\frac{1}{2}h^2 f''(x)$ e se prendiamo $x = 0$ otteniamo zero.

Esercizi

- Si verifichi che su ogni retta passante per l'origine la funzione $f(x, y) = (x - y^2)(2x - y^2)$ ha un punto di minimo nell'origine ma che l'origine non è un punto di minimo per la funzione. Tale esempio è dovuto a G.Peano in un lavoro del 1884. Gli autori del libro E.Hairer, G.Warner *Analysis by its History* Springer Eds. 1995, a pag. 327, riportano che Peano scrisse quest'esempio per correggere un errore contenuto nel libro di Serret del 1868 (*Cours de calcul différentiel et integral*). Dicono anche, riportando opinioni di Peano stesso, che questa come altre correzioni del lavoro dei più grandi matematici francesi, dovuta ad uno "sconosciuto italiano di 25 anni", non fu felicemente accolta;

- Sia data la funzione $f \in C^2(E)$, $E = \overset{\circ}{E}$. Supponiamo che $\underline{\partial}f(\underline{y}) = \underline{0}$ per $\underline{y} \in E$ e la matrice hessiana $H_2(\underline{y})$ ha determinante non nullo (si dice che il punto critico è *non degenero*). Si dimostri che se in una determinata sfera chiusa $\overline{B_0}(r) \subset E$ vi sono solo punti critici non degeneri, allora essi sono in numero finito.

Si proceda in due passi. 1) Si dimostri che esiste un intorno di \underline{y} nel quale l'unico punto critico è \underline{y} .
 2) Nel secondo passo si supponga che in $\overline{B_0}(r)$ vi sia un numero infinito di punti critici non degeneri. Usando il Teorema di Bolzano Weierstrass e il fatto che $f \in C^2(E)$, si arrivi ad una contraddizione con il punto 1).

Supponiamo che il punto 1) sia falsa. Vuol dire che per ogni intorno del punto \underline{y} vi è almeno un punto, diciamo \underline{x}_o , tale che $\underline{\partial}f(\underline{x}_o) = \underline{0}$. Per il Teorema 2.5 abbiamo $\underline{\partial}f(\underline{y}) = \underline{\partial}f(\underline{x}_o) + H_2(\underline{y})(\underline{y} - \underline{x}_o) + o(\|\underline{y} - \underline{x}_o\|) = 0$. Poiché $\|\underline{y} - \underline{x}_o\|$ può essere piccola a piacere, si deve avere $H_2(\underline{y})(\underline{y} - \underline{x}_o) = \underline{0}$. Ciò è impossibile in quanto, essendo ovviamente $\underline{y} - \underline{x}_o \neq \underline{0}$, dovrebbe aversi $\det(H_2(\underline{y})) = 0$.

Supponiamo ora che in $\overline{B_0}(r)$ vi sia un numero infinito di punti critici non degeneri $\{\underline{x}_n\}$. Usando il Teorema di Bolzano Weierstrass tale successione ammette almeno un punto di accumulazione \underline{y} . Poiché $\underline{\partial}f(\underline{x})$ è una funzione continua, si ha $\underline{\partial}f(\underline{y}) = \underline{0}$ e quindi si contraddice il punto 1).

- Si trovino massimo e minimo assoluti della funzione $f(x, y) = x^2 + y^2$ con (x, y) all'interno del rombo di centro l'origine ed avente le due diagonali uguali a $2r$. I lati del rombo sono compresi.

Innanzitutto osserviamo che la funzione è continua e che l'insieme di definizione della funzione è compatto. Grazie al **Teorema 1.2** l'immagine della funzione è un insieme compatto e quindi ammette massimo e minimo. Tali massimo e minimo possono trovarsi all'interno dell'insieme oppure sul bordo dell'insieme. Se si trovano all'interno, per il **Teorema 3.1**, lì il gradiente della funzione deve annullarsi ed è immediato verificare che solo in $(x, y) = (0, 0)$ tale gradiente è nullo. Inoltre è chiaro che tale punto è di minimo assoluto essendo la funzione non negativa. Inoltre è evidente che non esistono altri punti di minimo assoluto essendo la funzione positiva. Il massimo assoluto va cercato sulla frontiera dell'insieme di definizione e possiamo restringere la ricerca al primo quadrante in quanto la funzione è simmetrica rispetto alle operazioni $x \rightarrow -x$ oppure $y \rightarrow -y$. Nel primo quadrante, la funzione ristretta al lato del rombo è $f(x, -x + r) = x^2 + (-x + r)^2 = 2x^2 - 2xr + r^2$ con $0 \leq x \leq r$. Il massimo della parabola rivolta verso l'alto è chiaramente raggiunto ai bordi dell'intervallo $[0, r]$ da cui il massimo di $f(x, y)$ uguale a r^2 .

- Si trovino massimo e minimo assoluti della funzione $f(x, y) = x^2 + y^2$ con (x, y) all'interno del rombo di centro l'origine ed avente le due diagonali uguali a $2r$. I lati del rombo non sono compresi

Alla luce del precedente calcolo possiamo dire che il minimo è 0 ma il massimo assoluto non esiste.

- (Esercizio più difficile). Sia data una funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile che ha un solo punto in cui la derivata si annulla e supponiamo che tale punto sia di minimo. Allora tale minimo è assoluto (o globale) ossia, detto x_0 il punto in cui $f'(x_0) = 0$ si ha $f(x) \geq f(x_0)$ per ogni x . La dimostrazione è facile. Se il minimo non è assoluto allora la funzione deve scendere sotto $f(x_0)$ ma nell'intorno di x_0 la funzione risale un poco sia a sinistra che a destra. Per ridiscendere deve per forza avere un massimo da qualche parte ed in quel punto la derivata deve annullarsi contraddicendo il fatto che l'unico punto in cui la derivata si annulla è x_0 .

L'esercizio consiste nel dimostrare lo stesso risultato per funzione di due variabili definite su \mathbb{R}^2 oppure produrre un controesempio ossia dare una funzione di due variabili avente un unico punto in cui il gradiente è nullo, tale punto è un minimo ma tale minimo non è assoluto.

- da [BD1]: 28–31; *esercizi in rete*: **6.7–14.7, 30.7**; da [BPS1] Esempi 4.5–4.9 pag. 402–406, 29–40 pag. 406, 42 pag.407. Da [BPS2] gli esercizi sono: 1) 6.1–6.4 pag. 443–447, 2) 6.5–6.9, 3) 48–54 pag. 453–454 escluso il 453

4 Il teorema delle funzioni implicite ^(4.1)

Supponiamo di volere studiare l'equazione di due variabili $f(x, y) = x - y - \varepsilon \ln(xy) = 0$ con $\varepsilon \in \mathbb{R}$. Si vorrebbe esplicitabile la relazione $f(x, y) = 0$ rispetto a x oppure y ma ciò è escluso a meno che $\varepsilon = 0$ nel qual caso la relazione diventa semplicemente $y = x$. Se $\varepsilon \neq 0$ si hanno i problemi che dicevamo. Alla questione risponde in parte il teorema delle funzioni implicite. Si considera un punto (x_0, y_0) tale che $f(x_0, y_0) = 0$ e tale che $f_x(x_0, y_0) \neq 0$ oppure $f_y(x_0, y_0) \neq 0$ oppure tutte e due. Il Teorema delle funzioni implicite ci consente di dire che, se ad esempio $f_y(x_0, y_0) \neq 0$, si ha $y = h(x)$ con $|x - x_0| < \delta(x_0, f)$ sotto certe condizioni sulla funzione $f(x, y)$.

La dimostrazione del Teorema delle funzioni implicite fa uso del Teorema delle contrazioni che ora dimostriamo.

Teorema 4.1 (delle contrazioni o del punto fisso) Sia $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ un operatore tale che $\|A(\underline{x}) - A(\underline{y})\| \leq \alpha \|\underline{x} - \underline{y}\|$ e $0 < \alpha < 1$. Allora esiste un unico punto \underline{z} tale che $A(\underline{z}) = \underline{z}$ (detto punto fisso).

Osservazione i) l'operatore può essere o non essere lineare; ii) L'operatore A può avere valori non necessariamente in tutto \mathbb{R}^n ma in uno spazio metrico completo dove una successione di Cauchy converge. Ad esempio potrebbe essere $A: \mathbb{R} \rightarrow [a, b]$. Si prenda ad esempio $A(x) = \frac{1}{2} \arctan x: \mathbb{R} \rightarrow [-\pi/4, \pi/4]$. L'operatore è una contrazione in quanto $\frac{1}{2} |\arctan x - \arctan y| \leq \frac{1}{2} |x - y|$ e quindi ammette un unico punto fisso che chiaramente è $x = 0$.

Dimostrazione Dato un qualsiasi punto \underline{x} consideriamo la successione $\{\underline{x}_k\} = \{A^k(\underline{x})\}$. Dimosteremo che $\{\underline{x}_k\}$ è di Cauchy e quindi converge essendo una successione di \mathbb{R}^n . $A^k(\underline{x})$ è la applicazione k volte dell'operatore A .

$\|A^2(\underline{x}) - A(\underline{x})\| < \alpha \|A(\underline{x}) - \underline{x}\|$, $\|A^3(\underline{x}) - A^2(\underline{x})\| < \alpha^2 \|A(\underline{x}) - \underline{x}\|$, e via dicendo. In generale, se $n \geq m$ abbiamo $\|A^n(\underline{x}) - A^m(\underline{x})\| < \alpha^m \|A^{n-m}(\underline{x}) - \underline{x}\| < \alpha^m (\|A^{n-m}(\underline{x}) - A^{n-m-1}(\underline{x})\| + \|A^{n-m-1}(\underline{x}) - A^{n-m-2}(\underline{x})\| + \dots + \|A(\underline{x}) - \underline{x}\|) < \alpha^m (\alpha^{n-m-1} + \alpha^{n-m-2} + \dots + 1) \|A(\underline{x}) - \underline{x}\| \leq \alpha^m \frac{1}{1-\alpha} \|A(\underline{x}) - \underline{x}\|$ e quindi la successione è di Cauchy in \mathbb{R}^n . La completezza ^(4.2) dello spazio \mathbb{R}^n implica che esiste $\underline{z} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \underline{x}_k$. Dobbiamo far vedere che $A(\underline{z}) = \underline{z}$ e che \underline{z} è unico.

$\|A(\underline{z}) - \underline{z}\| = \|A(\underline{z} - A^n(\underline{x}) + A^n(\underline{x})) - \underline{z} + A^{n+1}(\underline{x}) - A^{n+1}(\underline{x})\| < \|A^{n+1}(\underline{x}) - \underline{z}\| + \alpha \|\underline{z} - A^n(\underline{x})\|$ e quest'ultima è una quantità che può essere resa piccola a piacere. Dunque abbiamo $A(\underline{z}) = \underline{z}$. L'unicità deriva dal fatto che se esistessero due punti diversi \underline{z} e \underline{u} tali che $A(\underline{z}) = \underline{z}$ e $A(\underline{u}) = \underline{u}$ avremmo $\|\underline{z} - \underline{u}\| = \|A(\underline{z}) - A(\underline{u})\| \leq \alpha \|\underline{z} - \underline{u}\| < \|\underline{z} - \underline{u}\|$ il che è impossibile. ■

Osservazioni i) Se invece della relazione $\|A(\underline{x}) - A(\underline{y})\| \leq \alpha \|\underline{x} - \underline{y}\|$ e $0 < \alpha < 1$ si avesse $\|A(\underline{x}) - A(\underline{y})\| < \|\underline{x} - \underline{y}\|$, la conclusione del Teorema può non sussistere: si prenda $A(x) = \frac{\pi}{2} + x - \arctan x$. $A(x) - A(y) = (1 - \frac{1}{1+\xi^2})(x - y)$, $0 < 1 - \frac{1}{1+\xi^2} < 1$. Chiaramente $A(x) = x$ non è possibile. D'altra parte se $A(x) = \arctan x$ si ha $A(x) - A(y) = \frac{1}{1+\xi^2}(x - y)$ e ugualmente $0 < \frac{1}{1+\xi^2} < 1$. Stavolta però $A(0) = 0$ e quindi esiste il punto fisso.

Teorema 4.2 (delle funzioni implicite)

Ipotesi Sia data una funzione $\underline{F}(\underline{x}, \underline{y}): \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. tale che: 1) $\underline{F}(\underline{x}_0, \underline{y}_0) = \underline{0}$ 2) $\underline{F}(\underline{x}, \underline{y})$

^(4.1) Tale dimostrazione è presa dal libro di A.N.Kolmogorov, S.V.Fomin *Elementi di teoria delle funzioni e di analisi funzionale* edizioni Mir 1980 ma l'esposizione qui data è del tutto autoconsistente

^(4.2) La completezza è la proprietà per cui ogni successione di Cauchy converge ad un punto dello stesso spazio

è continua in $(\underline{x}_o, \underline{y}_o) : \forall \varepsilon > 0 \exists (\delta_\varepsilon, \rho_\varepsilon) : \|\underline{x} - \underline{x}_o\| < \delta_\varepsilon \wedge \|\underline{y} - \underline{y}_o\| < \rho_\varepsilon \Rightarrow \|\underline{F}(\underline{x}, \underline{y}) - \underline{F}(\underline{x}_o, \underline{y}_o)\| < \varepsilon$
 3) $\underline{F}_y(\underline{x}, \underline{y})$ è continua in $(\underline{x}_o, \underline{y}_o) : \forall \varepsilon > 0 \exists (\delta_\varepsilon, \rho_\varepsilon) : \|\underline{x} - \underline{x}_o\| < \delta_\varepsilon \wedge \|\underline{y} - \underline{y}_o\| < \rho_\varepsilon \Rightarrow \|\underline{F}_y(\underline{x}, \underline{y}) - \underline{F}_y(\underline{x}_o, \underline{y}_o)\| < \varepsilon$
 4) l'operatore lineare $\underline{F}_y(\underline{x}_o, \underline{y}_o) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ha inverso limitato e sia $A = \|(\underline{F}_y^{(-1)}(\underline{x}_o, \underline{y}_o))\| \doteq \sup_{\|v\| \leq 1} \|(\underline{F}_y^{(-1)}(\underline{x}_o, \underline{y}_o))v\|$ (4.3)

Indichiamo $X_\alpha \doteq \{\underline{x} : \|\underline{x} - \underline{x}_o\| < \alpha\}$ e $Y_\beta \doteq \{\underline{y} : \|\underline{y} - \underline{y}_o\| < \beta\}$

Tesi 1) Esiste un intorno X_α di \underline{x}_o tale che per ogni $\underline{x} \in X_\alpha$ esiste unico $\underline{y} \in \overline{Y}_\beta$ tale che $\underline{F}(\underline{x}, \underline{y}) = \underline{0}$.
 Risulta definita quindi una funzione $\underline{f} : X_\alpha \rightarrow \overline{Y}_\beta$ tale $\underline{F}(\underline{x}, \underline{f}(\underline{x})) \equiv 0$ in X_α . \underline{f} è continua in \underline{x}_o e inoltre per ogni coppia $(\underline{x}, \underline{y}) \in X_\alpha \times \overline{Y}_\beta$ tale che $\underline{F}(\underline{x}, \underline{y}) = 0$, risulta $\underline{y} = \underline{f}(\underline{x})$.

Dimostrazione Applichiamo il “Teorema delle Contrazioni” (o del Punto Fisso).

Contrazione Per ogni $\underline{x} \in X_{\delta_\varepsilon}$ definiamo la seguente funzione di $\underline{y} \in Y_{\rho_\varepsilon}$, $\underline{M}(\underline{x}, \underline{y}) \doteq \underline{y} - \underline{F}_y^{(-1)}(\underline{x}_o, \underline{y}_o)\underline{F}(\underline{x}, \underline{y})$. Cerchiamo il punto fisso di $\underline{M}(\underline{x}, \underline{y})$ ossia quel valore di \underline{y} per cui $\underline{M}(\underline{x}, \underline{y}) = \underline{y}$. Poiché il determinante di $\underline{F}_y^{(-1)}(\underline{x}_o, \underline{y}_o)$ è diverso da zero ne consegue che $\underline{F}(\underline{x}, \underline{y}) = \underline{0}$.

Si ha $\underline{M}(\underline{x}, \underline{y}) - \underline{M}(\underline{x}, \underline{y}') = \underline{F}_y^{(-1)}(\underline{x}_o, \underline{y}_o) \left(\underline{F}_y(\underline{x}_o, \underline{y}_o)(\underline{y} - \underline{y}') + \underline{F}(\underline{x}, \underline{y}') - \underline{F}(\underline{x}, \underline{y}) \right)$ e quindi, usando il teorema di Lagrange prima (che deriva dalla ipotesi 3) e la continuità poi (sempre dalla ipotesi 3) $\|\underline{M}(\underline{x}, \underline{y}) - \underline{M}(\underline{x}, \underline{y}')\| \leq A\|\underline{y} - \underline{y}'\| \cdot \|\underline{F}_y(\underline{x}, \underline{y}) - \underline{F}_y(\underline{x}_o, \underline{y}_o)\| \leq A\varepsilon\|\underline{y} - \underline{y}'\|$ ($\underline{y} \in [\underline{y}, \underline{y}'], [\underline{y}, \underline{y}'] = \{\underline{u} \in \mathbb{R}^n : \underline{u} = \lambda\underline{y} + (1-\lambda)\underline{y}', 0 \leq \lambda \leq 1\}$).

Prendiamo ε tale che $A\varepsilon \leq \frac{1}{2}$. In tal modo restano definiti δ_ε e ρ_ε .

$$\begin{aligned} \text{Invarianza} \quad \underline{M}(\underline{x}, \underline{y}) - \underline{y}_o &= \underline{M}(\underline{x}, \underline{y}) - \underline{M}(\underline{x}, \underline{y}_o) + \underline{M}(\underline{x}, \underline{y}_o) - \underline{y}_o = \underline{F}_y^{(-1)}(\underline{x}_o, \underline{y}_o) \left(-\underline{F}(\underline{x}, \underline{y}) + \underline{F}(\underline{x}, \underline{y}_o) + \right. \\ &\left. \underline{F}_y(\underline{x}_o, \underline{y}_o)(\underline{y} - \underline{y}_o) \right) - (\underline{F}_y^{(-1)}(\underline{x}_o, \underline{y}_o)) \left(\underline{F}(\underline{x}, \underline{y}_o) - \underline{F}(\underline{x}_o, \underline{y}_o) \right) = \\ &= \underline{F}_y^{(-1)}(\underline{x}_o, \underline{y}_o) \left(\underline{F}_y(\underline{x}, \underline{y}) - \underline{F}_y(\underline{x}_o, \underline{y}_o) \right) (\underline{y} - \underline{y}_o) - \underline{F}_y^{(-1)}(\underline{x}_o, \underline{y}_o) \left(\underline{F}(\underline{x}, \underline{y}_o) - \underline{F}(\underline{x}_o, \underline{y}_o) \right) \end{aligned}$$

Ora prendiamo ε' a cui corrisponde $X_{\delta_{\varepsilon'}}$. Per la ipotesi 3) si ha che $\underline{x} \in X_{\min\{\delta_{\varepsilon'}, \delta_\varepsilon\}} \wedge \underline{y} \in Y_{\rho_\varepsilon} \Rightarrow \|\underline{F}_y(\underline{x}, \underline{y}) - \underline{F}_y(\underline{x}_o, \underline{y}_o)\| < \varepsilon$ ed inoltre $\|\underline{F}(\underline{x}, \underline{y}_o) - \underline{F}(\underline{x}_o, \underline{y}_o)\| < \varepsilon'$. Si può quindi maggiorare $\|\underline{M}(\underline{x}, \underline{y}) - \underline{y}_o\| \leq A\varepsilon\rho_\varepsilon + A\varepsilon' \leq \rho_\varepsilon$ che è vera per $A\varepsilon' \leq \frac{1}{2}\rho_\varepsilon$

Possiamo applicare il Teorema delle Contrazioni e dire che $\forall \varepsilon, \varepsilon', \varepsilon' \leq \frac{1}{2A}\rho_\varepsilon, \varepsilon \leq \frac{1}{2A} \forall \underline{x} \in X_{\min\{\delta_{\varepsilon'}, \delta_\varepsilon\}}$ la mappa $\underline{M}(\underline{x}, \underline{y})$ è una contrazione da $\overline{Y}_{\rho_\varepsilon}$ in se stesso e quindi ammette un unico punto fisso \underline{y} essendo $\overline{Y}_{\rho_\varepsilon}$ completo. La coppia $(\underline{x}, \underline{y})$ verifica $\underline{M}(\underline{x}, \underline{y}) = 0$ e quindi $\underline{F}(\underline{x}, \underline{y}) = 0$. Per costruzione si è definita una funzione $\underline{f} : X_{\min\{\delta_{\varepsilon'}, \delta_\varepsilon\}} \rightarrow \overline{Y}_{\rho_\varepsilon}$ tale che $\underline{F}(\underline{x}, \underline{f}(\underline{x})) \equiv 0$ per $\underline{x} \in X_{\min\{\delta_{\varepsilon'}, \delta_\varepsilon\}}$. Poiché il Teorema delle Contrazioni comporta l'unicità e poiché $\underline{F}(\underline{x}_o, \underline{y}_o) = \underline{0}$, ne segue che $\underline{f}(\underline{x}_o) = \underline{y}_o$.

Poiché nella relazione $\|\underline{M}(\underline{x}, \underline{y}) - \underline{y}_o\| \leq A\varepsilon\rho_\varepsilon + A\varepsilon' \leq \rho_\varepsilon$ avremmo potuto sostituire a ρ_ε qualsiasi numero positivo r , prendendo $A\varepsilon < \frac{1}{2}r, A\varepsilon' < \frac{1}{2}r$, ne segue la continuità della funzione \underline{f} in \underline{x}_o . Infatti dobbiamo dimostrare che è possibile soddisfare la definizione $\forall r > 0 \exists \delta_r > 0 : \|\underline{x} - \underline{x}_o\| < \delta_r \Rightarrow \|\underline{y} - \underline{y}_o\| < r$. Dato r prendiamo ε che soddisfa $A\varepsilon \leq \frac{1}{2}r$ e ε' tale che $\varepsilon' \leq \frac{1}{2A}r$. Da essi scaturiscono δ_ε e $\delta_{\varepsilon'}$ da cui

(4.3) Essendo lo spazio \mathbb{R}^n ad un numero finito di dimensioni ed essendo gli elementi di $\underline{F}_y(\underline{x}, \underline{y})$ funzioni continue in $(\underline{x}_o, \underline{y}_o)$, la matrice $(\underline{F}_y(\underline{x}_o, \underline{y}_o))^{-1}$ esiste se e solo se $\underline{F}_y(\underline{x}_o, \underline{y}_o)$ ha determinante non nullo. Inoltre la matrice definisce un operatore lineare limitato data la continuità in $(\underline{x}_o, \underline{y}_o)$ degli elementi di $\underline{F}_y(\underline{x}, \underline{y})$.

Se $\underline{w} = A\underline{v}$ dove A è una matrice da \mathbb{R}^n in \mathbb{R}^m , si ha $\|\underline{w}\| = \left(\sum_{i=1}^m (w_i)^2 \right)^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n A_{i,j} v_j \right)^2 \right)^{1/2}$

$X_{\min\{\delta_{\varepsilon'}, \delta_\varepsilon\}}$. Il Teorema delle contrazioni ci dice che non appena $\underline{x} \in X_{\min\{\delta_{\varepsilon'}, \delta_\varepsilon\}}$ si ha $\underline{y} \in Y_r$ e quindi la continuità (è chiaro che $\min\{\delta_{\varepsilon'}, \delta_\varepsilon\}$ dipende da r).

Per dimostrare l'ultimo punto del Teorema supponiamo che esista una coppia $(\underline{x}, \underline{y})$ tale che $\underline{F}(\underline{x}, \underline{y})$ ma che $\underline{y} \neq \underline{f}(\underline{x})$. Chiaramente $\underline{M}(\underline{x}, \underline{y}) = \underline{y}$ essendo $\underline{F}(\underline{x}, \underline{y})$. Sia $\tilde{y} = \underline{f}(\underline{x})$. $\|\underline{y} - \tilde{y}\| = \|\underline{M}(\underline{x}, \underline{y}) - \underline{M}(\underline{x}, \tilde{y})\| \leq \frac{1}{2}\|\underline{y} - \tilde{y}\|$ il che è un assurdo a meno che $\|\underline{y} - \tilde{y}\| = 0$. ■

Osservazioni i) Non è detto si possa prendere $\varepsilon' = \varepsilon$ in quanto non è detto che $A\varepsilon\rho_\varepsilon + A\varepsilon \leq \rho_\varepsilon$. Ciò implica che il Teorema delle funzioni implicite ha carattere *locale* ossia sebbene il dominio della funzione \underline{F} , nelle variabili \underline{x} è $B_{\underline{x}_o}(\delta_\varepsilon)$, il dominio della funzione $\underline{f}(\underline{x})$ sarà in generale più piccolo (vedi $\delta_{\varepsilon'}$). Ad esempio si prenda $G(x, y) = x + \varepsilon - \varepsilon e^y$, $\varepsilon > 0$, che è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}$. Inoltre $G_y = -\varepsilon e^y \neq 0$ per ogni y . Invertendo si ha $y = \ln \frac{x+\varepsilon}{\varepsilon}$ che è definita evidentemente solo per $x > -\varepsilon$.
ii) È essenziale che l'operatore (matrice quadrata) $\underline{F}_y^{(-1)}(\underline{x}_o, \underline{y}_o)$ esista ossia che $\det(\underline{F}_y(\underline{x}_o, \underline{y}_o))$ sia diverso da zero. Se cade tale condizione il teorema non è applicabile. Ciò non vuol dire che non si possa arrivare alle sue conclusioni. Vuol dire solo che per arrivarvi non si può passare attraverso il Teorema delle Funzioni Implicite come mostrato alla fine del capitolo.

Corollario 4.1 *Nelle stessi ipotesi del Teorema 4.2, se $\underline{F}(\underline{x}, \underline{y})$ è continua in un intorno di $(\underline{x}_o, \underline{y}_o)$, allora $\underline{f}(\underline{x})$ è continua in un intorno di \underline{x}_o .*

Dimostrazione Sia $\alpha_\varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} \min\{\delta_{\varepsilon'}, \delta_\varepsilon\}$. Per ogni $\underline{x}, \underline{x}' \in X_{\alpha_\varepsilon}$ si ha $\underline{F}(\underline{x}, \underline{f}(\underline{x})) = 0 = \underline{F}(\underline{x}', \underline{f}(\underline{x}'))$ per cui $(\underline{F}(\underline{x}, \underline{f}(\underline{x})) - \underline{F}(\underline{x}, \underline{f}(\underline{x}')) + (\underline{F}(\underline{x}, \underline{f}(\underline{x}')) - \underline{F}(\underline{x}', \underline{f}(\underline{x}')))) = 0$. Dobbiamo far vedere che $\underline{x} \rightarrow \underline{x}' \Rightarrow \underline{f}(\underline{x}) \rightarrow \underline{f}(\underline{x}')$.

Quando $\underline{x} \rightarrow \underline{x}'$ il secondo termine tende a zero per via della continuità della $\underline{F}(\underline{x})$ in un intorno di \underline{x}_o . Riscriviamo il primo come $(\underline{F}(\underline{x}, \underline{f}(\underline{x})) - \underline{F}(\underline{x}, \underline{f}(\underline{x}')) = (\underline{F}_y(\underline{x}, \underline{f}(\tilde{x})) - \underline{F}_y(\underline{x}_o, \underline{y}_o))(\underline{f}(\underline{x}) - \underline{f}(\underline{x}')) + \underline{F}_y(\underline{x}_o, \underline{y}_o)(\underline{f}(\underline{x}) - \underline{f}(\underline{x}'))$, $\underline{f}(\tilde{x}) \in [\underline{f}(\underline{x}), \underline{f}(\underline{x}')] (si è usato il Teorema 2.1)$. Per la continuità di \underline{f} in \underline{x}_o abbiamo $\|\underline{f}(\underline{x}) - \underline{f}(\underline{x}')\| \leq 2\rho_\varepsilon$ non appena $\|\underline{x} - \underline{x}_o\| \leq a_\varepsilon$ e $\|\underline{x}' - \underline{x}_o\| \leq a_\varepsilon$. Inoltre $\|\underline{f}(\tilde{x}) - \underline{y}_o\| \leq \rho_\varepsilon$ per $\|\underline{x} - \underline{x}_o\| \leq a_\varepsilon$ e $\|\underline{x}' - \underline{x}_o\| \leq a_\varepsilon$ in quanto $\underline{f}(\tilde{x})$ sta sul segmento che congiunge $\underline{f}(\underline{x})$ e $\underline{f}(\underline{x}')$. Ne segue che $\|\underline{F}_y(\underline{x}, \underline{f}(\tilde{x})) - \underline{F}_y(\underline{x}_o, \underline{y}_o)\| < \varepsilon$ e quindi $\|\underline{F}_y(\underline{x}, \underline{f}(\tilde{x})) - \underline{F}_y(\underline{x}_o, \underline{y}_o)\| \cdot \|\underline{f}(\underline{x}) - \underline{f}(\underline{x}')\| \leq \varepsilon 2\rho_\varepsilon$. L'ultimo pezzo da esaminare è $\underline{F}_y(\underline{x}_o, \underline{y}_o)(\underline{f}(\underline{x}) - \underline{f}(\underline{x}'))$. Se f non fosse continua in \underline{x}' allora $\|f(\underline{x}_{\frac{1}{n}}) - \underline{f}(\underline{x}')\| \geq b$, $\underline{x}_{\frac{1}{n}} \in B_{\underline{x}'}(\frac{1}{n})$. Inoltre dalla relazione riguardante gli operatori lineari invertibili con inverso limitato, segue che $\|A\underline{v}\| \geq \frac{\|\underline{v}\|}{\|A^{-1}\|}$ (4.4) e quindi $\|\underline{F}_y(\underline{x}_o, \underline{y}_o)(\underline{f}(\underline{x}_{\frac{1}{n}}) - \underline{f}(\underline{x}'))\| \geq \|f(\underline{x}_{\frac{1}{n}}) - \underline{f}(\underline{x}')\| \cdot \|(\underline{F}_y(\underline{x}_o, \underline{y}_o))^{-1}\|^{-1} \geq b\|(\underline{F}_y(\underline{x}_o, \underline{y}_o))^{-1}\|^{-1}$ e questo è in contraddizione con il fatto che $(\underline{F}(\underline{x}, \underline{f}(\underline{x})) - \underline{F}(\underline{x}, \underline{f}(\underline{x}')) = \underline{0}$. ■

Corollario 4.2 *Assumiamo le stesse ipotesi del Teorema 4.2. Se inoltre $\underline{F}_x(\underline{x}, \underline{y})$ è differenziabile rispetto a \underline{x} in $(\underline{x}_o, \underline{y}_o)$, allora $\underline{f}(\underline{x})$ è differenziabile in \underline{x}_o e vale $\underline{f}'_x(\underline{x}_o, \underline{y}_o) = -(\underline{F}_y(\underline{x}_o, \underline{y}_o))^{-1}\underline{F}_x(\underline{x}_o, \underline{y}_o)$*

Dimostrazione Dimostriamo dapprima che la quantità $\frac{\|\underline{f}(\underline{x}) - \underline{f}(\underline{x}_o)\|}{\|\underline{x} - \underline{x}_o\|}$ è una quantità limitata in un intorno di \underline{x}_o con esclusione ovviamente di \underline{x}_o stesso. $\underline{0} = (\underline{F}(\underline{x}, \underline{f}(\underline{x})) - \underline{F}(\underline{x}_o, \underline{f}(\underline{x}_o))) = [\underline{F}(\underline{x}, \underline{f}(\underline{x})) - \underline{F}(\underline{x}, \underline{f}(\underline{x}_o))] + [\underline{F}(\underline{x}, \underline{f}(\underline{x}_o)) - \underline{F}(\underline{x}_o, \underline{f}(\underline{x}_o))]$. Ora $\underline{F}(\underline{x}, \underline{f}(\underline{x}_o)) - \underline{F}(\underline{x}_o, \underline{f}(\underline{x}_o)) = \underline{F}_x(\tilde{x}, \underline{f}(\underline{x}_o))(\underline{x} - \underline{x}_o)$ e $\underline{F}(\underline{x}, \underline{f}(\underline{x})) - \underline{F}(\underline{x}, \underline{f}(\underline{x}_o)) = \underline{F}_y(\underline{x}, \tilde{y})(\underline{f}(\underline{x}) - \underline{f}(\underline{x}_o))$, \tilde{y} appartiene al segmento che congiunge $\underline{f}(\underline{x}_o)$ e $\underline{f}(\underline{x})$. Dunque abbiamo $\underline{0} = \underline{F}_x(\tilde{x}, \underline{f}(\underline{x}_o))(\underline{x} - \underline{x}_o) + \underline{F}_y(\underline{x}, \tilde{y})(\underline{f}(\underline{x}) - \underline{f}(\underline{x}_o))$ (si è usato due volte il Teorema di

(4.4) Deriva dalla relazione $\|\underline{v}\| = \|A^{-1}A\underline{v}\| \leq \|A^{-1}\| \|A\underline{v}\|$

Lagrange). Dividendo ora per $\|\underline{x} - \underline{x}_o\|$ otteniamo

$$\begin{aligned} \underline{0} &= \underline{F}_{\underline{x}}(\tilde{\underline{x}}, \underline{f}(\underline{x}_o))(\underline{x} - \underline{x}_o) + \underline{F}_{\underline{y}}(\underline{x}, \tilde{\underline{y}})(\underline{f}(\underline{x}) - \underline{f}(\underline{x}_o)) = \\ &= \underline{F}_{\underline{x}}(\tilde{\underline{x}}, \underline{f}(\underline{x}_o)) \frac{(\underline{x} - \underline{x}_o)}{\|\underline{x} - \underline{x}_o\|} + (\underline{F}_{\underline{y}}(\underline{x}, \tilde{\underline{y}}) - \underline{F}_{\underline{y}}(\underline{x}_o, \underline{y}_o)) \frac{(\underline{f}(\underline{x}) - \underline{f}(\underline{x}_o))}{\|\underline{x} - \underline{x}_o\|} + \underline{F}_{\underline{y}}(\underline{x}_o, \underline{y}_o) \frac{(\underline{f}(\underline{x}) - \underline{f}(\underline{x}_o))}{\|\underline{x} - \underline{x}_o\|} \end{aligned}$$

Essendo $\underline{F}_{\underline{x}}$ continua in $(\underline{x}_o, \underline{y}_o)$, esiste $r > 0$ tale che $\sup_{\underline{x} \in B_{\underline{x}_o}(r)} \|\underline{F}_{\underline{x}}(\underline{x}, \underline{y}_o)\| = B < \infty$ ^(4.5)

Inoltre $\|\underline{F}_{\underline{y}}(\underline{x}, \tilde{\underline{y}}) - \underline{F}_{\underline{y}}(\underline{x}_o, \underline{y}_o)\| < \varepsilon$ non appena $\|\underline{x} - \underline{x}_o\| < \alpha_\varepsilon$ e $\|\tilde{\underline{y}} - \underline{y}_o\| < \rho_\varepsilon$ $\alpha_\varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} \min\{\delta_{\varepsilon'}, \delta_\varepsilon\}$.

$$\|\underline{F}_{\underline{y}}(\underline{x}_o, \underline{y}_o)(\underline{f}(\underline{x}) - \underline{f}(\underline{x}_o))\| \geq (\|\underline{F}_{\underline{y}}^{-1}(\underline{x}_o, \underline{y}_o)\|)^{-1} \|\underline{f}(\underline{x}) - \underline{f}(\underline{x}_o)\|$$

Mettendo tutto assieme avremmo che $0 \geq ((\|\underline{F}_{\underline{y}}^{-1}(\underline{x}_o, \underline{y}_o)\|)^{-1} - \varepsilon) \frac{\|\underline{f}(\underline{x}) - \underline{f}(\underline{x}_o)\|}{\|\underline{x} - \underline{x}_o\|} - B$ per ogni $\|\underline{x} - \underline{x}_o\| < \alpha_\varepsilon$

e la disuguaglianza è impossibile se $\varepsilon < (\|\underline{F}_{\underline{y}}^{-1}(\underline{x}_o, \underline{y}_o)\|)^{-1}$ e $\frac{\|\underline{f}(\underline{x}) - \underline{f}(\underline{x}_o)\|}{\|\underline{x} - \underline{x}_o\|}$ è illimitata.

Sia ora $\underline{0} = \underline{F}(\underline{x}_o + \underline{h}, \underline{f}(\underline{x}_o + \underline{h})) - \underline{F}(\underline{x}_o, \underline{f}(\underline{x}_o)) = [\underline{F}(\underline{x}_o + \underline{h}, \underline{f}(\underline{x}_o)) - \underline{F}(\underline{x}_o, \underline{f}(\underline{x}_o))] + [\underline{F}(\underline{x}_o + \underline{h}, \underline{f}(\underline{x}_o + \underline{h})) - \underline{F}(\underline{x}_o + \underline{h}, \underline{f}(\underline{x}_o))] = \underline{F}_{\underline{x}}(\underline{x}_o, \underline{f}(\underline{x}_o))\underline{h} + o(\|\underline{h}\|) + \underline{F}_{\underline{y}}(\underline{x}_o + \underline{h}, \tilde{\underline{y}})(\underline{f}(\underline{x}_o + \underline{h}) - \underline{f}(\underline{x}_o)) = \underline{F}_{\underline{x}}(\underline{x}_o, \underline{f}(\underline{x}_o))\underline{h} + o(\|\underline{h}\|) + (\underline{F}_{\underline{y}}(\underline{x}_o + \underline{h}, \tilde{\underline{y}}) - \underline{F}_{\underline{y}}(\underline{x}_o + \underline{h}, \underline{y}_o))(\underline{f}(\underline{x}_o + \underline{h}) - \underline{f}(\underline{x}_o)) + (\underline{F}_{\underline{y}}(\underline{x}_o + \underline{h}, \underline{y}_o) - \underline{F}_{\underline{y}}(\underline{x}_o, \underline{y}_o))(\underline{f}(\underline{x}_o + \underline{h}) - \underline{f}(\underline{x}_o)) + \underline{F}_{\underline{y}}(\underline{x}_o, \underline{y}_o)(\underline{f}(\underline{x}_o + \underline{h}) - \underline{f}(\underline{x}_o))$

$(\underline{F}_{\underline{y}}(\underline{x}_o + \underline{h}, \tilde{\underline{y}}) - \underline{F}_{\underline{y}}(\underline{x}_o + \underline{h}, \underline{y}_o))(\underline{f}(\underline{x}_o + \underline{h}) - \underline{f}(\underline{x}_o)) = o(\|\underline{h}\|)$. Infatti dividiamo tutto per $\|\underline{h}\|$ e otteniamo

$\|\underline{h}\|(\underline{F}_{\underline{y}}(\underline{x}_o + \underline{h}, \tilde{\underline{y}}) - \underline{F}_{\underline{y}}(\underline{x}_o + \underline{h}, \underline{y}_o)) \frac{(\underline{f}(\underline{x}_o + \underline{h}) - \underline{f}(\underline{x}_o))}{\|\underline{h}\|}$. Dal risultato precedente $\frac{(\underline{f}(\underline{x}_o + \underline{h}) - \underline{f}(\underline{x}_o))}{\|\underline{h}\|}$ è limitata

e $\|\underline{h}\|(\underline{F}_{\underline{y}}(\underline{x}_o + \underline{h}, \tilde{\underline{y}}) - \underline{F}_{\underline{y}}(\underline{x}_o + \underline{h}, \underline{y}_o))$ è un $o(\|\underline{h}\|)$ grazie al fatto che $\underline{F}_{\underline{y}}(\underline{x}, \underline{y})$ è continua in un intorno di $(\underline{x}_o, \underline{y}_o)$ (basta scrivere $\underline{F}_{\underline{y}}(\underline{x}_o + \underline{h}, \tilde{\underline{y}}) - \underline{F}_{\underline{y}}(\underline{x}_o + \underline{h}, \underline{y}_o) = (\underline{F}_{\underline{y}}(\underline{x}_o + \underline{h}, \tilde{\underline{y}}) - \underline{F}_{\underline{y}}(\underline{x}_o, \tilde{\underline{y}})) + (\underline{F}_{\underline{y}}(\underline{x}_o, \tilde{\underline{y}}) - \underline{F}_{\underline{y}}(\underline{x}_o, \underline{y}_o)) + (\underline{F}_{\underline{y}}(\underline{x}_o, \underline{y}_o) - \underline{F}_{\underline{y}}(\underline{x}_o + \underline{h}, \underline{y}_o))$

Per $(\underline{F}_{\underline{y}}(\underline{x}_o + \underline{h}, \underline{y}_o) - \underline{F}_{\underline{y}}(\underline{x}_o, \underline{y}_o))(\underline{f}(\underline{x}_o + \underline{h}) - \underline{f}(\underline{x}_o))$ valgono le stesse considerazioni solo che si usa la continuità di $\underline{F}_{\underline{y}}(\underline{x}, \underline{y})$ in $(\underline{x}_o, \underline{y}_o)$.

Mettendo tutto assieme si ottiene $\underline{0} = \underline{F}_{\underline{x}}(\underline{x}_o, \underline{f}(\underline{x}_o)) \cdot \underline{h} + o(\|\underline{h}\|) + \underline{F}_{\underline{y}}(\underline{x}_o, \underline{y}_o) \cdot (\underline{f}(\underline{x}_o + \underline{h}) - \underline{f}(\underline{x}_o))$ da cui $\underline{f}(\underline{x}_o + \underline{h}) - \underline{f}(\underline{x}_o) = -\underline{F}_{\underline{y}}(\underline{x}_o, \underline{f}(\underline{x}_o))^{-1} \underline{F}_{\underline{x}}(\underline{x}_o, \underline{f}(\underline{x}_o)) \cdot \underline{h} + o(\|\underline{h}\|)$ e quindi la differenziabilità di $\underline{f}(\underline{x})$ in \underline{x}_o . ■

Corollario 4.3 (dell'applicazione inversa) Sia data $\underline{F}(\underline{x}): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una funzione tale che: 1) \underline{F} e $\underline{F}_{\underline{x}}$ sono continue in \underline{x}_o 2) l'operatore lineare $\underline{F}_{\underline{x}}(\underline{x}_o)$ ha inverso limitato. Allora in un intorno di \underline{x}_o la funzione \underline{F} è invertibile e l'inversa è unica

Dimostrazione Sia $\underline{y}_o \stackrel{\text{def}}{=} \underline{F}(\underline{x}_o)$, $\underline{y}_o \in \mathbb{R}^n$. La funzione $\underline{G}(\underline{x}, \underline{y}) = \underline{F}(\underline{x}) - \underline{y}$ soddisfa le ipotesi del Teorema 4.2 e quindi la tesi. ■

Sia $\underline{x} = \underline{X}(\underline{y})$ la funzione inversa: $\underline{F}(\underline{X}(\underline{y})) = \underline{y}$. Poiché $\underline{G}_{\underline{y}} = -Id$, sono verificate le ipotesi del Corollario 4.2 e quindi abbiamo $\underline{X}_{\underline{y}}(\underline{y}_o) = (\underline{F}_{\underline{x}})^{-1}(\underline{X}(\underline{y}_o)) = (\underline{F}_{\underline{x}})^{-1}(\underline{x}_o)$. ■

^(4.5) si dia una stima di B

Le applicazioni del teorema delle funzioni implicite sono innumerevoli. Nel quadro di codeste lezioni servirà successivamente per formulare una teoria degli estremi vincolati. Già da ora possiamo risolvere degli esercizi concreti altrimenti irrisolvibili.

A proposito della condizione $\det \underline{F}_y(\underline{x}_0, \underline{y}_0) = 0$

Si consideri la funzione $F(x, y) = x^2 - y$ e si voglia risolvere l'equazione $F(x, y) = 0$ attraverso l'uso del Teorema delle Funzioni Implicite che possiamo certamente applicare osservando che $\underline{F}(0, 0) = 0$ e $F_y(0, 0) = 1$. Otteniamo $y = f(x)$ e grazie all'unicità contenuta nel teorema, sappiamo che $f(x) = x^2$ ossia $y = x^2$. Se ora volessimo risolvere la stessa equazione $F(x, y) = 0$ come $x = g(y)$ ossia $F(g(y), y) \equiv 0$ saremmo in seria difficoltà in quanto $F_x(0, 0) = 0$ e quindi il Teorema delle Funzioni Implicite non è applicabile. Infatti sappiamo che la relazione $F(x, y) = 0$ non è esplicitabile in funzione di y nell'intorno di $(x, y) = (0, 0)$. La sua esplicitazione equivale a risolvere l'equazione $x^2 = y$ in funzione di y e sappiamo

che essa dà $x = g(y) = \begin{cases} \sqrt{y} & \text{se } x > 0 \\ -\sqrt{y} & \text{se } x < 0 \end{cases}$ e non è una funzione. Tornando alla esplicitazione rispetto a

x , la relazione $y = x^2$ ottenuta semplicemente risolvendo l'equazione in questione, si può ottenere anche attraverso il Corollario 4.2 e la sua generalizzazione al caso in cui la funzione $\underline{F}(\underline{x}, \underline{y})$ sia più regolare in $(\underline{x}_0, \underline{y}_0)$. Sia infatti $y = f(x)$ la funzione ottenuta applicando il Teorema delle Funzioni Implicite.

Abbiamo $f'(0) = -\frac{F_x(0,0)}{F_y(0,0)} = 0$. Dal fatto che $F(x, f(x)) \equiv 0$ si ottiene (tralasciamo la dimostrazione) che $f''(0) = -(F_y(0,0))^{-1} (F_{xx}(0,0) + 2F_{yx}(0,0) \cdot f'(0) + F_{yy}(0,0) \cdot (f'(0))^2)$ e quindi $f''(0) = 2$. Tutte le derivate successive della $f(x)$ sono nulle in quanto entrano le derivate terze della $F(x, y)$ che sono tutte nulle. Quindi otteniamo $f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 = x^2$ ossia abbiamo riottenuto quanto già sapevamo per calcolo diretto.

Da un punto di vista geometrico, il fatto che $F_x(0, 0) = 0$ significa che la retta tangente alla parabola nel punto $x = 0$ è la retta orizzontale che non è una funzione di y . Da questo fatto nasce l'impossibilità di esplicitare rispetto a y l'equazione $F(x, y) = 0$.

Se rifacciamo ora gli stessi conti nel caso del punto $(1, 1)$ le cose stanno in modo parzialmente diverso. $(1, 1)$ è un punto regolare sia se vogliamo risolvere l'equazione $F(x, f(x)) \equiv 0$ sia se vogliamo risolvere l'equazione $F(g(y), y) \equiv 0$. Abbiamo $F_x(1, 1) = 2$, $F_y(1, 1) = -1$, $F_{yx}(1, 1) \equiv 0$.

Primo caso: $F(x, f(x)) \equiv 0$ $f(x) = f(1) + f'(1)(x - 1) + \frac{1}{2}f''(1)(x - 1)^2 + \text{Ordini superiori}$. $f'(1) = 2$, $f''(1) = 2$ e quindi $f(x) = 1 + 2(x - 1) + (x - 1)^2$ che è chiaramente uguale a x^2 . Gli Ordini superiori sono nulli chiaramente.

Secondo caso: $F(g(y), y) \equiv 0$ $g'(1) = -\frac{F_y(1,1)}{F_x(1,1)}$, $g''(1) = -(F_x(1,1))^{-1} [F_{yy}(1,1) + 2F_{yx}(1,1) \cdot g'(1) + F_{xx}(1,1) \cdot (g'(1))^2]$ e sostituendo si ottiene $g(y) = g(1) + g'(1)(y - 1) + \frac{1}{2}g''(1)(y - 1)^2 + \text{Ordini superiori}$. Il risultato è $g(y) = 1 + \frac{1}{2}(y - 1) + \frac{1}{8}(-1)(y - 1)^2 + \text{Ordini superiori} = \frac{1}{8}(-y^2 + 6y + 3) + \text{Ordini superiori}$ e stavolta gli Ordini superiori non sono nulli (darne una spiegazione).

Facciamo ora le stesse considerazioni in un contesto più generale. Vogliamo risolvere il sistema

$$\begin{cases} x_3 - x_1^2 - x_2^2 = 0 \\ x_3 - x_2^2 + x_1^2 = 0 \end{cases} \text{ nell'intorno del punto } P \equiv (0, 0, 0) \text{ ossia trovare due qualsiasi delle variabili, diciamo}$$

x_1, x_2 , tale che $x_1 = X_1(x_3)$ e $x_2 = X_2(x_3)$ e $X_1(0) = X_2(0) = 0$. La scelta delle variabili indipendenti

possibili dipende spesso da come è fatta la matrice Jacobiana nell'intorno del punto P . Volendo applicare infatti il Teorema delle Funzioni Implicite, ci imbattiamo nella matrice $M = \begin{pmatrix} -2x_1 & -2x_2 & 1 \\ 2x_1 & -2x_2 & 1 \end{pmatrix}$ che calcolata in P diventa $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Come si vede M ha rango 1^(4.6) e quindi il Teorema delle funzioni implicite è inapplicabile. Il fatto che il rango sia uno, significa che *una sola delle variabili è indipendente* e infatti risolvendo il sistema dato si ottiene $X_3(x_1, x_2) = x_2^2$ ossia $x_3 = x_2^2$ che è una parabola sul piano (x_2, x_3) .

Se invece volessimo risolvere il sistema $\begin{cases} x_3^2 - x_1^2 - x_2^2 = 0 \\ x_3^2 - x_2^2 + x_1^2 = 0 \end{cases}$ nell'intorno del punto $P \equiv (0, 0, 0)$ usando il Teorema delle Funzioni Implicite, la matrice M in questo caso avrebbe rango 0. Ciò vuol dire che il luogo dei punti che risolve il sistema non è scrivibile come il grafico di alcuna funzione. Risolvendo il sistema otterremmo infatti $x_2^2 = x_3^2$ che non è il grafico di alcuna funzione.

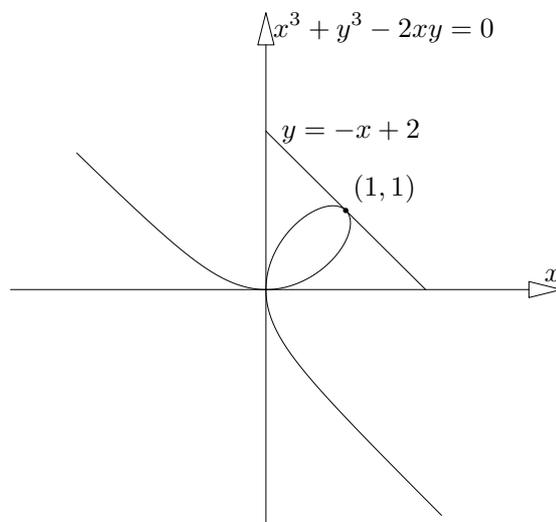
Applicazioni

- Si calcoli la tangente alla curva di equazione $F(x, y) = x^3 + y^3 - 2xy = 0$ nel punto $(1, 1)$.

Se avessimo la curva nella forma $y = C(x)$ la soluzione sarebbe immediata. Essendo $F_y(1, 1) = 1 \neq 0$, dal Teorema delle funzioni implicite possiamo però ricavare $y = C(x)$ *localmente nell'intorno del punto* $(1, 1)$ e anche la sua derivata: $\frac{dC}{dx} = -(3y^2 - 2x)^{-1}(3x^2 - 2y) \Big|_{(1,1)} = -1$ (si applichi il **Corollario 4.2**).

La retta tangente è $y = 1 - (x - 1) = -x + 2$

Una analoga domanda relativa al punto $(0, 0)$ non otterrebbe risposta essendo $F_y(0, 0) = 0$. $(0, 0)$ non è un punto regolare.



^(4.6) Il fatto che M abbia rango 1 si riflette nel fatto che M manda due vettori linearmente *indipendenti* di \mathbb{R}^3 in due

vettori linearmente *dependenti* di \mathbb{R}^2 . Infatti $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c \\ c \\ 0 \end{pmatrix} = c \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ qualunque siano a e b .

Quindi prendendo ad esempio i vettori $v_1=(a,b,c)=(1,1,c)$ e $v_2=(a',b',c')=(1,0,c')$, $c \cdot c' = -1$, otteniamo due vettori linearmente dipendenti a fronte del fatto che v_1 e v_2 fossero linearmente indipendenti.

- Si trovi il piano tangente alla funzione definita implicitamente dall'equazione $F(x, y, z) = x + y + z^2 - \cos(xyz)$ nel punto $(x, y, z) = (0, 0, 0)$.

$F_x = 1 + yz \sin(xyz)$, $F_y = 1 + xz \sin(xyz)$, $F_z = 2z + xy \sin(xyz)$, e $F_x(0, 0, 0) \neq 0$ per cui localmente possiamo scrivere $x = X(y, z)$ da cui il piano tangente alla funzione $F(x, y, z)$ è dato da $x = X_y(0, 0)y + X_z(0, 0)z$. $X_y(0, 0) = -\frac{F_y(0,0,0)}{F_x(0,0,0)} = -1$, $X_z(0, 0) = -\frac{F_z(0,0,0)}{F_x(0,0,0)} = 0$, e il piano tangente è $x = -y$.

5 curve e superfici: definizioni

Il materiale è del tutto standard e qualsiasi libro riporta le stesse definizioni,

Definizione 5.1 Una applicazione $\underline{\gamma}: [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ è detta *curva* $\underline{\gamma} = \underline{\gamma}(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t))$, $[a, b] = I$ i) $\underline{\gamma}(t)$ è di classe C^k se γ_i è di classe C^k per ogni i ii) se $\underline{\gamma}(t) \in C^1(I, \mathbb{R})$ e $\underline{\gamma}'(t) \neq \underline{0}$ per ogni $t \in \overset{\circ}{I}$, la curva è detta *regolare*. iii) $\underline{\gamma}$ è *regolare a tratti* se è possibile suddividere I in m sottointervalli I_1, \dots, I_m chiusi in ognuno dei quali la curva è regolare ed inoltre $\underline{\gamma} \in C^0(I; \mathbb{R})$ ^(5.1) iv) se $\underline{\gamma}(a) = \underline{\gamma}(b)$ la curva è *chiusa*. v) se $t \neq t' \Rightarrow \underline{\gamma}(t) \neq \underline{\gamma}(t')$ e almeno uno fra t e t' non è estremo dell'intervallo $[a, b]$ la curva è detta *semplice*. vi) l'insieme $\{\underline{x} \in \mathbb{R}^n: \underline{x} = \underline{\gamma}(t), t \in I\} \in \mathbb{R}^n$ è detto il *sostegno della curva*

$\underline{\gamma}'(t)$ è il vettore tangente alla curva nel punto $\underline{\gamma}(t)$

Esempi

- Sia $t \in [0, 2\pi]$ $\underline{\gamma}(t) = \begin{cases} \cos t \\ \sin t \end{cases}$. La curva è :

regolare in quanto $\underline{\gamma}'(t) = (-\sin t, \cos t)$ e tale vettore non ha mai le componenti tutte nulle e inoltre le funzioni sono $C^1([0, 2\pi]; \mathbb{R})$.

chiusa $\underline{\gamma}(0) = \underline{\gamma}(2\pi)$ *semplice* infatti se $\cos t = \cos t'$ e $\sin t = \sin t'$ vuol dire che $\tan t = \tan t'$ per cui $t - t' = 0, -\pi, \pi$ e inoltre c'è il caso $t = 0, t' = 2\pi$. Ma se $t = t' \pm \pi$ (ad esempio) allora $\sin t = -\sin t'$ da cui il fatto che $\gamma_2(t) \neq \gamma_2(t')$. Se $t = 0$ e $t' = 2\pi$ allora $\underline{\gamma}(0) = \underline{\gamma}(2\pi)$ ma i valori sono tutti e due agli estremi. Non rimane che $t = t'$

Il *sostegno* della curva è la circonferenza di raggio 1 come ben noto. Il vettore tangente punto per punto è $\underline{\gamma}'(t) = (\cos t, -\sin t)$ mentre il vettore ortogonale alla curva è $\underline{v} = (\sin t, \cos t)$ e $\underline{\gamma}'(t) \cdot \underline{v} = 0$

- Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione con derivata continua. La curva $\underline{\gamma}(t) = \begin{cases} t \\ f(t) \end{cases}$ è : *regolare* in quanto

$\underline{\gamma}'(t) = (1, f'(t)) \neq \underline{0}$ per ogni t e $f \in C^1([a, b]; \mathbb{R})$ *semplice* poiché se $t \neq t'$ allora $\gamma_1(t) \neq \gamma_1(t')$. Il sostegno è il grafico della funzione.

- Sia $t \in [0, 2\pi]$ $\underline{\gamma}(t) = \begin{cases} \cos(t-1)^2 \\ \sin(t-1)^2 \end{cases}$. La curva è :

non è regolare in quanto $\underline{\gamma}'(t) = 2(t-1)(-\sin(t-1)^2, \cos(t-1)^2) = \underline{0}$ per $t = 1$

chiusa $\underline{\gamma}(0) = \underline{\gamma}(2\pi)$; *non è semplice* in quanto, ad esempio, $\underline{\gamma}(\sqrt{\frac{\pi}{4}}) = \underline{\gamma}(\sqrt{\frac{\pi}{4}} + 2\pi)$

- Sia $t \in [0, 4\pi]$ $\underline{\gamma}(t) = \begin{cases} \cos t \\ \sin t \end{cases}$. La curva è :

regolare in quanto $\underline{\gamma}'(t) = (-\sin t, \cos t)$ e tale vettore non ha mai le componenti tutte nulle inoltre le funzioni sono $C^1([0, 2\pi]; \mathbb{R})$.

^(5.1) significa che $\underline{\gamma}(t)$ $t \in I_j$ è regolare e che la curva, estesa a tutto I è solo continua in quanto vi sono i punti di suddivisione dell'intervallo in cui può perdersi la derivabilità oppure la continuità della derivata qualora la curva continui ad essere ivi derivabile

chiusa $\underline{\gamma}(0) = \underline{\gamma}(4\pi)$ non è semplice infatti se $\cos \pi = \cos 3\pi$ e $\sin \pi = \sin 3\pi$

Il sostegno della curva è la circonferenza di raggio 1.

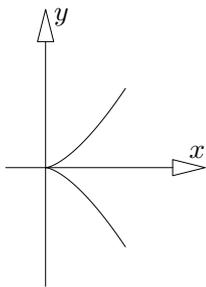
• Sia $t \in [0, 1]$ $\underline{\gamma}(t) = \begin{cases} t^2 \\ t^3 \end{cases}$. La curva è: regolare in quanto $\underline{\gamma}'(0) \neq \underline{0}$ per ogni $t \neq 0$ e quindi $t \in \overset{\circ}{I}$

non chiusa, semplice. Se avessimo considerato $t \in [-1, 1]$, $\underline{\gamma}(t) = \begin{cases} t^2 \\ t^3 \end{cases}$ sarebbe stata non regolare in

quanto $\underline{\gamma}'(0) = \underline{0}$ ma $\underline{0}$ è un punto interno. La curva in questione è regolare a tratti. Se si dovesse dare

la rappresentazione cartesiana del sostegno della curva si dovrebbe scrivere $f(x) = \begin{cases} x^{3/2} & y > 0 \\ -x^{3/2} & y \leq 0 \end{cases}$ e

chiaramente non è una funzione. Il grafico sarebbe il seguente:



Un altro esempio è $\underline{\gamma}(t) = \begin{cases} t \\ |t| \end{cases}$, $t \in [0, 1]$. La curva è regolare in quanto $\underline{\gamma}'(t)$ esiste ed è diversa da

zero in tutti i punti dell'intervallo $(0, 1]$. Se invece consideriamo $\underline{\gamma}(t) = \begin{cases} t \\ |t| \end{cases}$, $t \in [-1, 1]$ allora la curva

è non regolare in quanto per $t = 0$ la curva è non derivabile.

Definizione 5.2 Due curve regolari a tratti $\underline{\varphi}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ e $\underline{\psi}: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ si dicono equivalenti se esiste un diffeomorfismo ^(5.2) $p: [a, b] \rightarrow [c, d]$ ($r = p(t)$) di classe C^1 tale che per ogni $t \in [a, b]$ si abbia

$$\underline{\varphi}(t) = \underline{\varphi}(p^{-1}(r)) \stackrel{\text{def}}{=} \underline{\psi}(r)$$

Osservazioni i) È evidente che $\underline{\psi}(r) = \underline{\varphi} \circ (p^{-1})(r)$ per ogni $r \in [c, d]$.

Poiché una applicazione tra $[a, b]$ e $[c, d]$ continua e invertibile è monotona, un diffeomorfismo è tale che $p'(t) > 0$ oppure $p'(t) < 0$. Se $p' > 0$ allora $\underline{\varphi}$ e $\underline{\psi}$ hanno lo stesso verso. Se $p' < 0$ hanno verso opposto.

Esempi

Le curve $\underline{\varphi}(t) = \begin{cases} \cos t \\ \sin t \end{cases}$ $t \in [0, 2\pi]$ e $\underline{\psi}(t) = \begin{cases} \cos 2t \\ \sin 2t \end{cases}$ $t \in [0, \pi]$ sono equivalenti e il diffeomorfismo è

$$p(t) = \frac{t}{2}$$

Invece le due curve $\underline{\varphi}(t) = \begin{cases} \cos t \\ \sin t \end{cases}$ $t \in [0, 2\pi]$ e $\underline{\psi}(t) = \begin{cases} \cos t \\ \sin t \end{cases}$ $t \in [0, 4\pi]$ non sono equivalenti. Infatti

la prima è semplice e la seconda no.

^(5.2) Un diffeomorfismo fra gli intervalli $[a, b]$ e $[c, d]$ è una applicazione biunivoca (iniettiva e suriettiva), derivabile. Se la derivata è continua il diffeomorfismo è detto C^1 . La funzione inversa del diffeomorfismo C^1 è una funzione continua anch'essa (perché?).

Sono viceversa equivalenti le due curve $\underline{\varphi}(t) = \begin{cases} \cos t \\ \sin t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$ e $\underline{\psi}(t) = \begin{cases} \cos \frac{t}{2} \\ \sin \frac{t}{2} \end{cases} \quad t \in [0, 4\pi]$ e il

diffeomorfismo è $p(t) = 2t$

Definizione 5.3 Data una curva regolare $\underline{\gamma}: I \rightarrow \mathbb{R}, I = [a, b]$, l'integrale $L(\underline{\gamma}) = \int_a^b dt \|\underline{\gamma}'(t)\|$ è detto lunghezza della curva

Teorema 5.1 Curve regolari equivalenti hanno la stessa lunghezza

Dimostrazione Siano date le due curve $\underline{\varphi}(t)$ e $\underline{\psi}(t)$ regolari ed equivalenti per cui vi è il diffeomorfismo $p: [a, b] \rightarrow [c, d]$ che sia C^1 . Supponiamo $p' > 0$.

$$L(\underline{\varphi}) = \int_a^b dt \|\underline{\varphi}'(t)\| = \int_{p(a)}^{p(b)} \frac{dr}{p'|_{p^{-1}(r)}} \cdot \left| \frac{dr}{dt} \right|_{t=p^{-1}(r)} \cdot \left\| \frac{d}{dr} \underline{\varphi} \circ p^{-1} \right\| = \int_{p(a)}^{p(b)} dr \|\underline{\psi}'(r)\| = \int_c^d dr \|\underline{\psi}'(r)\|$$

Se $p' < 0$ otteniamo $-\int_d^c dr \|\underline{\psi}'(r)\|$ ■

Sia data una curva regolare $\underline{\gamma}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ e si definisca $S(t) \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^t d\tau \|\underline{\gamma}'(\tau)\|$ $S: [a, b] \rightarrow [0, L(\underline{\gamma})]$ $S(\tau) = s$. Essendo $S'(\tau) > 0$ per ogni τ , la funzione $S(\tau)$ fornisce una parametrizzazione della curva per cui può invertire la relazione $s = S(\tau)$ ottenendo $\tau = T(s)$ e quindi $s = S(t) = \int_0^{S(t)} ds \|\frac{d}{ds} \underline{\gamma} \circ S^{-1}(s)\|$ e quindi $s = \int_0^s ds \|\frac{d}{ds} \underline{\gamma} \circ S^{-1}(s)\|$.

Definizione 5.4 Il parametro s si chiama lunghezza d'arco

Il nome deriva dal fatto che quando il parametro vale, poniamo, s_0 , la lunghezza della curva è proprio s_0 . Inoltre la lunghezza d'arco ha un'altra proprietà. Se indichiamo con $T(s)$ l'inversa della funzione S , e con $\underline{\psi}(s) \stackrel{\text{def}}{=} \underline{\gamma} \circ S^{-1}(s)$ abbiamo $\frac{d}{ds} \underline{\psi}(s) = \underline{\gamma}'(T(s))T'(s) = \underline{\gamma}'(T(s)) \frac{1}{S'(T(s))} = \frac{\underline{\gamma}'(T(s))}{\|\underline{\gamma}'(T(s))\|}$ il cui modulo è ± 1

Come lunghezza di una curva si può dare un'altra definizione. Se con $\mathcal{P}([a, b])$ indichiamo l'insieme delle partizioni dell'intervallo $[a, b]$ e con P un elemento di $\mathcal{P}([a, b])$, siano $t_1 = a < t_2 < t_3 < \dots < t_N = b$, gli elementi di P . Sia ora $\underline{\gamma}(t)$ una curva regolare a tratti. Possiamo definire la grandezza $A(\underline{\gamma}; P) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^N \|\underline{\gamma}(t_i) - \underline{\gamma}(t_{i-1})\|$

Teorema 5.2 Sia data una curva $\underline{\gamma}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Si ha $L(\underline{\gamma}) = \sup_{P \in \mathcal{P}([a, b])} A(\underline{\gamma}; P)$ sia nel caso in cui la curva è regolare sia nel caso in cui è regolare a tratti

Dimostrazione Cominciamo dal caso in cui la curva è regolare. Dimostriamo che $A(\underline{\gamma}; P) \leq L(\underline{\gamma})$. Siano $t_0 = a < t_1 < \dots < t_{N-1} < t_N = b$ i punti della partizione detta P . $A(\underline{\gamma}; P) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^N \|\underline{\gamma}(t_i) - \underline{\gamma}(t_{i-1})\| = \sum_{i=1}^N \left\| \int_{t_{i-1}}^{t_i} d\tau \underline{\gamma}'(\tau) \right\| \leq \sum_{i=1}^N \int_{t_{i-1}}^{t_i} d\tau \|\underline{\gamma}'(\tau)\| \stackrel{\text{def}}{=} L(\underline{\gamma})$. Ne segue che $\sup_{P \in \mathcal{P}([a, b])} A(\underline{\gamma}; P) \leq L(\underline{\gamma})$ ^(5.3)

Il passaggio $\underline{\gamma}(t_i) - \underline{\gamma}(t_{i-1}) = \int_{t_{i-1}}^{t_i} d\tau \underline{\gamma}'(\tau)$ è lecito in quanto si suppone la curva regolare. Le derivate sono quindi continue e vale il teorema di Torricelli–Barrow.

D'altro canto $A(\underline{\gamma}; P) = \sum_{i=1}^N \|\underline{\gamma}(t_i) - \underline{\gamma}(t_{i-1})\| = \sum_{i=1}^N \|\underline{\gamma}'(\tau_i)\| (t_i - t_{i-1}), t_{i-1} \leq \tau_i \leq t_i$. Ne segue

(5.3) Perché?

$$A(\underline{\gamma}; P) \geq \sum_{i=1}^N \inf_{t_{i-1} \leq t \leq t_i} \|\underline{\gamma}'(t)\| (t_i - t_{i-1}) \text{ e quindi } \sup_{P \in \mathcal{P}([a,b])} A(\underline{\gamma}; P) \geq \sup_{P \in \mathcal{P}([a,b])} \sum_{i=1}^N \inf_{t_{i-1} \leq t \leq t_i} \|\underline{\gamma}'(t)\| (t_i - t_{i-1}) \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^b dt \|\underline{\gamma}'(t)\|$$

Lo studente esegua la dimostrazione nel caso in cui sia regolare a tratti. ■

Osservazione i) Il gradiente è un vettore ortogonale alle *curve di livello* ossia a quelle curve definite dalle equazioni $f(\underline{x}) = c$. Si prenda la funzione $f(\underline{x}) = x^2 + y^2$ il cui gradiente è , punto per punto, il vettore $2(x, y)$. Consideriamo ora la cosiddetta *curva di livello* c ossia l'insieme dei punti $\underline{x} \in \mathbb{R}^2$ tale che $f(\underline{x}) = c > 0$ che è data dalla circonferenza $x^2 + y^2 = c$. Esprimiamo il tutto in coordinate polari: $x = \sqrt{c} \cos t$, $y = \sqrt{c} \sin t$, e deriviamo $x'(t) = -\sqrt{c} \sin t$, $y'(t) = \sqrt{c} \cos t$. Come si vede il vettore $\underline{v} = (x, y)$ (che parte dal centro della circonferenza e arriva al bordo della circonferenza stessa) è ortogonale al vettore \underline{v}' che, applicato alla circonferenza, è tangente alla circonferenza. Se ne conclude che il gradiente, punto per punto è ortogonale alle curve di livello. Questo è un fatto generale e non legato alla funzione speciale. Sia data la curva di livello $f(\underline{x}) = c$, $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ e sia $\underline{\gamma}(t)$ la sua parametrizzazione. Allora $\frac{d}{dt} f(\underline{\gamma}(t)) \equiv 0$ e quindi $\underline{\partial} f(\underline{\gamma}) \cdot \underline{\gamma}'(t) = 0$

Esercizi

- Si dia una curva il cui sostegno è costituito dall'insieme che in coordinate cartesiane verifica l'equazione $(x^2 + y^2)^{3/2} = x$. Una volta scritta si dica se la curva è nell'ordine: 1) regolare, 2) chiusa, 3) semplice.

Risposta. In coordinate polari la curva si scrive come $\gamma(t) = \begin{cases} x = \sqrt{\cos \vartheta} \cos \vartheta \\ y = \sqrt{\cos \vartheta} \sin \vartheta \end{cases}$ con $-\frac{\pi}{2} \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}$.

$$\gamma'(t) = \begin{cases} x' = -\frac{3}{2} \sqrt{\cos \vartheta} \sin \vartheta \\ y' = \frac{1 - \sin^2 \vartheta}{2 \sqrt{\cos \vartheta}} + (\cos \vartheta)^{3/2} \end{cases} \text{ .La curva non è regolare in quanto per } \vartheta = \pm \frac{\pi}{2} \text{ non è}$$

derivabile. La curva è chiusa $\gamma(-\frac{\pi}{2}) = \gamma(\frac{\pi}{2})$ ed è semplice.

Superfici Sia $\underline{\varphi}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ (ci limitiamo a superfici che dipendono da due parametri ed il cui sostegno è contenuto in \mathbb{R}^3 . Eventuali generalizzazioni sono di per sè evidenti).

Definizione 5.5 Sia $D = \overline{D} = \overset{\circ}{D} \cup \partial D$ un insieme in \mathbb{R}^2 e sia $\underline{\varphi}$ una applicazione da D a valori in \mathbb{R}^3 . $\underline{\varphi} = (\varphi^1, \varphi^2, \varphi^3) \stackrel{\text{def}}{=} (X(u, v), Y(u, v), Z(u, v))$ con le seguenti condizioni: i) $X, Y, Z, \in C^1(D; \mathbb{R})$

ii) il rango della matrice $J = \begin{pmatrix} X_u & X_v \\ Y_u & Y_v \\ Z_u & Z_v \end{pmatrix}$ è due iii) $(u, v) \neq (u', v')$ implica $\underline{\varphi}(u, v) \neq \underline{\varphi}(u', v')$ per

ogni $(u, v), (u', v') \in \overset{\circ}{D}$

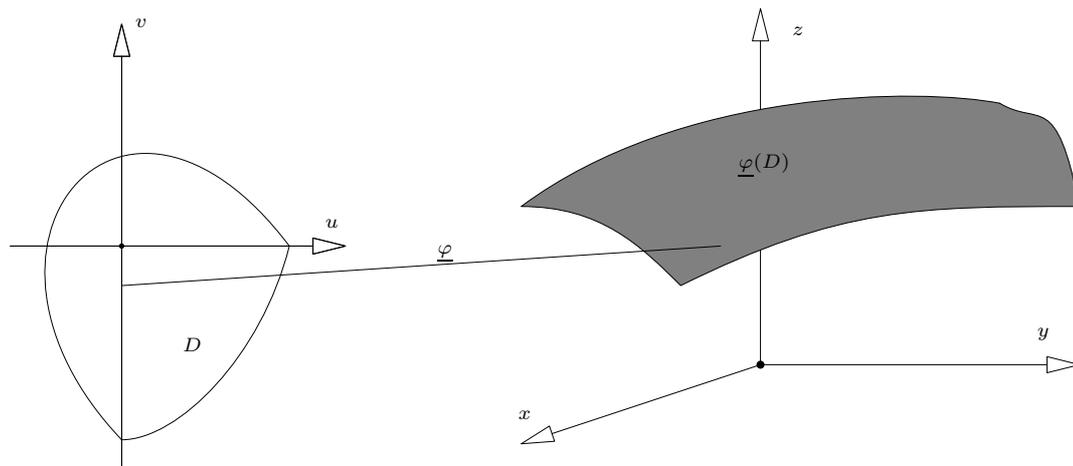
La ii) è equivalente a dire è la somma dei quadrati dei determinanti dei minori di ordine due è non nulla. La superficie descritta è detta regolare.

Siano rispettivamente: $I_1(u, v)$ il determinante della matrice $\begin{pmatrix} X_u & X_v \\ Y_u & Y_v \end{pmatrix}$, $I_2(u, v)$ il determinante

della matrice $\begin{pmatrix} X_u & X_v \\ Z_u & Z_v \end{pmatrix}$, $I_3(u, v)$ il determinante della matrice $\begin{pmatrix} Y_u & Y_v \\ Z_u & Z_v \end{pmatrix}$. La *ii)* è equivalente a dire che la funzione di (u, v) $\sqrt{I_1^2 + I_2^2 + I_3^2}$ è sempre diversa da zero.

Osservazione i) La matrice J definisce un operatore lineare che manda vettori a due componenti in vettori a tre componenti. Il fatto che il rango della matrice sia due, significa che due vettori linearmente indipendenti vengono mandati in due vettori linearmente indipendenti (vedi l'Appendice A-5). *ii)* Così come nel caso di una curva, $\underline{\gamma}'(t)$ definisce un vettore in \mathbb{R}^n tangente alla curva nel punto $\underline{\gamma}(t)$. Nel caso delle superfici le quantità $(X_u, Y_u, Z_u) \stackrel{\text{def}}{=} \underline{\varphi}_u$ e $(X_v, Y_v, Z_v) \stackrel{\text{def}}{=} \underline{\varphi}_v$ definiscono due vettori tangenti alla superficie nel punto $\underline{\varphi}(u, v) = (X(u, v), Y(u, v), Z(u, v))$.

Studiare gli esercizi ed esempi del capitolo 10 e quelli del capitolo 12 paragrafo 2 di di [BPS1] oppure quelli del paragrafo 3, pag. 478 di [BPS2].



Esempi L'esempio più frequente è quello di una *superficie cartesiana* ossia il grafico della superficie $z = f(x, y)$ $(x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2$. In tal caso la parametrizzazione è del tutto ovvia, $x = \varphi^1(u, v) = u$,

$y = \varphi^2(u, v) = v$, $z = \varphi^3(u, v) = f(u, v)$. In forma vettoriale si ha $u\underline{i} + v\underline{j} + f(u, v)\underline{k}$; $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ f_u & f_v \end{pmatrix}$

; $\sqrt{I_1^2 + I_2^2 + I_3^2} = \sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}$. Se $f(x, y) \in C^1(D)$ allora la superficie cartesiana soddisfa tutte le tre condizioni *i)*, *ii)* e *iii)*. Infatti la *i)* è chiaramente verificata. Per la *ii)* basta verificare ad esempio che la matrice $\begin{pmatrix} X_u & X_v \\ Y_u & Y_v \end{pmatrix}$ è $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Inoltre la *iii)* è verificata sempre grazie al fatto che sia la prima che la seconda componente della superficie è data da funzioni iniettive.

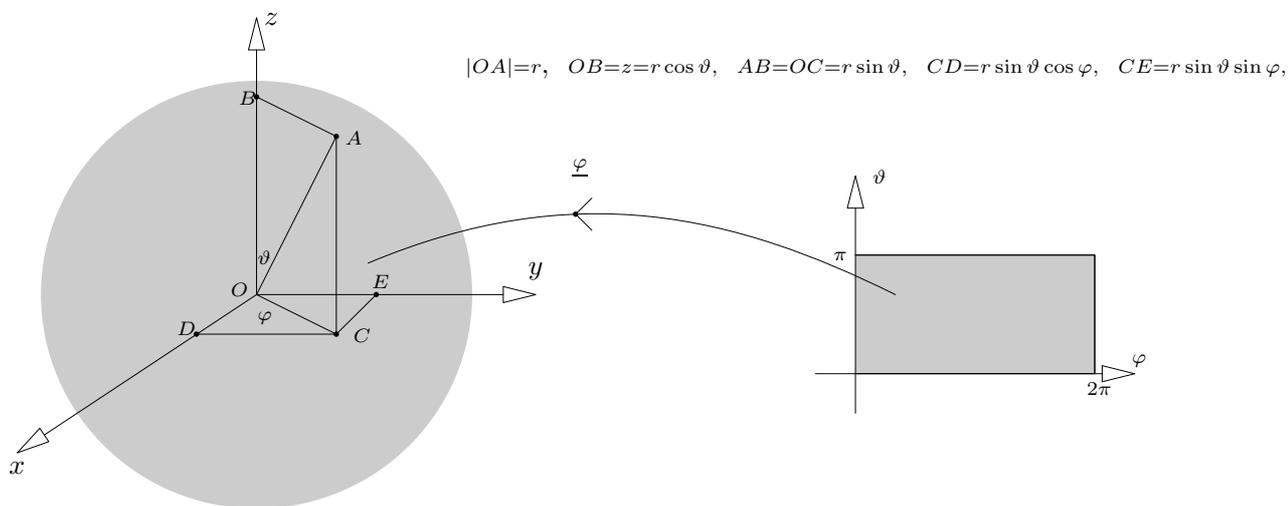
• Un esempio di superficie *non cartesiana* è data dalla sfera $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$. Per parametrizzare la sfera si possono effettuare diverse scelte.

1) Coordinate cartesiane. In tal caso bisogna “spezzare” in due parti. Per $z \geq 0$ si può parametrizzare

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2} \end{cases} \quad \text{mentre per } z < 0 \text{ si ha } \begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = -\sqrt{r^2 - x^2 - y^2} \end{cases} \quad \text{.In ambedue i casi } D = \{x^2 + y^2 \leq r^2\} \subset \mathbb{R}^2.$$

2) Coordinate polari.
$$\begin{cases} x = r \sin \vartheta \cos \varphi \\ y = r \sin \vartheta \sin \varphi \\ z = r \cos \vartheta \end{cases}$$
 In questo caso si ha $D = \{(\varphi, \vartheta) \in \mathbb{R}^2: \varphi \in [0, 2\pi], \vartheta \in [0, \pi]\}$ ed è un rettangolo a differenza di quanto accade con le coordinate cartesiane. La condizione

ii) non è sempre verificata. In tal caso si ha $J = \begin{pmatrix} r \cos \vartheta \cos \varphi & -r \sin \vartheta \sin \varphi \\ r \cos \vartheta \sin \varphi & r \sin \vartheta \cos \varphi \\ -r \sin \vartheta & 0 \end{pmatrix}$ e $I_1^2 + I_2^2 + I_3^2 = (r^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \vartheta \cos^2 \vartheta + r^2 \cos^2 \vartheta \sin^2 \vartheta \sin^2 \varphi)^2 + r^4 \sin^2 \vartheta \sin^2 \varphi + r^4 \sin^2 \vartheta \cos^2 \varphi = r^4 \sin^2 \vartheta$. Come si può notare la ii) non è verificata per i valori $\vartheta = 0, \pi$. In effetti, se $\vartheta = 0$ oppure $\vartheta = \pi$, qualunque sia il valore di φ , si sta sempre posizionati al “Polo Nord” per $\vartheta = 0$ oppure al “Polo Sud” per $\vartheta = \pi$. Anche la iii) non è verificata per $\vartheta = 0, \pi$. I punti $(0, \varphi)$ e $(0, \varphi')$ hanno la stessa immagine così come (π, φ) e (π, φ')

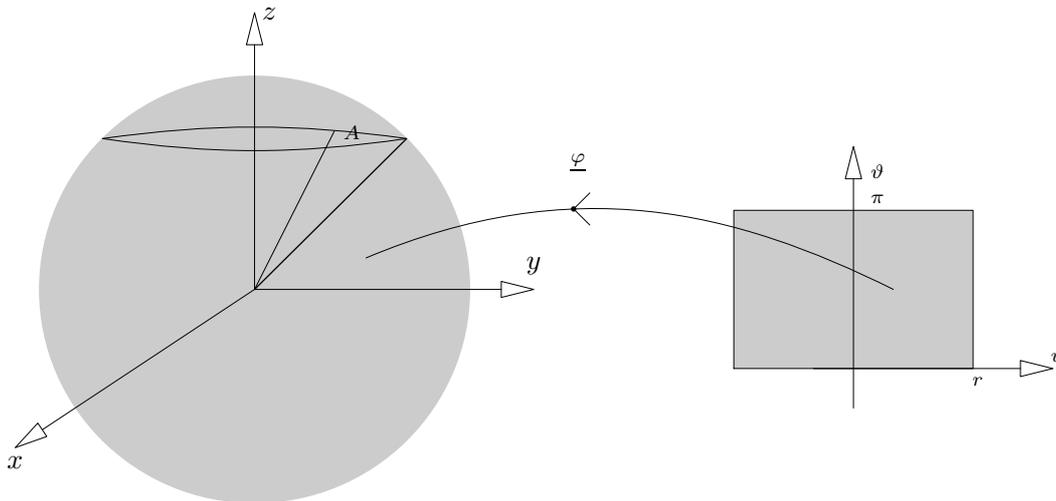


3) Vi è un terzo tipo di parametrizzazione che consiste nel porre
$$\begin{cases} x = \sqrt{r^2 - u^2} \sin \vartheta \\ y = \sqrt{r^2 - u^2} \cos \vartheta \\ z = u \end{cases} \quad -r \leq u \leq r$$

e $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$. Anche in questo caso la iii) è violata. Se $u = \pm r$ allora qualsiasi punto (u, ϑ) viene

mandato nel punto $(0, 0, \pm r)$. $J = \begin{pmatrix} -\frac{u}{\sqrt{r^2 - u^2}} \cos \vartheta & -\sqrt{r^2 - u^2} \sin \vartheta \\ -\frac{u}{\sqrt{r^2 - u^2}} \sin \vartheta & \sqrt{r^2 - u^2} \cos \vartheta \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ e $I_1^2 + I_2^2 + I_3^2 = r^2$ e quindi

la ii) è verificata.



• Un altro esempio di superficie non cartesiana è il toro ossia la “ciambella” la cui proiezione sul piano $z = 0$ è data dalle due ellissi di semiassi rispettivamente $r_1 < r_2$ e $R_1 < R_2$ con $R_2 - r_2 = R_1 - r_1$. La parametrizzazione della superficie è

$$a = \frac{1}{2}(r_2 + R_2), \quad a' = \frac{1}{2}(R_1 + r_1), \quad b = \frac{1}{2}(R_2 - r_2) = \frac{1}{2}(R_1 - r_1)$$

$$x = a \cos \vartheta + b \cos \varphi \cos \vartheta = \cos \vartheta (a + b \cos \varphi) \quad 0 \leq \vartheta \leq 2\pi \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

$$y = a' \sin \vartheta + b \cos \varphi \sin \vartheta = \sin \vartheta (a' + b \cos \varphi)$$

$$z = b \sin \varphi$$

6 estremi vincolati

L'argomento si trova su [BPS1] e [BPS2] anche se la notazione non è la stessa.

Esempio 1 Iniziamo con un esempio. Sia data la funzione $z = f(x, y) = x^2 + y^2$ con dominio \mathbb{R}^2 . Essa ha un minimo assoluto in $(0, 0)$ e nessun massimo o minimo relativo ma non assoluto. Sia ora U un sottoinsieme di \mathbb{R}^2 tale che $\underline{0} \in U$. Dalla definizione di minimo, risulta che $\underline{0}$ è un minimo per $f|_U$ qualsiasi sia U .

Come U ora prendiamo la retta $x \equiv 1$. Vogliamo trovare, se esistono, i punti di estremo della curva soggetti alla condizione $x = 1$ (*vincolo*)

Bisogna sostituire $x = 1$ nella funzione^(6.1), calcolare le derivate e si verifica che il punto $(1, 0)$ è un minimo per $f|_U$. Notare inoltre che il gradiente della $f(x, y)$ calcolato nel punto $(1, 0)$ è $(1, 0)$ e che il vettore ortogonale alla curva $x = 1$ ha coordinate $(1, 0)$ oppure $(-1, 0)$. In ogni caso sono quindi proporzionali il gradiente della funzione e il vettore ortogonale alla curva calcolati nello stesso punto. Già in questo caso si evidenzia una delle peculiarità degli estremi vincolati per cui il punto $(1, 0)$ è di estremo solo se opportunamente vincolato. Considerato invece come estremo libero non è di estremo.

Esempio 2 Sia data la funzione $z = f(x, y) = xy$. Vogliamo trovare, se esistono, punti critici della funzione che siano soggetti anche alla condizione $h(x, y) = 0$ con $h(x, y) = x + y - 1$ e specificare la natura di tali punti critici.

(6.1) questa operazione altri non è che considerare la restrizione della funzione all'insieme $\{x=1\}$

Il vincolo è dato da una retta e la sua parametrizzazione è $\underline{\gamma}(x) = (x, 1 - x)$ talchè la funzione di cui trovare i punti critici è $f(x, 1 - x) = x(1 - x)$. Derivando si ha $P \equiv (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ (un minimo). Il gradiente del vincolo è $(1, 1)$ (non dipende dal punto) e il gradiente della funzione è il vettore (y, x) che in P vale $\frac{1}{2}(1, 1)$ ossia proporzionale a $\underline{\partial}h(P)$.

Definizione 6.1 Sia $h(\underline{x}) \in C^1(U)$, $U = \overset{\circ}{U}$ e sia $U_o = \{\underline{x} \in U: h(\underline{x}) = 0\}$. $\underline{y} \in U_o$ è detto regolare se $\underline{\partial}h(\underline{y}) \neq \underline{0}$.

Sia data una funzione $f: E \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $E = \overset{\circ}{E} \supset U$, $f \in C^1(E)$. Cerchiamo i punti critici regolari della funzione $f|_U$ che appartengono a U_o . Per il Teorema delle funzioni implicite, intorno al punto regolare \underline{y} , si può scrivere il vincolo in forma parametrica $\underline{\gamma}: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\underline{\gamma}(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$, $\underline{\gamma}(0) = \underline{y}$. Inoltre $h(\underline{\gamma}(t)) \equiv 0$ e quindi $\underline{\partial}h(\underline{\gamma}) \cdot \underline{\gamma}' = 0$. Se \underline{y} deve essere un punto critico per $f(\underline{x})$ ristretta al vincolo allora deve essere critico per $f(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \stackrel{\text{def}}{=} F(t)$ e quindi (supponendo pure che f sia abbastanza regolare da ammettere derivate parziali continue), $F'(t) = f_{x_1}(\underline{\gamma}(t))\gamma_1'(t) + f_{x_2}(\underline{\gamma}(t))\gamma_2'(t)$ deve valere zero per $t = 0$ ossia $\underline{\partial}f(\underline{\gamma}(0)) \cdot \underline{\gamma}'(0) = 0$. Il gradiente della f deve essere ortogonale al vettore $\underline{\gamma}'(0)$ che è tangente alla curva $\underline{\gamma}(t)$ in $t = 0$ ossia tangente al vincolo. Quindi il gradiente della f deve essere ortogonale al vincolo ossia essere proporzionale al vettore $\underline{\partial}h(\underline{y})$.

Tornando alle dimensioni maggiori di 2, diamo la seguente definizione

Definizione 6.2 A partire dalla definizione precedente, se esiste un $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che $\underline{\partial}f(\underline{y}) = \lambda \underline{\partial}h(\underline{y})$, il punto \underline{y} è detto critico per la funzione $f(\underline{x})$ soggetta alla condizione $h(\underline{x}) = 0$ (vincolo)

Si osservi inoltre che se un punto è di massimo oppure di minimo per una certa funzione, qualunque sia il vincolo che passa per quel punto, avremo che la restrizione della funzione al vincolo presenta in quel determinato punto un massimo oppure un minimo. Può accadere però che la restrizione di una certa funzione ad un determinato vincolo abbia un massimo oppure un minimo oppure una sella in un punto P che invece non è neppure critico per la funzione non ristretta.

Vale il Teorema

Teorema 6.1 (moltiplicatori di Lagrange) Sia $f \in C^1(E)$ dove $E = \overset{\circ}{E} \supset U_o$ e sia $\underline{y} \in U_o$ un punto regolare. Se \underline{y} è un punto critico di f ristretta a U_o , esiste un valore λ tale che $\underline{\partial}f(\underline{y}) = \lambda \underline{\partial}h(\underline{y})$.

Dimostrazione Essendo \underline{y} regolare, almeno una delle derivate $h_{x_i}(\underline{y})$ deve essere non nulla. Supponiamo che $h_{x_1}(\underline{y}) \neq 0$. Dal teorema della funzione implicita segue che si può localmente scrivere $x_1 = q(\hat{x})$ e quindi $h(q(\hat{x}), \hat{x}) = 0$. Inoltre se un punto è critico per $f(\underline{x})$ soggetto al vincolo $h(\underline{y}) = 0$, allora è critico anche per la funzione di $n - 1$ variabili $f(q(\hat{x}), \hat{x}) \stackrel{\text{def}}{=} F(\hat{x})$ dove stavolta però le $n - 1$ variabili non sono soggette a vincoli se non quello di variare all'interno di un certo insieme aperto determinato dal teorema della funzione implicita. Dal teorema 1.5 abbiamo dunque che $F_{x_i}(\underline{y}) = 0$ per ogni $i = 2, 3, \dots, n$ da cui:

$$f_{x_1} q_{\hat{x}} + f_{\hat{x}} = \hat{0}. \text{ Del resto abbiamo } q_{\hat{x}} = -\frac{h_{\hat{x}}}{h_{x_1}} \text{ da cui } f_{x_i} = \frac{f_{x_1}}{h_{x_1}} h_{x_i} \quad i = 2, \dots, n \text{ e quindi } \lambda = \frac{f_{x_1}(\underline{y})}{h_{x_1}(\underline{y})}.$$

Con $i = 1$ l'uguaglianza è $f_{x_1} = \lambda h_{x_1}$ (ovviamente vera). ■

Corollario 6.1 Siano f, h come nel teorema precedente. \underline{y} è un punto critico della f soggetto al vincolo $h(\underline{y}) = 0$ se e solo se $(\underline{y}, \lambda_o)$ è un punto critico della funzione di $n + 1$ variabili $G(\underline{x}, \lambda) = f(\underline{x}) - \lambda h(\underline{x})$

Dimostrazione Se \underline{y} è un punto critico della f e $\underline{y} \in U_0$ allora esiste λ_o per cui $G_{x_i}(\underline{y}, \lambda) = f_{x_i}(\underline{y}) - \lambda_o h_{x_i}(\underline{y}) = 0$ dal teorema precedente. La condizione $h(\underline{y}) = 0$ equivale a $G_\lambda(\underline{y}, \lambda_o) = 0$. Sia viceversa $(\underline{y}, \lambda_o)$ un punto critico della $G(\underline{x}, \lambda)$. Dalla Definizione 2, segue che $f_{x_i}(\underline{y}) - \lambda_o h_{x_i}(\underline{y}) = 0$ e che $h(\underline{y}) = 0$ e quindi \underline{y} è un punto critico della f per cui $\underline{y} \in E_o$. ■

Osservazioni dal corollario segue che l'esistenza di punti critici vincolati e regolari si riduce a trovare *punti critici liberi* ma in uno spazio di dimensione più grande.

Fino ad ora abbiamo affrontato la questione della esistenza di punti critici ma non ci siamo posti il problema di stabilirne la natura. Nel caso dei punti critici liberi, se la funzione f è due volte differenziabile, si ricorre allo studio della matrice hessiana. Nel caso di punti critici vincolati vi è lo stesso una trattazione che fa uso della matrice hessiana della funzione $f(\underline{x}) - \lambda g(\underline{x})$ soggetta ad una particolare condizione specificata nel Teorema 6.2. Tuttavia in alcuni casi si possono ottenere informazioni facendo uso di teoremi elementari.

Esempi Trovare gli estremi (massimo e minimo) della funzione $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} f(\underline{x}) = \prod_{k=1}^n x_k$ sull'insieme $B = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n: \|\underline{x}\| \leq 1\}$. In questo caso il vincolo non è di uguaglianza ($g(\underline{x}) = 0$) ma di disuguaglianza.

Come prima cosa si cercano gli estremi liberi ossia quelli che eventualmente giacciono in $\overset{\circ}{B} = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n: \|\underline{x}\| < 1\}$. $\partial f(\underline{x}^o) = \underline{0}$ implica $x_k^o = 0$ ma $f(\underline{0}) = 0$ e quindi certamente non è né di massimo né di minimo. La ricerca dei punti critici su ∂B impone di trovare subito i punti eventualmente irregolari ossia quei punti \underline{y} per cui $g_{x_i}(\underline{y}) = 0$ dove $g(\underline{x}) = \sum_{i=1}^n x_i^2$. Segue che $g_{x_i} = 2x_i = 0$ e quindi l'unico punto irregolare è $\underline{0} \notin \partial B$ (non esistono punti irregolari in ∂B). Cerchiamo quindi i punti critici della funzione $f(\underline{x}) - \lambda g(\underline{x})$. Si ottiene $\prod_{k=1, k \neq j}^n x_k = 2\lambda x_j$ $j = 1, 2, \dots, n$ e $\sum_{i=1}^n x_i^2 = 1$. Moltiplicando la relazione $\prod_{k=1, k \neq j}^n x_k = 2\lambda x_j$ per x_j otteniamo $f(\underline{x}) = 2\lambda x_k^2$ $k = 1, 2, \dots, n$ da cui discende $x_1^2 = x_2^2 = \dots = x_n^2$ ed essendo $\sum_{i=1}^n x_i^2 = n x_i^2 = 1$ per ogni k . La soluzione è $x_i = \pm \frac{1}{\sqrt{n}}$ $\lambda = \pm \frac{1}{2} n^{1-\frac{n}{2}}$. I punti critici $(\underline{y}, \lambda_o)$ sono quindi in numero 2^{n+1} . Il valore della funzione è $\pm \frac{1}{n^{n/2}}$. Ora si osserva che B è compatto, la funzione f è continua e per il Teorema di Weierstrass assume massimo e minimo. I punti in cui $f(\underline{x}) = \frac{1}{n^{n/2}}$ sono di massimo e di minimo gli altri. È chiaro che la compattezza di B gioca un ruolo essenziale. Inoltre supponiamo che ci fossero stati degli altri punti critici nei quali $f(\underline{x})$ assume un valore compreso fra $-\frac{1}{n^{n/2}}$ e $\frac{1}{n^{n/2}}$. Il Teorema di Weierstrass non sarebbe stato di aiuto

Un criterio che dà risultati più accurati se le funzioni in gioco sono due volte differenziabili è il

Teorema 6.2 Siano $f, g: X \rightarrow \mathbb{R}$, $\overset{\circ}{X} \subset \mathbb{R}^n$ di classe C^2 . Se la forma quadratica

$\sum_{i,j=1}^n [f_{x_i x_j}(\underline{x}^o) - \lambda^o g_{x_i x_j}(\underline{x}^o)] h_i h_j = (\underline{h}, H(\underline{x}^o) \underline{h})$, ristretta all'insieme dei vettori \underline{h} tangenziali al vincolo in \underline{x}^o ossia $(\partial g(\underline{x}^o), \underline{h}) = 0$, è definita negativa (positiva) allora \underline{x}^o è punto di massimo (minimo) forte vincolato.

Dimostrazione (da mettere)

Si possono avere più vincoli contemporaneamente.

Teorema 6.3 Sia data la funzione reale $f \in C^1(E)$ $E = \overset{\circ}{E} \subseteq \mathbb{R}^n$. Siano dati m vincoli differenziabili $g_k(x_1, \dots, x_n) = 0$ $k = 1, \dots, m < n$, $g_k: U = \overset{\circ}{U} \rightarrow \mathbb{R}$ e $U_o = \{\underline{x} \in U: \partial g(\underline{x}) = 0\}$. $\underline{y} \in U_o$ è un

punto regolare ossia supponiamo che la matrice $\underline{\partial}g = \begin{pmatrix} (g_1)_{x_1} & (g_1)_{x_2} & \dots & (g_1)_{x_n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ (g_m)_{x_1} & (g_m)_{x_2} & \dots & (g_m)_{x_n} \end{pmatrix}$ abbia rango

massimo m . Allora \underline{y} è un punto critico di $f(\underline{x})$ ristretta agli m vincoli se esiste una m -pla di numeri reali $\underline{\lambda}_o \in \mathbb{R}^m$ tale che $f_{\underline{x}} = \underline{\lambda}_o \underline{g}_{\underline{x}}$ ^(6.2) ossia $f_{\underline{x}} - \lambda_1 g_1(\underline{x}) - \lambda_2 g_2(\underline{x}) - \dots - \lambda_m g_m(\underline{x})$

Dimostrazione Supponiamo che $\begin{vmatrix} (g_1)_{x_1} & \dots & (g_1)_{x_m} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ (g_m)_{x_1} & \dots & (g_m)_{x_m} \end{vmatrix} \neq 0$ (almeno un minore di ordine m è non

nullo e supponiamo sia il primo). Per il Teorema delle funzioni implicite, nell'intorno del punto \underline{y} si possono esplicitare m coordinate (diciamo x_1, x_2, \dots, x_m) ottenendo $x_i = h_i(x_{m+1}, \dots, x_n)$ $i = 1, \dots, m$ (si tenga sempre presente che le funzioni h_i hanno come dominio una sfera aperta intorno al punto (y_{m+1}, \dots, y_n) e che questo è sufficiente per i nostri scopi). Dividiamo le variabili \underline{x} in due gruppi $\underline{x} = (\underline{z}, \underline{\zeta})$ $\underline{z} = (x_1, \dots, x_m)$ sono le variabili *dependenti*. $\underline{\zeta} = (x_{m+1}, \dots, x_n)$ sono le variabili *indipendenti*. Da $\underline{g}(h_1, \dots, h_m, x_{m+1}, \dots, x_n) \equiv \underline{0}$ segue $\underline{g}_{\underline{\zeta}} + \underline{g}_{\underline{z}} \underline{h}_{\underline{\zeta}} = 0$. $\underline{g}_{\underline{z}}$ è un matrice quadrata avente determinante non nullo per l'ipotesi del rango fatta prima mentre $\underline{g}_{\underline{\zeta}}$ e $\underline{h}_{\underline{\zeta}}$ sono matrici $m \times (n - m)$. L'equazione $\underline{g}_{\underline{\zeta}} + \underline{g}_{\underline{z}} \underline{h}_{\underline{\zeta}} = 0$ è equivalente a $(\underline{g}_{\underline{z}})^{-1} \underline{g}_{\underline{\zeta}} + \underline{h}_{\underline{\zeta}} = 0$. Sostituendo all'interno della funzione $f(\underline{x})$ si ha $f(h_1, \dots, h_m, x_{m+1}, \dots, x_n)$. Il gradiente, vettore $n - m$ dimensionale, è nullo se $f_{x_k} + \sum_{j=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial h_j}{\partial x_k} = 0$, $k = (m+1, \dots, n)$ ossia $f_{\underline{\zeta}} = -\underline{f}_{\underline{z}} \underline{h}_{\underline{\zeta}}$ e quindi $f_{\underline{\zeta}} = \underline{f}_{\underline{z}} (\underline{g}_{\underline{z}})^{-1} \underline{g}_{\underline{\zeta}}$. Il valore di $\underline{\lambda}$ è $\underline{\lambda}_o = \underline{f}_{\underline{z}} (\underline{g}_{\underline{z}})^{-1}$. La relazione riguardante le altre derivate è $f_{\underline{z}} = \underline{f}_{\underline{z}} (\underline{g}_{\underline{z}})^{-1} \underline{g}_{\underline{z}}$ (chiaramente soddisfatta). ■

Definizione 6.3 Nelle stesse condizioni precedenti, se esiste $\underline{\lambda} \in \mathbb{R}^n$ tale che $\underline{\partial}f(\underline{y}) = \underline{\lambda} \underline{\partial}g(\underline{y})$, il punto \underline{y} è detto *critico* per la funzione $f(\underline{x})$ soggetta al vincolo $\underline{g}(\underline{y}) = 0$

Corollario 6.2 Nelle stesse ipotesi sulle funzioni f, g_1, \dots, g_n del teorema precedente, \underline{y} è punto critico della $f(\underline{x})$ soggetta ai vincoli $\underline{g}(\underline{x}) = \underline{0}$ se e solo se esiste $\underline{\lambda}_o \in \mathbb{R}^n$ per cui $(\underline{y}, \underline{\lambda}_o)$ è punto critico della funzione $F(\underline{x}, \underline{\lambda}) = f(\underline{x}) - \sum_{i=1}^n \lambda_i g_i(\underline{x}) = f(\underline{x}) - \underline{\lambda} \cdot \underline{g}(\underline{x})$

Dimostrazione Se \underline{y} è un punto critico del sistema con i vincoli $(g_1, \dots, g_n) = \underline{0}$, per la conclusione del teorema precedente abbiamo $f_{\underline{x}} = \underline{\lambda}_o \underline{g}_{\underline{x}}$ e quindi $(\underline{y}, \underline{\lambda}_o)$ è un punto critico di $F(\underline{x}, \underline{\lambda})$. Viceversa se $(\underline{y}, \underline{\lambda}_o)$ è un punto critico della funzione $F(\underline{x}, \underline{\lambda})$ allora $f_{\underline{x}}(\underline{y}) = \underline{\lambda}_o \underline{g}_{\underline{x}}(\underline{y})$ e quindi il gradiente è proporzionale allo Jacobiano delle funzioni \underline{g} e dalla defizione 6.3 \underline{y} è un punto critico della f soggetta ai vincoli $\underline{g} = \underline{0}$. ■

Esercizi

- Data la funzione $f(x, y) = x^2 y + xy^2 + xy$, si trovino i valori di massimo e di minimo soggetti alla condizione $\{xy \geq \frac{1}{16}, y \geq -x - 1, x \leq 0, y \leq 0\}$.
- Si stabilisca la natura dei punti critici della funzione $f(z, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ soggetta alla condizione $Axy + Bxz + Cyz = 1$ (si veda l'esercizio 25.7 degli *esercizi in rete*.)
- si trovino i punti di estremo della funzione $f(x, y) = xy$ soggetti alla condizione $x^2 + y^2 = 1$

(6.2) Nella relazione $f_{\underline{x}} = \underline{\lambda}_o \underline{g}_{\underline{x}}$ i due vettori $f_{\underline{x}}$ e $\underline{\lambda}_o$ sono vettori riga.

- si trovino i punti di estremo della funzione $f(x, y) = x^2 + y^2$ soggetti alla condizione $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$
- si trovino i punti di estremo della funzione $f(x, y, z) = xyz$ soggetti alla condizione $x + y + z = 3$ e $xy + xz + yz = 3$ (si dimostri che esiste un solo punto critico ed è una sella).
- si trovino i punti di estremo della funzione $f(x, y) = 6 - 4x - 3y$ soggetti alla condizione $x^2 + y^2 + z^2 = 9$
- si stabilisca la natura dei punti critici della funzione $f(x, y, z) = x^2 - x + y^2 + y(z + x - 1)$; soggetta alle condizioni $g_1(x, y, z) = x^2 + y^2 - 1 = 0$, $g_2(x, y, z) = x + y + z - 1 = 0$.
- da [BPS1] studiare gli esempi 5.2–5.5 di pag. 409–410 e gli esercizi 43–46 di pag. 411. Da [BPS2] studiare gli esercizi: 1) 7.2–7.5 pag. 457 2) 55–58 pag. 459, 3) 8.2 pag. 464, 4) 59–62 pag. 467
Degli *esercizi in rete* studiare gli esercizi **24.7**, **28.7**, **29.7**, **23.7** parte 2):

Risposta ad alcuni degli esercizi proposti

- Sia $D \subset \mathbb{R}^2$ l'insieme definito dalla condizione $\{xy \geq \frac{1}{16}, y \geq -x - 1, x \leq 0, y \leq 0\}$. È chiuso e limitato ed essendo la funzione continua, il teorema di Weierstrass assicura che massimo e minimo esistono. Osservando che la funzione è scrivibile come $f(x, y) = xy(x + y + 1)$ si vede che è sempre positiva in D tranne sulla retta $y = -x - 1$ dove la funzione è nulla. Si può subito concludere che tali punti sono di minimo.

Poi si cercano i punti critici in $\overset{\circ}{D}$. L'unico punto che soddisfa tale condizione è $P \equiv (-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$. La matrice hessiana calcolata in P dà $\begin{vmatrix} -2/3 & -1/3 \\ -1/3 & -2/3 \end{vmatrix}$ e quindi il punto è di massimo con $f(P) = \frac{1}{27}$

Ora dobbiamo esaminare quanto accade sulla funzione $y = \frac{16}{x}$. Si studia la funzione $f(x, -x - 1)$ e si vede che è sempre positiva con un massimo nel punto $P' = (-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4})$ la cui ordinata è $f(P') = \frac{1}{32}$. Dunque il massimo si ha in P e il minimo in ogni punto della retta $y = -x - 1$ nella parte contenuta in D .

- si trovino i punti di estremo della funzione $f(x, y) = xyz$ soggetti alla condizione $x + y + z = 3$ e $xy + xz + yz = 3$. Sia $g_1(x, y, z) = x + y + z - 3$, e $g_2(x, y, z) = xy + xz + yz - 3$. Definiamo $h(x, y, z) = f(x, y, z) - \lambda_1 g_1(x, y, z) - \lambda_2 g_2(x, y, z)$. È facile dimostrare che una qualsiasi soluzione del sistema di 5 equazioni in cinque incognite $\partial f(\underline{x}) - \lambda_1 \partial g_1(\underline{x}) - \lambda_2 \partial g_2(\underline{x}) = \underline{0}$, $g_1(\underline{x}) = 0$, $g_2(\underline{x}) = 0$ deve verificare $x = y = z$ (e quindi uguale a 1). Basta infatti porre $x + y = z_0$ e sostituire in $g_2(\underline{x}) = 0$ per avere l'equazione $x^2 - x(3 - z_0) + 3 + z_0^2 - 3z_0$ il cui discriminante è $-3z_0^2 + 6z_0 - 3$ che è sempre minore di zero tranne quando $z_0 = 1$ da cui $x = y = 1$.

Se ora si considerano i vettori $\partial g_1(\underline{x})\Big|_{(x=y=z=1)}$ e $\partial g_2(\underline{x})\Big|_{(x=y=z=1)}$ si nota che sono pari $(1, 1, 1)$ e $2(1, 1, 1)$ ossia sono paralleli e quindi la matrice del Teorema 6.3 non ha rango 2 ossia massimo. Il caso in questione non verifica le ipotesi del teorema 6.3. D'altra parte le equazioni $g_1(\underline{x}) = 0$ e $g_2(\underline{x}) = 0$ implicano che $xyz = x(3 - x(y + z)) = x(3 - x(3 - x)) = x^3 - 3x^2 + 3x$ e per $x = 1$ si ha una sella.

7 integrazione multipla

Il materiale del presente capitolo è autoconsistente. La trattazione svolta in [BPS1] è molto più breve della presente.

Verrà principalmente esposta la teoria in 2 dimensioni. Sia data una funzione $f: [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ limitata $f = f(x, y)$ ^(7.1). Diamo una partizione $P_x = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ dell'intervallo $[a, b]$ e una partizione $P_y = \{y_0, y_1, y_2, \dots, y_m\}$ $c = y_0 < y_1 < y_2 < \dots < y_{m-1} < y_m = d$ dell'intervallo $[c, d]$. Le due partizioni generano una partizione complessiva del rettangolo $Q = [a, b] \times [c, d]$ che chiamiamo $P \stackrel{\text{def}}{=} (P_x, P_y)$. Con $Q_{i,j} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$ indichiamo il rettangolo generico della partizione. \mathcal{P} è l'insieme di tutte le partizioni P del rettangolo Q .

Definizione 7.1 Diciamo che P_x^1 è più fine di P_x se P_x^1 contiene tutti i punti di P_x più almeno uno (ad esempio $a = x_0 < \tilde{x} < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$). Lo stesso dicasi per il segmento $[c, d]$. Le due partizioni $a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 = b$ e $a = x_0 < x_1 < \tilde{x} < \hat{x} < x_3 = b$ con $\tilde{x} \neq x_2$ e $\hat{x} \neq x_2$ non sono una più fine dell'altra (si dice che sono *non confrontabili*). Passando alle partizioni di Q diciamo che

Definizione 7.2 P' partizione di Q è più fine di P se P'_x (oppure P'_y) ha almeno un punto in più di P_x (oppure P_y).

Lemma 7.1 Date due partizioni non confrontabili P e P' si può definire una terza partizione P^1 che sia più fine sia di P che di P'

Dimostrazione Basta prendere su ogni lato del rettangolo Q la partizione data dall'unione delle due partizioni (unione nel senso di definire una nuova partizione che contenga tutti i punti di una e dell'altra).

■

l'area di $Q_{i,j}$ è chiaramente data da $(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) \stackrel{\text{def}}{=} |Q_{i,j}|$. Sia $m_{i,j} = \inf_{(x,y) \in Q_{i,j}} f(\underline{x})$ e $M_{i,j} = \sup_{(x,y) \in Q_{i,j}} f(\underline{x})$.

Definizione 7.3 $S(f; P) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m M_{i,j} |Q_{i,j}|$ sono le somme superiori

$s(f; P) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m m_{i,j} |Q_{i,j}|$ sono le somme inferiori

Lemma 7.2 Sia $f: Q \rightarrow \mathbb{R}$; si hanno le relazioni

1) date due partizioni P e P' in cui P' è più fine di P , $s(f; P) \leq s(f; P') \leq S(f; P') \leq S(f; P)$

2) date due partizioni qualsiasi P e P' , $s(f; P) \leq S(f; P')$

3) $\sup_{P \in \mathcal{P}} s(f; P) \leq \inf_{P \in \mathcal{P}} S(f; P)$

Dimostrazione Omessa in quanto ovvia^(7.2)

Definizione 7.4 Una funzione $f: Q \rightarrow \mathbb{R}$ limitata è detta integrabile secondo Riemann se $\sup_{P \in \mathcal{P}} s(f; P) = \inf_{P \in \mathcal{P}} S(f; P)$. In tal caso la quantità trovata si indica con $\int \int_Q f(x, y) dx dy$ oppure $\int \int_Q f(x, y)$

(7.1) Una funzione $f: E \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ è limitata se esistono due costanti m e M tale che $m \leq f(\underline{x}) \leq M \forall x \in E$

(7.2) gli studenti sono tenuti a svolgere la dimostrazione

Esempio la funzione $f(\underline{x}) = \begin{cases} 1 & (x, y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$ non è integrabile secondo Riemann. Infatti

qualunque sia il quadrato di una qualsiasi partizione, data la densità dei razionali nei reali (in formule $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$), si ha $m_{i,j} = 0$ e $M_{i,j} = 1$ per cui $S(f; P) - s(f; P) = |Q| = 1$ e non viene mai soddisfatta la definizione di integrabilità.

Indichiamo con $\mathcal{R}(Q)$ l'insieme delle funzioni integrabili su Q . Abbiamo il seguente teorema

Teorema 7.1 (si omette la presenza di $dxdy$)

1) $f \in \mathcal{R}(Q) \Rightarrow cf \in \mathcal{R}(Q)$ con c costante e $\int \int_Q cf(\underline{x}) = c \int \int_Q f(\underline{x})$, 2) se $f, g \in \mathcal{R}(Q)$ allora $(f+g) \in \mathcal{R}(Q)$, e $\int \int_Q (f+g)(\underline{x}) = \int \int_Q f(\underline{x}) + \int \int_Q g(\underline{x})$, 3) se $f, g \in \mathcal{R}(Q)$, e se $f(\underline{x}) \leq g(\underline{x})$ allora $\int \int_Q f(\underline{x}) \leq \int \int_Q g(\underline{x})$ 4) $f \in \mathcal{R}(Q) \Rightarrow |f| \in \mathcal{R}(Q)$ e $|\int \int_Q f| \leq \int \int_Q |f|$ 5) se f è limitata e

$A = \sup_{\underline{x} \in Q} |f(\underline{x})|$, si ha $|\int \int_Q f| \leq |Q|A$ 6) $\inf_{\underline{x} \in Q} f(\underline{x}) \leq \frac{1}{|Q|} \int \int_Q f \leq \sup_{\underline{x} \in Q} f(\underline{x})$ 7) se $f \in C(Q)$

allora esiste $\underline{x}_o \in Q$ tale che $\frac{1}{|Q|} \int \int_Q f(\underline{x}) = f(\underline{x}_o)$

Dimostrazione Scriviamo solo i punti salienti della dimostrazione.

1) se $m_{i,j} = \inf_{\underline{x} \in Q_{i,j}} f(\underline{x})$ e $M_{i,j} = \sup_{\underline{x} \in Q_{i,j}} f(\underline{x})$ allora $\inf_{\underline{x} \in Q_{i,j}} (cf)(\underline{x}) = cm_{i,j}$ e $\sup_{\underline{x} \in Q_{i,j}} (cf)(\underline{x}) = cM_{i,j}$

2) $\inf_{\underline{x} \in Q_{i,j}} f(\underline{x}) + \inf_{\underline{x} \in Q_{i,j}} g(\underline{x}) \leq \inf_{\underline{x} \in Q_{i,j}} (f+g)(\underline{x}) \leq \sup_{\underline{x} \in Q_{i,j}} (f+g)(\underline{x}) \leq \sup_{\underline{x} \in Q_{i,j}} f(\underline{x}) + \sup_{\underline{x} \in Q_{i,j}} g(\underline{x})$ ^(7.3)

3) se $f(\underline{x}) \leq g(\underline{x})$ per ogni $\underline{x} \in Q$ si ha $\sup_{\underline{x} \in Q_{i,j}} f(\underline{x}) \leq \sup_{\underline{x} \in Q_{i,j}} g(\underline{x})$

4) le affermazioni sono due. La prima è che $|f| \in \mathcal{R}(Q)$. Ciò deriva dal fatto che $||a| - |b|| \leq |a - b|$ per ogni a e b reali. Quindi si ha $||M_{i,j}| - |m_{i,j}|| \leq |M_{i,j} - m_{i,j}|$

La seconda affermazione ossia che $|\int \int_Q f| \leq \int \int_Q |f|$ deriva da $|a + b| \leq |a| + |b|$ e quindi

$$|\sum_{i,j} M_{i,j} |Q_{i,j}| | \leq \sum_{i,j} |M_{i,j}| |Q_{i,j}|$$

5) $|M_{i,j}| \leq \sup_{\underline{x} \in Q} |f(\underline{x})| \leq A$

6) $\inf_{\underline{x} \in Q} f(\underline{x}) \leq m_{i,j}$ e $M_{i,j} \leq \sup_{\underline{x} \in Q} f(\underline{x})$ qualunque siano i, j

7) Se f è continua, essendo Q compatto, si ha $\inf_{\underline{x} \in Q} f(\underline{x}) = \min_{\underline{x} \in Q} f(\underline{x}) = f(\underline{y})$ per un determinanto \underline{y} e inoltre $\sup_{\underline{x} \in Q} f(\underline{x}) = \max_{\underline{x} \in Q} f(\underline{x}) = f(\underline{y}')$ per un determinanto \underline{y}' . Per il teorema dei valori intermedi, la funzione $f(\underline{x})$ assume tutti i valori compresi nell'intervallo $[f(\underline{y}), f(\underline{y}')] e \frac{1}{|Q|} \int \int_Q f(\underline{x})$ è uno di questi per la 6). ■

La definizione di integrabilità delle funzioni conduce al seguente

Teorema 7.2 Sia $f: Q \rightarrow \mathbb{R}$. Allora $f \in \mathcal{R}(Q)$ se e solo se $\forall \varepsilon > 0 \exists P_\varepsilon \in \mathcal{P}$ t.c. $S(f; P_\varepsilon) - s(f; P_\varepsilon) < \varepsilon$

Dimostrazione Detto $I = \sup_{P \in \mathcal{P}} s(f; P)$, dalla definizione di sup abbiamo che $\forall \varepsilon > 0 \exists \tilde{P}_\varepsilon$ t.c. $I -$

(7.3) Bisogna saper dimostrare le due relazioni

$s(f; \tilde{P}_\varepsilon) < \varepsilon$. Detto $J = \inf_{P \in \mathcal{P}} S(f; P)$, dalla definizione di inf abbiamo $\forall \varepsilon > 0 \exists P'_\varepsilon$ t.c. $S(f; P'_\varepsilon) - J < \varepsilon$. Dal fatto che $I = J$ abbiamo $S(f; P'_\varepsilon) - s(f; \tilde{P}_\varepsilon) < 2\varepsilon$. Poiché non sappiamo se \tilde{P}_ε è più fine di P'_ε o viceversa, prendiamo $P_\varepsilon = \tilde{P}_\varepsilon \cup P'_\varepsilon$ che è più fine di entrambe. Dalla 1) del Lemma 7.2 si ha $s(f; \tilde{P}_\varepsilon) \leq s(f; P_\varepsilon) \leq S(f; P_\varepsilon) \leq S(f; P'_\varepsilon)$ e quindi $S(f; P_\varepsilon) - s(f; P_\varepsilon) < 2\varepsilon$ ossia quanto dovevamo dimostrare. Viceversa ora supponiamo che $\forall \varepsilon > 0 \exists P_\varepsilon \in \mathcal{P}$ t.c. $S(f; P_\varepsilon) - s(f; P_\varepsilon) < \varepsilon$. Vogliamo concludere che $I = J$. Se fosse $I < J$, l'unica possibile, chiamando $d = J - I$, dovremmo avere per forza la relazione $S(f; P) - s(f; P) \geq d$ qualunque sia P entrando così in contraddizione con l'ipotesi. ■

Grazie al teorema dimostrato, possiamo già enunciare e dimostrare un teorema di integrabilità per funzioni continue.

Teorema 7.3 *Sia data $f: Q \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Allora f è integrabile*

Dimostrazione Q è compatto e quindi la funzione è uniformemente continua (teorema di Heine–Cantor) ossia $\forall \bar{\varepsilon} > 0 \exists \delta_{\bar{\varepsilon}}$ t.c. $\|\underline{x} - \underline{y}\| < \delta_{\bar{\varepsilon}} \Rightarrow |f(\underline{x}) - f(\underline{y})| < \bar{\varepsilon}$. Per il Teorema 7.2 dobbiamo far vedere che $\forall \varepsilon > 0 \exists P_\varepsilon \in \mathcal{P}$ t.c. $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (M_{i,j} - m_{i,j}) |Q_{i,j}| < \varepsilon$. Dalla definizione di sup e inf, all'interno del rettangolo $Q_{i,j}$ esistono due punti \underline{z} e \underline{z}' tale che $|f(\underline{z}) - m_{i,j}| < \varepsilon'$ e $|f(\underline{z}') - M_{i,j}| < \varepsilon'$ per cui $(M_{i,j} - m_{i,j}) < |f(\underline{z}) - f(\underline{z}')| + 2\varepsilon'$. Scegliendo ora la partizione P in rettangoli la cui diagonale è sempre più piccola di δ_ε , si ha $(M_{i,j} - m_{i,j}) < \bar{\varepsilon} + 2\varepsilon'$. Ne consegue che $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (M_{i,j} - m_{i,j}) |Q_{i,j}| < (\bar{\varepsilon} + 2\varepsilon') |Q| < \varepsilon$ non appena $\bar{\varepsilon} + 2\varepsilon' < \frac{\varepsilon}{|Q|}$ ■

Una volta accertato che una funzione è integrabile su Q , il problema successivo è calcolare l'integrale. Contrariamente al caso degli integrali di una variabile, non esiste il concetto di primitiva così essenziale in quella teoria. La teoria degli integrali di una variabile può tuttavia essere applicata grazie ai seguenti teoremi

Teorema 7.4 *Sia data la funzione $f: Q \rightarrow \mathbb{R}$ $f \in \mathcal{R}(Q)$ e supponiamo che per ogni $x \in [a, b]$ esista la funzione $x \rightarrow \int_c^d f(x, y) dy$. Allora esiste l'integrale $\int_a^b dx \int_c^d dy f(\underline{x})$ ed è uguale a $\int \int_Q f(\underline{x}) dx dy$*

Dimostrazione Con la lettera \mathcal{P} indichiamo l'insieme delle partizioni del quadrato Q . Con P indichiamo un elemento di \mathcal{P} . Con la lettera \mathcal{C} indichiamo l'insieme delle partizioni dell'intervallo $[a, b]$. Con C indichiamo un elemento di \mathcal{C} . Con la lettera \mathcal{D} indichiamo l'insieme delle partizioni dell'intervallo $[c, d]$. Con D indichiamo un elemento di \mathcal{D} .

$$f \in \mathcal{R}(Q) \text{ significa che } \forall \bar{\varepsilon} > 0 \exists P_{\bar{\varepsilon}} \in \mathcal{P} \text{ t.c. } \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (M_{i,j}^{P_{\bar{\varepsilon}}} - m_{i,j}^{P_{\bar{\varepsilon}}}) |Q_{i,j}| < \bar{\varepsilon}. \quad (7.4)$$

Sia $F(x) \stackrel{\text{def}}{=} \int_c^d dy f(x, y)$ e sia C una generica partizione dell'intervallo $[a, b]$. Siano x_0, \dots, x_n gli elementi della partizione. Con \tilde{M}_i e con \tilde{m}_i indichiamo rispettivamente $\sup_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} F(x)$ e $\inf_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} F(x)$

Usando le ipotesi del Teorema, vogliamo dapprima far vedere che $\forall \varepsilon > 0 \exists C_\varepsilon$ t.c. $S(F; C_\varepsilon) - s(F; C_\varepsilon) < \varepsilon$ (ossia l'integrabilità della funzione $F(x)$). Dopo mostriamo che l'integrale è uguale a $\int \int_Q dx dy f(x, y)$.

$$\text{Sia } C \text{ una generica partizione dell'intervallo } [a, b]. \quad S(F; C) - s(F; C) = \sum_{i=1}^{n_1} (\tilde{M}_i^C - \tilde{m}_i^C) (x_i - x_{i-1}) \quad (7.5)$$

(7.4) È stato posto l'indice $\bar{\varepsilon}$ in $P_{\bar{\varepsilon}}$ per differenziare altre quantità analoghe presenti nella dimostrazione

(7.5) qui le somme $S(F; C)$ e $s(F; C)$ sono somme di Riemann per funzioni di una variabile

$$\text{e quindi } S(F; C) - s(F; C) = \sum_{i=1}^{n_1} \left(\sup_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} \int_c^d dyf(x, y) - \inf_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} \int_c^d dyf(x, y) \right) (x_i - x_{i-1})$$

$$\text{Per definizione } \int_c^d dyf(x, y) = \sup_{D \in \mathcal{D}} \sum_{j=1}^{m_1} m_j^D(x)(y_j - y_{j-1}) = F(x) = \inf_{D \in \mathcal{D}} \sum_{j=1}^{m_1} M_j^D(x)(y_j - y_{j-1})$$

$$\text{dove } m_j^D(x) = \inf_{y_{j-1} \leq y \leq y_j} f(x, y) \text{ e } M_j^D(x) = \sup_{y_{j-1} \leq y \leq y_j} f(x, y).$$

$$\begin{aligned} S(F; C) - s(F; C) &\leq \\ &= \sum_{i=1}^{n_1} \left(\sup_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} \sum_{j=1}^{m_1} M_j^D(x)(y_j - y_{j-1}) - \sum_{j=1}^{m_1} m_j^D(x)(y_j - y_{j-1}) \right) (x_i - x_{i-1}) \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{m_1} \left(\sup_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} M_j^D(x)(y_j - y_{j-1}) - \inf_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} m_j^D(x)(y_j - y_{j-1}) \right) (x_i - x_{i-1}) = \\ &= \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{m_1} \left(\sup_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} \sup_{y_{j-1} \leq y \leq y_j} f(x, y)(y_j - y_{j-1}) - \inf_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} \inf_{y_{j-1} \leq y \leq y_j} f(x, y)(y_j - y_{j-1}) \right) (x_i - x_{i-1}) = \\ &= \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{m_1} \left(\sup_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} \sup_{y_{j-1} \leq y \leq y_j} f(x, y) - \inf_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} \inf_{y_{j-1} \leq y \leq y_j} f(x, y) \right) (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) \end{aligned}$$

Se indichiamo con $Q_{i,j} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ e con $M_{i,j} = \sup_{y_{j-1} \leq x \leq y_j} f(x, y)$ e $m_{i,j} = \inf_{y_{j-1} \leq x \leq y_j} f(x, y)$

$$\text{possiamo scrivere la precedente formula come } \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{m_1} (M_{i,j} - m_{i,j}) |Q_{i,j}|$$

Sia ora P la partizione del quadrato Q data dall'unione della partizione C su $[a, b]$ e D su $[c, d]$.

Prendiamo la partizione di Q data da $\overline{P} \stackrel{\text{def}}{=} P \cup P_{\overline{\varepsilon}}$ ed otteniamo $\sum_{i=1}^{n_2} \sum_{j=1}^{m_2} (M_{i,j}^{\overline{P}} - m_{i,j}^{\overline{P}}) |Q_{i,j}| < \overline{\varepsilon}$. Dalla

integrabilità di $f(x, y)$ su Q segue che $0 < S(F; C) - s(F; C) < \varepsilon$ con ε piccolo a piacere e quindi l'integrabilità della funzione $F(x)$.

$$\text{Vogliamo ora far vedere che } \int_a^b dx F(x) = \int \int_Q dx dy f(x, y).$$

$$\begin{aligned} |S(F; C) - \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{m_1} \sup_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} \sup_{y_{j-1} \leq y \leq y_j} f(x, y)(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})| &= \\ &= \left| \sum_{i=1}^{n_1} \sup_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} \int_c^d dyf(x, y)(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{m_1} \sup_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} \sup_{y_{j-1} \leq y \leq y_j} f(x, y)(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) \right| \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^{n_1} \sup_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} \left(\left| \int_c^d dyf(x, y) - \sum_{j=1}^{m_1} \sup_{y_{j-1} \leq y \leq y_j} f(x, y)(y_j - y_{j-1}) \right| \right) (x_i - x_{i-1}) \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^{n_1} \sup_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} (x_i - x_{i-1}) \varepsilon = (b - a) \varepsilon \end{aligned}$$

e quindi è piccola a piacere. ■

Osservazione i) Il teorema appena dimostrato consente di trovare l'integrale su di un quadrato eseguendo l'integrazione prima rispetto a y e poi rispetto a x . Se nell'enunciato del teorema sostituiamo l'ipotesi che esista $\int_c^d dyf(x, y)$ per ogni x con l'ipotesi che per ogni y esista l'integrale $\int_a^b dx f(x, y)$, la

tesi diventa che esiste l'integrale $\int_c^d dy \int_a^b dx f(x, y)$ ed è uguale all'integrale doppio $\int \int_Q dx dy f(x, y)$.

ii) se esiste l'integrale $\int \int_Q f(x, y)$ non è detto che esista l'integrale $\int_c^d dy f(x, y)$ per ogni x . Sia data la

funzione in $Q = [0, 1] \times [0, 1]$, $\mathcal{X}_{\mathbb{Q}_y} = \begin{cases} 1 & y \in \mathbb{Q} \\ 0 & y \in \mathbb{Q}^c \end{cases}$ e si consideri la funzione $f(x, y) = \begin{cases} \mathcal{X}_{\mathbb{Q}_y} & x = \frac{1}{3} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

Si dimostri che $\int \int_Q f(x, y)$ esiste ma non esiste $\int_0^1 f(\frac{1}{3}, y) dy$

Esercizio siano date le funzioni $\mathcal{X}_{\mathbb{Q}_x}(x, y) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{Q}^c \end{cases}$ e $f(x, y) = \mathcal{X}_{\mathbb{Q}_x} \sin(2\pi y)$, $(x, y) \in [0, 1] \times$

$[0, 1]$. Si consideri la seguente affermazione: la funzione $x \rightarrow \int_0^1 dy f(x, y)$ è definita per ogni x . Allora esiste l'integrale $\int_0^1 dx \int_0^1 dy f(x, y)$ ed è uguale a $\int \int_{[0,1] \times [0,1]} f(x, y) dx dy$. Vero o falso?

Corollario 7.1 Sia data una funzione $f: Q \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Allora $\int \int_Q dx dy f(x, y) = \int_a^b dx \int_c^d dy f(x, y) = \int_c^d dy \int_a^b dx f(x, y)$

Dimostrazione Basta verificare che la funzione soddisfa le ipotesi del teorema. Fissando $x = x_o$ nella funzione, la funzione di una variabile $f(x_o, y): [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ è continua e quindi soddisfa l'ipotesi del teorema. Fissando y_o si hanno le stesse conclusioni. ■

Il passaggio successivo consiste nello studiare l'integrabilità di funzioni definite su rettangoli ma non necessariamente continue ovunque. Data $f: D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sia $Disc(f)$ l'insieme dei punti di discontinuità della funzione.

Definizione 7.5 i) Sia $D \subset \mathbb{R}^2$. Il numero $\rho(\underline{x}, D) = \inf_{y \in D} \rho(\underline{x}, y)$ si chiama distanza di x da D ii) dati due sottoinsiemi di \mathbb{R}^2 D e D' , si chiama distanza fra D e D' il numero reale $\rho(D, D') = \inf_{(\underline{x} \in D, \underline{y} \in D')} \rho(\underline{x}, \underline{y})$ iii) Dato un qualsiasi insieme $D \subset \mathbb{R}^{2(7.6)}$, si dice che D ha misura nulla (è nullo ; proprietà indicata con $\mu(D) = 0$ oppure con $|D| = 0$) se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una

collezione finita di rettangoli $\{R_i^\varepsilon\}_{i=1}^{n_\varepsilon}$ tali che $\sum_{i=1}^{n_\varepsilon} |R_i^\varepsilon| < \varepsilon$, $D \subset R \stackrel{\text{def}}{=} \cup_{i=1}^{n_\varepsilon} R_i^\varepsilon$

Lemma 7.3 Dato un insieme finito di rettangoli $\{R_i\}_{i=1, \dots, N}$, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una collezione finita di rettangoli \tilde{R}_i^ε , $1 \leq i \leq N$, tali che, detta $\tilde{R}_{\rho_\varepsilon}^\varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} \cup_{i=1}^N \tilde{R}_i^\varepsilon$ si ha: 1) $R_i \subset \tilde{R}_i^\varepsilon$, 2) la distanza fra R_i e il complementare di \tilde{R}_i^ε è maggiore o uguale a $\rho_\varepsilon > 0$ per ogni i , 3) $\sum_{i=1}^N \mu(\tilde{R}_i^\varepsilon) \leq \sum_{i=1}^N \mu(R_i^\varepsilon) + \varepsilon$

Dimostrazione Omessa (è essenziale che N sia finito).

Corollario 7.2 La distanza fra R_i e l'insieme $X \setminus \tilde{R}^\varepsilon$ è maggiore o uguale a ρ_ε

Dimostrazione $X \setminus \tilde{R}^\varepsilon \subset X \setminus \tilde{R}_i^\varepsilon$ e la distanza fra R_i^ε e $X \setminus \tilde{R}_i^\varepsilon$ è maggiore o uguale a ρ_ε .

Definizione 7.6 Quando l'insieme R è costituito dai rettangoli della Definizione 7.5, si dice che $\tilde{R}_{\rho_\varepsilon}^\varepsilon$ è un ρ_ε -intorno-chiuso-rettangolare di D

Lemma 7.4 Una funzione continua definita su di un compatto $K \subset \mathbb{R}^2$ i cui punti di discontinuità

(7.6) scriviamo la teoria con $n=2$ ma se $n>2$ la situazione è la stessa

formano l'insieme nullo $Z \subset K$, è uniformemente continua sull'insieme $(K \setminus \tilde{R}) \cup \partial \tilde{R}$ dove \tilde{R} è un ρ -intorno-chiuso-rettangolare di Z ^(7.7)

Dimostrazione Abbiamo $(K \setminus \tilde{R}) \cup \partial \tilde{R} = K \setminus \overset{\circ}{\tilde{R}}$ e $(K \setminus \overset{\circ}{\tilde{R}}) \cap Z = \emptyset$. D'altra parte $K \setminus \overset{\circ}{\tilde{R}}$ è compatto. Infatti sia $\{\underline{x}_n\}$ una successione di Cauchy in $K \setminus \overset{\circ}{\tilde{R}} \subset K$. Quale successione di K , da essa può estrarsi una sottosuccessione $\{\underline{x}_{n_k}\}$ tale che $\underline{x}_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \underline{y} \in K$. \underline{y} non può appartenere a $\overset{\circ}{\tilde{R}}$ poiché è aperto e quindi non rimane che affermare $\underline{y} \in K \setminus \overset{\circ}{\tilde{R}}$. Dunque $K \setminus \overset{\circ}{\tilde{R}}$ è compatto.

Quindi f è una funzione continua sul compatto $K \setminus \overset{\circ}{\tilde{R}}$ da cui la uniforme continuità. ■

Sussiste il seguente teorema

Teorema 7.5 Sia data la funzione limitata $f: Q \rightarrow \mathbb{R}$ dove $Q = [a, b] \times [c, d]$. Sia Z l'insieme dei suoi punti di discontinuità con $\mu(Z) = 0$. Allora f è integrabile secondo Riemann in Q .

Dimostrazione Sia $A \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\underline{x} \in Q} |f(\underline{x})|$ che esiste essendo f limitata. Per ipotesi sia R^ε l'unione di rettangoli R_k^ε $k = 1, 2, \dots, n_\varepsilon$ tale che $Z \subseteq \bigcup_{k=1}^{n_\varepsilon} R_k^\varepsilon$, $\sum_{k=1}^{n_\varepsilon} |R_k^\varepsilon| < \varepsilon$. Sia $\tilde{R}_{\rho^\varepsilon}^\varepsilon$ un ρ -intorno-chiuso-rettangolare di Z e siano \tilde{R}_k^ε i suoi elementi. In base al Lemma 7.3 possiamo scegliere il ρ -intorno in modo che $|R^\varepsilon| + |\tilde{R}_{\rho^\varepsilon}^\varepsilon| \leq 2\varepsilon$. Prendiamo ora una partizione P di Q e sia $\{\tilde{Q}_{r,s}\}$ $1 \leq r \leq n$ e $1 \leq s \leq m$ la famiglia di rettangoli della partizione. Definiamo dei nuovi rettangoli ottenuti prendendo tutte le intersezioni fra la famiglia $\{Q_{r,s}\}$ e la famiglia $\{\tilde{R}_k^\varepsilon\}$. Si ottiene una nuova partizione P' . Poiché l'intersezione di due rettangoli, se non è vuota è scrivibile come unione di altri rettangoli, otteniamo dei nuovi rettangoli che chiamiamo $\{Q_i\}$ $1 \leq i \leq N$. La famiglia di insiemi $\{Q_i\}$ può essere scritta come unione di due sottoinsiemi (sottofamiglie). Nella prima sottofamiglia Q_i $1 \leq i \leq N_1$ mettiamo tutti i rettangoli tali che $Q_i \subseteq \tilde{R}_k^\varepsilon$ per un qualche $k \in \{1, 2, \dots, n_\varepsilon\}$. Nella seconda famiglia $\{Q_i\}$ $N_1 + 1 \leq i \leq N$ mettiamo i rettangoli tali che $Q_i \subset (K \setminus \tilde{R}_{\rho^\varepsilon}^\varepsilon) \cup \partial \tilde{R}_{\rho^\varepsilon}^\varepsilon$. Sia S_1 il primo insieme di rettangoli e S_2 il secondo.

$S(f; P') - s(f; P') = (S^1(f; P') - s^1(f; P')) + (S^2(f; P') - s^2(f; P'))$ dove 1, 2 si riferiscono ai rettangoli dell'insieme 1 oppure 2.

$$1) 0 < (S^1(f; P') - s^1(f; P')) = \sum_{i=1}^{N_1} (M_i - m_i) |Q_i| \leq \sum_{i=1}^{N_1} 2 |M_i| |Q_i| \leq 2A \sum_{i=1}^{N_1} |Q_i| \leq 2A\varepsilon \leq 2A(2\varepsilon)$$

Si usa il fatto che la funzione sia limitata. Se $Z = \emptyset$ allora f sarebbe continua su di un compatto e quindi limitata. Il fatto che $Z \neq \emptyset$ impone di spezzare la partizione P' in due parti e nella prima usare la limitatezza.

$$2) \text{ A patto di prendere i rettangoli della partizione } P \text{ abbastanza piccoli, si può avere } 0 < (S^2(f; P') - s^2(f; P')) = \sum_{N_1+1}^N (M_i - m_i) |Q_i| \leq \max_{N_1+1 \leq i \leq N} |M_i - m_i| \sum_{i=1}^n |Q_i| \leq |Q| \varepsilon'$$

Se $4A\varepsilon + |Q|\varepsilon' < \varepsilon$ si ha $0 < S(f; P') - s(f; P') < \varepsilon$ da cui la integrabilità. Si usa il Lemma 7.4. ■

Osservazione i) ^(7.8) non si possono invertire ipotesi e tesi nel teorema. Ossia esistono funzioni integrabili secondo Riemann per le quali $|Disc(f)| \neq 0$. Un esempio in una dimensione è la *funzione di*

(7.7) Non essendo necessari, non sono stati usati indici quali ε e ρ_ε

(7.8) questa osservazione può essere tralasciata ad una prima lettura

Riemann definita su $[0, 1]$ $f(x) = \begin{cases} q^{-1} & x = \frac{p}{q}, (p, q) = 1, q \neq 0 \\ 1 & \text{altrimenti} \end{cases}$. Si dimostra che $Disc(f) = \mathbb{Q}$

(vedi l'esercizio **6.5**** degli *esercizi in rete*, capitolo 5 sulla continuità) ma non è un insieme nullo. La funzione data è integrabile secondo Riemann (vedi l'esercizio **35.8***** del capitolo 8 degli *esercizi in rete* la cui soluzione dipende da quanto scritto negli esercizi **32.8****, **33.8*****, **34.8*****). Che \mathbb{Q} non è un insieme nullo si dimostra assumendo per assurdo che lo sia. Supponiamo quindi che esista una collezione

finita di rettangoli chiusi (intervalli chiusi) $\{R_i\}$ tale che $\mathbb{Q} \subset (\cup_{i=1}^n R_i) \stackrel{\text{def}}{=} R$ e $\sum_{i=1}^n |R_i| < \varepsilon$. Ne segue

che $l_i \stackrel{\text{def}}{=} |R_i| < \varepsilon$ per ogni i . Sia $R_i^c \stackrel{\text{def}}{=} (0, 1) \setminus R_i$ e quindi $\cap_{i=1}^n R_i^c \subset R_i^c$ per ogni $i \in \{1, \dots, n\}$. Essendo $|R_i^c| = 1 - l_i < 1$ (supponiamo che $|R_i| \neq 0$ per almeno un i ; altrimenti ciascun R_i si riduce a un punto e non può certo essere $\mathbb{Q} \subset (\cup_{i=1}^n R_i)$ essendo \mathbb{Q} numerabile) si ha $\cap_{i=1}^n R_i^c \neq (0, 1)$. Ma $\cap_{i=1}^n R_i^c$ è un insieme aperto essendo intersezione *finita* di insiemi aperti e quindi contiene almeno un punto e tutta una sfera aperta intorno ad esso a sua volta contenuta in $(0, 1)$. La densità dei razionali fa sì che nella sferetta aperta vi è almeno un numero razionale e questo contraddice il fatto che $\mathbb{Q} \subset (\cup_{i=1}^n R_i)$ *ii*)

Notare che la funzione di due variabili su $[0, 1] \times [0, 1]$ $f(x, y) = \begin{cases} q^{-1} & x = \frac{p}{q}, (p, q) = 1, q \neq 0, y = 0 \\ 1 & \text{altrimenti} \end{cases}$

ha viceversa $|Disc(f)| = 0$ e quindi integrabile sul quadrato. La differenza con la funzione precedente è che in questo caso $Disc(f)$ va racchiuso in un insieme finito di rettangoli la cui base può essere piccola a piacere e quindi l'area pure.

Definizione 7.7 Una funzione $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ è detta *generalmente continua* se l'insieme dei suoi punti di discontinuità ha misura nulla.

Il passo successivo consiste nel definire funzioni su insiemi più generali che non rettangoli e studiarne l'integrabilità

Definizione 7.8 Sia data $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, D limitato, (non necessariamente rettangolo). Sia $Q \supset D$ un rettangolo e sia $f^*(\underline{x}) = \begin{cases} f(\underline{x}) & \underline{x} \in D \\ 0 & \underline{x} \in Q \setminus D \end{cases}$

La funzione f è integrabile su D se f^* è integrabile su Q e $\int \int_D dx dy f(x, y) = \int \int_Q dx dy f^*(x, y)$

Osservazioni Se prendessimo un rettangolo $Q' \supset Q \supset D$ avremmo lo stesso valore dell'integrale in quanto su $Q' \setminus Q$ la funzione f^* è nulla.

Il problema è che ove anche f fosse continua in D , f^* ha delle possibili discontinuità su ∂D e quindi dobbiamo chiederci quando $|\partial D| = 0$ in modo da poter affermare l'integrabilità di f^* su Q .

Definizione 7.9 Un insieme limitato $D \subset \mathbb{R}^2$ è detto *misurabile* se ∂D è un insieme nullo.

Teorema 7.6 Sia data $f: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dove D è limitato, misurabile. f è generalmente continua e limitata su D . Allora f è integrabile su D

Dimostrazione La funzione f^* è definita su di un rettangolo contenente D e l'insieme dei suoi punti di discontinuità è contenuto in $Z \cup \partial D$ dove Z è l'insieme dei punti di discontinuità di f su D . È facile vedere che $\mu(Z \cup \partial D) = 0$ quindi possiamo applicare il Teorema 7.5. ■

Esempi Se ne possono fare molti.

- $D = [0, 1] \times [0, 1]$ $f(\underline{x}) \equiv c$ per ogni $\underline{x} \in D$. In questo caso la funzione è continua in D .
- $D = [0, 1] \times [0, 1]$ $f(\underline{x}) \equiv c$ per ogni $\underline{x} \in \overset{\circ}{D}$. $f(\underline{x}) = c' \neq c$ se $\underline{x} \in \partial D$. In questo caso la funzione è discontinua in ∂D che però è un insieme nullo e quindi f è generalmente continua.

I precedenti sono solo tre esempi che in cui D è particolarmente semplice.

Corollario 7.3 Sia data $f: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dove D compatto, misurabile e $f \in C(D)$. Allora f è integrabile su D

Dimostrazione È il caso di prima solo che ora le discontinuità di f^* stanno (eventualmente) solo su ∂D e per ipotesi $\mu(\partial D) = 0$ da cui la funzione f è generalmente continua su di un quadrato contenente D .

■

Esempi Il primo dei precedenti.

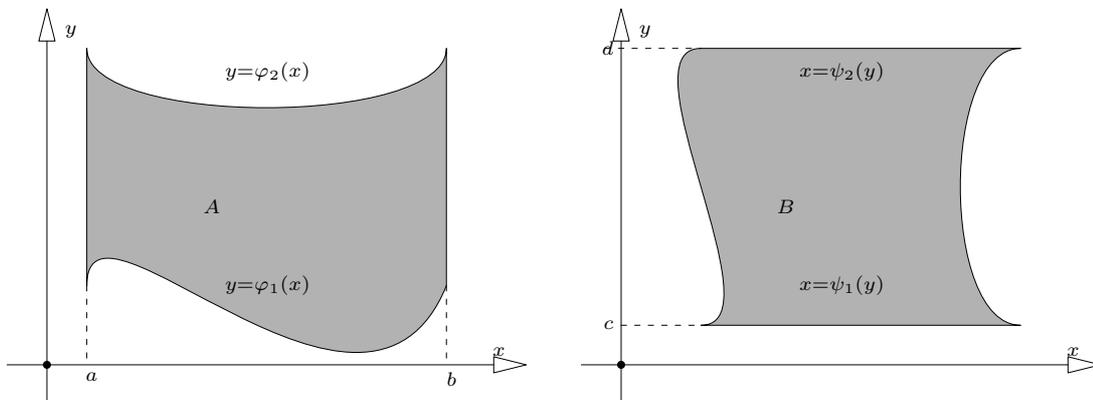
Corollario 7.4 Sia data $f: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dove $D = \overset{\circ}{D}$ misurabile e $f \in C(D)$. Se inoltre $\sup_{\underline{x} \in D} |f(\underline{x})| \leq M$ allora f è integrabile su D

Dimostrazione La funzione f^* è discontinua eventualmente solo su ∂D che è nullo per ipotesi. Inoltre f^* è limitata e si può applicare il Teorema 7.5. ■

Esempi Il secondo dei precedenti.

A questo punto ci poniamo il problema di calcolare esplicitamente qualche integrale. Ci proporremo di calcolare integrali di funzioni definiti su domini particolari

Definizione 7.10 Un insieme della forma $A = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^2: a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$ dove le funzioni φ_1 e φ_2 sono continue è detto *semplice* o *normale* rispetto all'asse y . Un insieme della forma $B = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^2: c \leq y \leq d, \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\}$ dove le funzioni ψ_1 e ψ_2 sono continue è detto *semplice* o *normale* rispetto all'asse x



Teorema 7.7 La frontiera dell'insieme A oppure B è un insieme nullo.

Dimostrazione Consideriamo l'insieme A . La frontiera è chiaramente costituita dai quattro pezzi:

$$\{\underline{x} \in \mathbb{R}^2: x = a, \varphi_1(a) \leq y \leq \varphi_2(a)\}, \quad \{\underline{x} \in \mathbb{R}^2: x = b, \varphi_1(a) \leq y \leq \varphi_2(b)\}, \quad \{\underline{x} \in \mathbb{R}^2: a \leq x \leq b, y = \varphi_1(x)\}, \quad \{\underline{x} \in \mathbb{R}^2: a \leq x \leq b, y = \varphi_2(x)\},$$

Il primo e il secondo hanno evidentemente misura nulla. Ad esempio nel primo caso basta prendere un rettangolo di larghezza ε e che contiene l'insieme. Consideriamo ora il terzo insieme. Usiamo la uniforme

continuità delle funzioni φ_1 e φ_2 per la dimostrazione. Sappiamo che $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0$ t.c. $\|\underline{x} - \underline{y}\| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(\underline{x}) - f(\underline{y})| < \varepsilon$. Costruiamo allora una partizione di $[a, b]$ in modo tale che $t_{j-1} - t_j < \delta_\varepsilon$ e sia N_ε il numero degli intervalli ottenuti. Racchiudiamo il sottoinsieme del grafico $y = \varphi_1(x)$ nel tratto $t_{j-1} \leq t \leq t_j$ all'interno di un rettangolo di base la cui lunghezza è esattamente $t_{j-1} \leq t \leq t_j$ e l'altezza è lunga ε . Se ora ci chiediamo quanto vale la somma delle aree di tutti questi rettangoli abbiamo che essa è $\sum_{i=0}^{N_\varepsilon-1} (t_{j+1} - t_j)\varepsilon = \varepsilon(b - a)$ e quindi l'insieme ha misura nulla. ■

Grazie al Lemma possiamo enunciare il

Teorema 7.8 *Sia dato l'insieme $A = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^2: a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$, φ_1 e φ_2 continue. Sia data la funzione $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Allora esiste $\int \int_A dx dy f(\underline{x}) = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy f(\underline{x})$*

Dimostrazione Prendiamo un quadrato $Q \stackrel{\text{def}}{=} [a', b'] \times [c', d'] \supset A$ $f^*(\underline{x}) = \begin{cases} f(\underline{x}), & \underline{x} \in A \\ 0, & \underline{x} \in Q \setminus A \end{cases}$ Per il

Teorema 7.5 l'integrale doppio $\int \int_Q dx dy f^*(\underline{x})$ esiste e per il Teorema 7.4 esso vale $\int_{a'}^{b'} dx \int_{c'}^{d'} dy f^*(\underline{x})$.

Ma $\int_{c'}^{d'} dy f^*(\underline{x})$ è uguale a $\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy f(\underline{x})$ da cui il risultato. ■

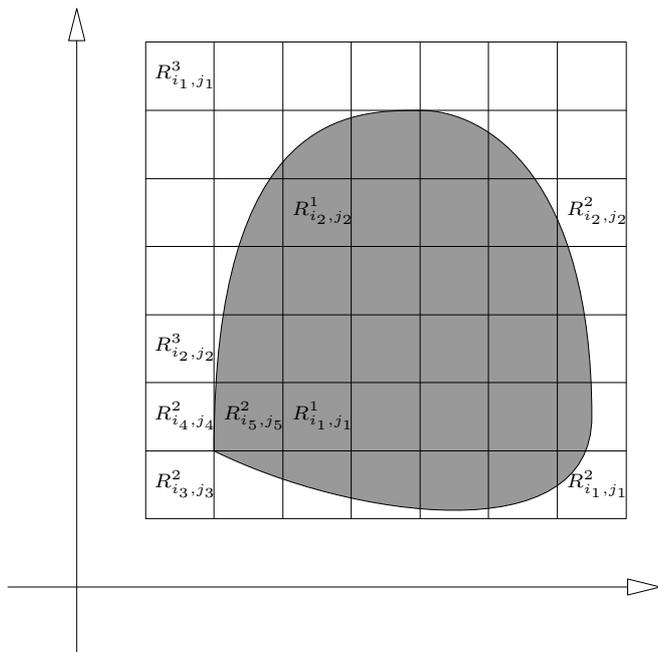
Osservazione i) se il dominio è normale rispetto all'asse x la dimostrazione non cambia se non nei nomi delle grandezze. ii) un dominio può essere normale rispetto ad entrambe gli assi. iii) Se un dominio di integrazione è decomponibile come unione di due o più domini normali rispetto a uno degli assi si possono applicare lo stesso le formule del Teorema 7.8.

Riguardo al punto ii) si può prendere ad esempio l'insieme $x^2 + y^2 \leq 1$. Il dominio è normale rispetto all'asse delle y in quanto si può scrivere come $-1 \leq x \leq 1$ e $-\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}$. La normalità rispetto all'asse delle x si scrive come $-1 \leq y \leq 1$ e $-\sqrt{1-y^2} \leq x \leq \sqrt{1-y^2}$

Un approfondimento sugli insiemi misurabili

Nella Definizione 7.9 abbiamo detto che un insieme è misurabile se la sua frontiera è un insieme nullo. Solitamente a questa conclusione si giunge dopo avere dato un'altra definizione di misurabilità e aver dimostrato che le due definizioni sono equivalenti. La definizione che ora daremo è quella relativa alla *misura di Peano–Jordan* per sottoinsiemi di \mathbb{R}^2

Sia dato un insieme $D \subset \mathbb{R}^2$ tale che $\overset{\circ}{D} \neq \emptyset$ e sia $Q = [a, b] \times [c, d]$ un quadrato che lo contiene nel senso che $\overset{\circ}{Q} \supset \overline{D}$. Prendiamo una partizione P del quadrato e siano $R_{i,j}$ i suoi elementi. I rettangoli $R_{i,j}$ sono suddivisi in due classi: nella prima classe R^1 vengono messi quei rettangoli per cui $R_{i,j}^1 \subset \overset{\circ}{D}$. Nella seconda classe R^2 vengono messi quei rettangoli per cui $R_{i,j}^2 \cap \overline{D} \neq \emptyset$. Nella terza classe R^3 mettiamo quei rettangoli per cui $R_{i,j}^3 \cap \overline{D} = \emptyset$.



Lemma 7.5 Sia hanno le relazioni: 1) $R^2 \cup R^3 = Q$, 2) $\partial R^3 \cap \bar{D} = \emptyset$, 3) $D \subset \overset{\circ}{R^2}$

Dimostrazione 1) Un punto p di Q deve stare in un rettangolo di R^2 oppure R^3 . 2) essendo $\partial R^3 \subset \cup_{i,j} R_{i,j}^3$,^(7.9) se $\partial R^3 \cap \bar{D} \neq \emptyset$, allora esiste (i_o, j_o) tale che $\partial R_{i_o, j_o}^3 \cap \bar{D} \neq \emptyset$. Ma R_{i_o, j_o}^3 è chiuso e quindi $\partial R_{i_o, j_o}^3 \subset R_{i_o, j_o}^3$. Ma allora vuol dire che $R_{i_o, j_o}^3 \cap \bar{D} \neq \emptyset$, e questo è contro le ipotesi. 3) $\partial R^2 \subset$

$\partial R^3 \cup \partial Q$ ^(7.10) e $\partial R^3 \cap \bar{D} = \emptyset$, $\partial Q \cap \bar{D} = \emptyset$, da cui segue che $\partial R^2 \cap \bar{D} = \emptyset$. Di conseguenza si ha $\overset{\circ}{R^2} \supset \bar{D}$

A questo punto definiamo due quantità : $s(P) = \sum_{i,j:R_{i,j}^1} |R_{i,j}|$, e $S(P) = \sum_{i,j:R_{i,j}^2} |R_{i,j}|$ ed è chiaro

che $s(P) \leq S(P)$

Definizione 7.11 Un insieme D si dice misurabile se $\sup_{P \in \mathcal{P}(Q)} s(P) = \inf_{P \in \mathcal{P}(Q)} S(P) \stackrel{\text{def}}{=} \mu(D)$ ^(7.11)

Teorema 7.9 Un insieme $D \subset \mathbb{R}^2$ è misurabile se e solo se ∂D è un insieme nullo

Dimostrazione Dimostriamo la parte \Rightarrow e quindi supponiamo che l'insieme D sia misurabile. Dato quindi $\varepsilon > 0$ esiste una partizione $P \in \mathcal{P}(Q)$ tale che $S(P) - s(P) = \sum_{i,j:R_{i,j}^2} |R_{i,j}| - \sum_{i,j:R_{i,j}^1} |R_{i,j}| < \varepsilon$.

Vogliamo mostrare che $\partial D \subset R^2 \setminus R^1$. $\partial D = \bar{D} \setminus \overset{\circ}{D} \subset R^2 \setminus R^1$ da cui il risultato. Ne consegue che $\partial D \subset \bigcup_{i,j:R_{i,j}^2 \cap R^1 = \emptyset} R_{i,j}^2$ e $\sum_{i,j:R_{i,j}^2 \cap R^1 = \emptyset} |R_{i,j}^2| = \sum_{i,j:R_{i,j}^2} |R_{i,j}| - \sum_{i,j:R_{i,j}^1} |R_{i,j}| < \varepsilon$.

Dimostriamo ora la parte \Leftarrow . Supponiamo che $|\partial D| = 0$ e quindi vi è una famiglia finita di rettangoli $\tilde{R}_{i,j}$ tale che $\partial D \subset \cup_{i,j} \tilde{R}_{i,j}$ e $\sum_{i,j} |\tilde{R}_{i,j}| < \varepsilon$. Data ora una partizione P di Q e detti $P_{i,j}$ i suoi rettangoli

(7.9) viene dal fatto che $\partial(A \cup B) \subset \partial A \cup \partial B$

(7.10) viene dal fatto che $R^2 = Q \setminus R^3 \Rightarrow \partial R^2 \subset \partial Q \cup \partial R^3$

(7.11) $\mu(\emptyset) = 0$

costruiamo tutte le intersezioni $P_{i,j} \cap \tilde{R}_{i',j'}$. Se $P_{i,j} \cap \tilde{R}_{i',j'}$ è un rettangolo ci fermiamo. Se non lo è suddividiamo $P_{i,j} \cap \tilde{R}_{i',j'}$ in altri rettangoli (in altre parole l'intersezione di due rettangoli si può sempre scrivere come unione di rettangoli). Al termine di questa operazione abbiamo una famiglia di rettangoli che chiamiamo $R_{i,j}$. Definiamo come prima la famiglia R^1 e R^2 . Per definizione $R^2 \setminus R^1$ è l'insieme dei rettangoli che interseca ∂D in quanto $\overline{D} = \partial D \cup \overset{\circ}{D}$ e quindi $R^2 \setminus R^1 \subset \cup_{i,j} \tilde{R}_{i,j}$ da cui il risultato. ■

Teorema 7.10 Sia $D \subset \mathbb{R}^2$ misurabile. Allora $\mu(D) = \mu(\overline{D}) = \mu(\overset{\circ}{D})$

Dimostrazione $D \subseteq \overline{D} = \overset{\circ}{D} \cup \partial D$ da cui $\mu(D) \leq \mu(\overline{D}) \leq \mu(\overset{\circ}{D}) + \mu(\partial D) = \mu(\overset{\circ}{D})$.^(7.12) D'altra parte $\overset{\circ}{D} \subseteq D \subseteq \overline{D}$ per cui $\mu(\overset{\circ}{D}) \leq \mu(D) \leq \mu(\overline{D})$. Ne seguono $\mu(\overset{\circ}{D}) = \mu(\overline{D})$, $\mu(\overset{\circ}{D}) = \mu(D)$ e di conseguenza $\mu(D) = \mu(\overline{D})$. ■

Osservazione i) Se un insieme D ha interno vuoto si assume che $\mu(\overset{\circ}{D}) = 0$. Esistono insiemi aventi interno vuoto che sono misurabili e non misurabili. Se come D prendiamo $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ abbiamo $\overset{\circ}{\mathbb{Q}} = \emptyset$ e $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$. Di conseguenza $\mu(\overset{\circ}{\mathbb{Q}}) = 0$ e $\mu(\overline{\mathbb{Q}}) = 1$. Quindi \mathbb{Q} è non misurabile. Se $D = \{\underline{x} \in [0, 1]^2 : x_1 \in \mathbb{Q}, x_2 \in \mathbb{Q}\}$ si ha la stessa conclusione ossia $\overset{\circ}{D} = \emptyset$ mentre $\overline{D} = [0, 1]$. Se invece $D = \{\underline{x} \in [0, 1]^2 : x_1 \in \mathbb{Q}, x_2 = \frac{1}{2}\}$ l'insieme è misurabile come sottoinsieme di \mathbb{R}^2 ma non come sottoinsieme di \mathbb{R} . Infatti $\overset{\circ}{D} = \emptyset$, $\overline{D} = \{\underline{x} \in [0, 1]^2 : x_2 = \frac{1}{2}\}$. Come sottoinsieme di \mathbb{R}^2 si ha $\mu(\overset{\circ}{D}) = 0 = \mu(\overline{D})$ ma come sottoinsieme di \mathbb{R} si ha $\mu(\overset{\circ}{D}) = 0$, $\mu(\overline{D}) = 1$. Anche l'insieme $D = \{\underline{x} \in [0, 1]^2 : x_1 \in \mathbb{Q}\}$ non è misurabile. Infatti $\overset{\circ}{D} = \emptyset$ mentre $\overline{D} = [0, 1]^2$.

Esercizio Dire se è misurabile l'insieme $A = \{x \in \mathbb{R} : x = \frac{1}{n} \ n \geq 1\}$

Teorema 7.105 Dimostrare che l'insieme limitato $D \subset \mathbb{R}^n$ è misurabile se e solo esiste l'integrale $\int_D \mathcal{X}_D(\underline{x}) d\underline{x}$ dove \mathcal{X}_D è come al solito la funzione che vale 1 se $\underline{x} \in D$ e zero altrove.

Osservazione i) Non è detto che l'insieme dei punti di discontinuità della funzione $\mathcal{X}_D(\underline{x})$ coincidano con l'insieme D . Dare un esempio di D in cui $Disc(\mathcal{X}_D)$ è più grande di D stesso.

FINE

Teorema 7.11 Sia $D \subset \mathbb{R}^2$. Valgono le proprietà 1)–4) del Teorema 7.1 sostituendo D al posto di Q . Se D è misurabile valgono le 5) e 6). Se D è misurabile, compatto e connesso allora vale pure la 7).

Definizione Sia dato un insieme $D \subset \mathbb{R}^2$ misurabile. Allora $\int \int_D dx dy$ è l'area dell'insieme D . Se $f: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ e $f \geq 0$, l'integrale $\int \int_D f(x, y) dx dy$ è il volume del solido che ha come base D e altezza variabile da punto a punto pari a $f(x, y)$.

Cambiamento di variabili negli integrali multipli

Sia $\underline{T}: D \rightarrow \underline{T}(D) \subset \mathbb{R}^2$ $D = \overset{\circ}{D} \subset \mathbb{R}^2$ $\underline{T}(u, v) = (\varphi(u, v), \psi(u, v)) \stackrel{\text{def}}{=} (x, y)$ una trasformazione di coordinate che soddisfa le seguenti proprietà 1) $\underline{T} \in C^1(D)$ 2) la matrice Jacobiana 2×2 $J = \begin{pmatrix} \varphi_u & \varphi_v \\ \psi_u & \psi_v \end{pmatrix}$ ha determinante non nullo in D : $\det J \stackrel{\text{def}}{=} \left| \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(u, v)} \right| \neq 0$.

^(7.12) si usa il fatto che se A e B sono misurabili e $A \subset B$ allora $\mu(A) \leq \mu(B)$ proprietà questa non dimostrata ma credibile

Dal Teorema dell'applicazione inversa (Corollario 4.3) segue che \underline{T} manda punti interni di D in punti interni di $\underline{T}(D)$ e quindi $\underline{T}(D) = \overset{\circ}{\underline{T}(D)}$, $\underline{T}(\partial D) = \partial(\underline{T}(D))$. Abbiamo il seguente

Teorema 7.12 Sia $\underline{T}: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \underline{T}(D)$ con $D = \overset{\circ}{D}$. \underline{T} è una applicazione biunivoca soddisfacente la 1), la 2) ed inoltre le derivate di \underline{T} siano limitate in D . Sia $S \subset D$. Allora

a) Se S è misurabile $\underline{T}(S)$ è misurabile e $\int \int_{\underline{T}(S)} dx dy = \int \int_S \left| \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(u, v)} \right| dudv$

b) Se S è misurabile e $f \in C(\underline{T}(S))$ vale la formula $\int \int_{\underline{T}(S)} f(x, y) dx dy = \int \int_S \bar{f}(u, v) \left| \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(u, v)} \right| dudv$

dove $\bar{f}(u, v) = f(\varphi(u, v), \psi(u, v))$

Osservazione i) può essere benissimo $S = D$ ii) in alcuni casi le ipotesi: 1), 2) e la biunivocità della trasformazione \underline{T} possono venire a mancare su un insieme di misura nulla. Il teorema continua a valere. iii) si è data la formula concreta del cambio di coordinate in due dimensioni ma per dimensioni maggiori di due il discorso è lo stesso. iv) $\left| \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(u, v)} \right| dudv$ è l'area del rettangolo infinitesimo che ha per lati i vettori $\underline{u}_1 = (\varphi_u, \psi_u)$ e $\underline{u}_2 = (\varphi_v, \psi_v)$. L'area del rettangolo, che si può immaginare essere tangente punto per punto alla superficie, è il modulo del prodotto vettoriale $\underline{u}_1 \wedge \underline{u}_2$ ed è quindi dato dal determinante.

Esempio Si voglia calcolare l'area della regione piana E la cui frontiera è il sostegno della curva di equazioni parametriche $0 \leq \theta \leq 2\pi$ $\underline{\varphi}(\theta) = \begin{cases} x = f(\theta) \cos \theta \\ y = f(\theta) \sin \theta \end{cases}$. Se E fosse il cerchio di raggio r

avremmo $f(\theta) = r$. Il cambio di coordinate da eseguire è $\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases}$. L'integrale $\int \int_E dx dy$ di-

venta $\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{f(\theta)} \rho d\rho = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta f^2(\theta)$. Se avessimo una ellisse di equazioni $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$ dapprima cambieremmo $x' = \frac{x}{a}$ $y' = \frac{y}{b}$ dimodoché l'ellisse diventi il cerchio di raggio 1 e l'integrale diventa

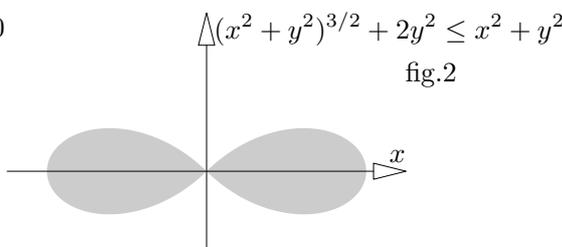
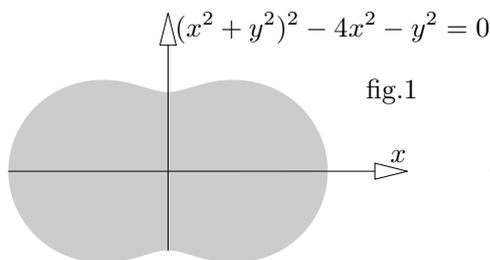
$\int \int_{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1} dx dy = ab \int \int_{(x')^2 + (y')^2 \leq 1} dx' dy'$. Poi si userebbero le coordinate polari di prima ed otterremmo πab .

Esempio cominciamo con il calcolare l'area del cerchio di raggio r . L'integrale da calcolare è $\int \int_{\{x^2 + y^2 \leq r^2\}} dx dy$. Il dominio è normale rispetto ad ambedue gli assi per cui scegliamo la normalità rispetto all'asse y . $\{x^2 + y^2 \leq r^2\} = \{(x, y): -r \leq x \leq r, -\sqrt{r^2 - x^2} \leq y \leq \sqrt{r^2 - x^2}\}$. L'integrale diventa quindi $\int_{-r}^r dx \int_{-\sqrt{r^2 - x^2}}^{\sqrt{r^2 - x^2}} dy = 2 \int_{-r}^r dx \int_0^{\sqrt{r^2 - x^2}} dy = 4 \int_0^r dx \int_0^{\sqrt{r^2 - x^2}} dy = 4 \int_0^r dx \sqrt{r^2 - x^2}$. Cambiando variabile $x = r \sin t$ si ha $4 \int_0^r dx \sqrt{r^2 - x^2} = 4r^2 \int_0^{\pi/2} \cos^2 t = 4r^2 \frac{\pi}{4} = \pi r^2$

Lo stesso integrale si calcola passando a coordinate polari: $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$. Riferendoci al Teorema 7.12 la trasformazione è $\underline{T}(\rho, \theta) = (\varphi(\rho, \theta), \psi(\rho, \theta)) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$. $D = \{(\rho, \theta): 0 \leq \rho \leq r, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$. $J = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\rho \sin \theta \\ \sin \theta & \rho \cos \theta \end{pmatrix}$ e $|\det(J)| = \rho$. La funzione f è la funzione identicamente uguale a 1. $\underline{T}(D)$ è il cerchio di raggio r . Vediamo se tutte le condizioni del teorema sono verificate. $\underline{T} \in C^1(D)$

in quanto la trasformazione è fatta da funzioni derivabili con derivate continue. Lo iacobiano della trasformazione si annulla per $\rho = 0$ ma l'insieme dei valori per cui $\rho = 0$ ha misura nulla. D e $\underline{T}(D)$ sono ambedue misurabili e $f \in C^1(D)$ con derivate limitate (sono tutte nulle). Possiamo applicare la formula del cambio di variabili con $S = D$ ottenendo $\int \int_{x^2+y^2 \leq r} dx dy = \int \int_{[0,r] \times [0,2\pi]} \rho d\theta d\rho$. È immediato notare che l'insieme $\underline{T}(D)$ è normale rispetto a tutti e due gli assi ρ, θ e l'integrale soddisfa le ipotesi del Teorema 7.3. Si ottiene quindi $\int \int_{[0,r] \times [0,2\pi]} \rho d\theta d\rho = \int_0^r \int_0^{2\pi} \rho d\rho d\theta = \pi r^2$

Esempio Calcolare l'area della porzione di piano definita da $(x^2 + y^2)^2 - 4x^2 - y^2 \leq 0$ (*Lemniscata di Bernoulli*) rappresentata in fig.1



Passando a coordinate polari la curva $(x^2 + y^2)^2 - 4x^2 - y^2 = 0$ è data $x = \sqrt{1 + 3 \cos^2 \theta} \cos \theta, y = \sqrt{1 + 3 \cos^2 \theta} \sin \theta$, e l'area della figura è $4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\sqrt{1+3 \cos^2 \theta}} \rho d\rho = \frac{5}{2} \pi$

Esempio Calcolare l'area della porzione di piano definita da $(x^2 + y^2)^{3/2} + 2y^2 \leq x^2 + y^2$ rappresentata in fig.2

In coordinate polari la curva è $\rho = \cos 2\theta, -\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ e $\frac{3\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{4}$. L'area è data dall'integrale $2 \int_{-\pi/4}^{\pi/4} d\theta \int_0^{\cos 2\theta} \rho d\rho = \frac{\pi}{4}$

Integrali tripli

Un insieme $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ è detto *semplice* o *normale* rispetto all'asse z se può essere scritto come $\Omega = \{ \underline{x} \in \mathbb{R}^3 : g_1(x, y) \leq z \leq g_2(x, y), (x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2 \}$ e D è semplice. g_1 e g_2 sono funzioni continue.

Si supponga ora di dover integrare la funzione $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ nell'insieme Ω . Se f è continua l'integrale esiste e vale $\int \int \int_{\Omega} f(x, y, z) = \int \int_D dx dy \int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x, y, z) dz$. Da un punto di vista geometrico il precedente integrale è detto *per fili* in quanto si sommano gli integrali $\int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x, y, z) dz$ ottenuti integrando la f lungo il filo (*segmento*) verticale $[g_1(x, y), g_2(x, y)]$.

Un'altro possibile modo di risolvere il precedente integrale è costituito dalla *integrazione per strati*. Sia $\Omega_{z_0} = \Omega \cap \{z = z_0\}$ (è una porzione piana (*strato*) che si trova ad altezza z_0). Ne segue che $\int \int \int_{\Omega} f(x, y, z) = \int_{z_{min}}^{z_{max}} dz \left(\int_{\Omega_z} f(x, y, z) dx dy \right)$

Quando $f \equiv 1$ si ottiene il volume della regione Ω

Esempio Si voglia calcolare il volume dell'ellissoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ la cui formula è $V = \int \int \int_{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1} dx dy dz$. Possiamo usare tre diverse integrazioni. Innanzitutto scriviamo $V = 8V_1$

dove $V_1 = \int \int \int_{\substack{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \\ x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0}} dx dy dz.$

- Integrazione con variabili cartesiane (per fili)

$$V_1 = \int \int_{\substack{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \\ x \geq 0, y \geq 0}} dx dy \int_0^{c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}} dz = \int \int_{\substack{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \\ x \geq 0, y \geq 0}} c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} dx dy.$$

$V_1 = \int_0^a dx \int_0^{b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}} c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} dy.$ Con la sostituzione $y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \sin t$ l'integrale diventa $bc \int_0^a dx \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt (\cos^2 t) (1 - \frac{x^2}{a^2}) = \pi \frac{abc}{6}$ da cui $V = \frac{4}{3}\pi abc.$

Una volta arrivati a $\int \int_{\substack{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \\ x \geq 0, y \geq 0}} c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} dx dy$ si può passare alle coordinate *polari el-*

littiche $x = a\rho \cos t, y = b\rho \sin t,$ il cui iacobiano è $J = ab\rho$ e quindi l'integrale diventa $abc \int_0^1 \rho \sqrt{1 - \rho^2} d\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt = abc \frac{\pi}{2} (1 - \rho^2)^{3/2} \frac{1}{3} \Big|_0^1 = \frac{\pi}{6} abc.$ Nelle variabili (ρ, t) D è il rettangolo $[0, 1] \times [0, \frac{\pi}{2}]$ e valgono le stesse considerazioni fatte per le coordinate polari precedenti

- Integrazione con variabili cartesiane (per strati) $V = \int_0^c dz \int \int_{\substack{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 - \frac{z^2}{c^2}} dx dy = \pi ab \int_0^c dz (1 - \frac{z^2}{c^2}) = 2\pi ab(c - \frac{1}{3}c) = \frac{4}{3}\pi abc$

In pratica, fissato il valore $z,$ si calcola l'area della porzione di ellisse ottenuta ($\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{z^2}{c^2}$) e poi si somma rispetto a tutte le ordinate.

- Integrazione con coordinate polari tridimensionali. $x = a\rho \sin u \cos v, y = b\rho \sin u \sin v, z = c\rho \cos u,$ lo iacobiano è $J = abc\rho^2 \sin u.$ L'insieme D è il parallelepipedo $[0, 1] \times [0, \pi] \times [0, 2\pi], 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq u \leq \pi, 0 \leq v \leq 2\pi.$ L'integrale diventa $abc \int_0^1 \rho^2 d\rho \int_0^\pi \sin u du \int_0^{2\pi} dv = abc\pi \frac{4}{3}.$ Si verifica che non tutte le condizioni del Teorema 7.12 sono verificate ma gli insiemi su cui non lo sono hanno misura nulla.

Esempio Si voglia calcolare il volume racchiuso dal piano (x, y) e dal paraboloido ellittico di equazione $z = a - x^2 - y^2$ $a > 0.$

- primo modo. $\int \int_{x^2+y^2=a} dx dy (a - x^2 - y^2) = 2 \int \int_{\substack{x^2+y^2=a \\ x \geq 0, y \geq 0}} dx dy (a - x^2 - y^2) = 2 \int_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}} dx \int_0^{\sqrt{a-x^2}} (a - x^2 - y^2) dy = 2 \int_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}} dx (ay - x^2y - \frac{1}{3}y^3) \Big|_0^{\sqrt{a-x^2}} = 2 \int_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}} dx (a - x^2)\sqrt{a - x^2} - \frac{1}{3}(a - x^2)^{3/2} = \frac{4}{3} \int_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}} dx (a - x^2)^{3/2} = \frac{4}{3} a^2 \int_{\pi/2}^{\pi/2} \cos^4 t = \frac{a^2}{2} \pi$ (si cambia variabile $x = \sqrt{a} \sin t$).

- secondo modo. $\int_0^a dz \int \int_{x^2+y^2=a-z} dx dy = \int_0^a dz \pi(a - z) = \pi(a^2 - \frac{1}{2}a^2) = \frac{a^2}{2} \pi$
- **Esercizio** Sia dato il volume $V = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3: x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2\}$ avente densità di massa costante $\delta.$ Si vuole calcolare il potenziale gravitazionale in un qualsiasi punto dello spazio sia interno che esterno al volume.

Sia $\underline{y}_0 \equiv (\xi, \eta, \zeta)$ un punto dello spazio. Orientiamo gli assi in modo che il punto \underline{y}_0 stia sull'asse z ossia abbia coordinate $(0, 0, \zeta).$ Il potenziale generato da V in \underline{y}_0 è $I = \int \int \int_V \frac{\delta dx dy dz}{dist(\underline{x}, \underline{y}_0)}.$ L'integrale

diventa $\delta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\vartheta \int_0^r d\rho \frac{\rho^2 \sin \vartheta}{\sqrt{\rho^2 - 2\rho\zeta \cos \vartheta + \zeta^2}} = \frac{2\pi\delta}{\zeta} \int_0^r d\rho (\rho + \zeta - |\rho - \zeta|).$ Si è usato il fatto

che

$$\left(\frac{1}{\rho\zeta}\sqrt{\rho^2 - 2\rho\zeta\cos\vartheta + \zeta^2}\right)' = \frac{\rho^2\sin\vartheta}{\sqrt{\rho^2 - 2\rho\zeta\cos\vartheta + \zeta^2}}$$

Ora dobbiamo dividere i due casi $\zeta > r$ e $\zeta \leq r$.

Primo caso. Sia $\zeta > r$. L'integrale è $\frac{2\pi\delta}{\zeta} \int_0^r d\rho\rho(\rho + \zeta - (\zeta - \rho)) = \frac{2\pi\delta}{\zeta} \int_0^r d\rho 2\rho^2 = \frac{4\pi}{3}\delta\frac{r^3}{\zeta}$. Il risultato è quello classico: il potenziale è come se fosse generato da una massa tutta concentrata nell'origine.

Secondo caso. Se $r > \zeta > 0$ otteniamo invece $\frac{2\pi\delta}{\zeta} \left(\int_0^\zeta d\rho\rho(\rho + \zeta - (\zeta - \rho)) + \int_\zeta^r (\rho + \zeta - (\rho - \zeta)) \right) = 2\pi\delta(r^2 - \frac{1}{3}\zeta^2)$ e si può notare che per $\zeta = r$ le due formule coincidono.

Esercizio Sia dato il volume $V = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3: x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2\}$ avente densità di massa costante δ . Si vuole calcolare il potenziale gravitazionale in un qualsiasi punto dello spazio sia interno che esterno al volume.

Per chi ricorda un pò di fisica e le equazioni differenziali, noterà che all'interno della sfera vige un potenziale di tipo "oscillatore armonico". Se quindi immaginiamo di lasciare cadere verso il centro della terra un oggetto materiale "che non urta e non fa attrito", esso si muoverebbe di moto oscillatorio (risultato questo non del tutto ovvio).

Esercizio Sia V il volume racchiuso dal parabolide iperbolico $rz = xy$ $r > 0$, dal cilindro $x^2 + y^2 - 2ry = 0$, dal piano $x = 0$ e dal piano $y = r$.

La regione interessata si proietta sul piano (x, y) nell'insieme $x^2 + y^2 - 2ry \leq 0$, $x \geq 0$, $0 \leq y \leq r$ che chiamiamo S .

- **integrazione per fili** Abbiamo $V = \int_S \frac{xy}{r}$. Introduciamo coordinate polari $x = \rho\cos\theta$, $y = r + \rho\sin\theta$ e l'integrale diventa $\int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi} d\rho\rho\frac{1}{r}(\rho\cos\theta)(r + \rho\sin\theta) = \frac{5}{24}r^3$

- **integrazione per strati** Fissando il valore $x = x_o$ otteniamo $x_o^2 + y^2 - 2ry \leq 0$, $0 \leq z \leq \frac{x_o}{r}y$ e sul piano (z, y) le condizioni definiscono un trapezio le cui basi maggiori e minori hanno lunghezza rispettivamente r e $\frac{x_o}{r}(r - \sqrt{r^2 - x_o^2})$. L'altezza è $\sqrt{r^2 - x_o^2}$. Per la base maggiore bisogna osservare che $r + \sqrt{r^2 - x_o^2}$, che è soluzione della equazione $x_o^2 + y^2 - 2ry = 0$, è maggiore di r . L'area del trapezio è $\sqrt{r^2 - x_o^2}(x_o - \frac{1}{2}\frac{x_o}{r}\sqrt{r^2 - x_o^2})$ e il volume cercato è $V = \int_0^r dx\sqrt{r^2 - x_o^2}(x_o - \frac{1}{2}\frac{x_o}{r}\sqrt{r^2 - x_o^2}) = \frac{1}{3}(r^2 - x_o^2)^{3/2} \Big|_0^r - \frac{1}{2}\int_0^r dx\frac{x}{r}(r^2 - x_o^2) = \frac{1}{3}r^3 - \frac{1}{2r}(r^4 - \frac{r_o^4}{4}) = \frac{5}{24}r^3$.

- Si calcoli il volume della "ciambella" la cui proiezione sul piano $z = 0$ è data dalle due circonferenze di raggi $r_1 < r_2$. La parametrizzazione del volume è $a = \frac{1}{2}(r_2 + r_1)$, $b = \frac{1}{2}(r_2 - r_1)$

$$x = a\cos\vartheta + b\rho\cos\varphi\cos\vartheta = \cos\vartheta(a + b\rho\cos\varphi) \quad 0 \leq \vartheta \leq 2\pi \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \quad 0 \leq \rho \leq 1$$

$$y = a\sin\vartheta + b\rho\cos\varphi\sin\vartheta = \sin\vartheta(a + b\rho\cos\varphi)$$

$$z = b\rho\sin\varphi$$

La matrice iacobiana è $J = \begin{pmatrix} -a\sin\vartheta - b\rho\sin\vartheta\cos\varphi & -b\rho\cos\vartheta\sin\varphi & b\cos\varphi\cos\vartheta \\ a\cos\vartheta - b\rho\cos\varphi\cos\vartheta & -b\rho\sin\vartheta\sin\varphi & b\sin\vartheta\cos\varphi \\ 0 & b\rho\cos\varphi & b\sin\varphi \end{pmatrix}$ Sviluppando

secondo la prima colonna, il determinante è

$$\begin{aligned} & (-a \sin \vartheta - b\rho \cos \varphi \sin \vartheta)(-b^2 \rho \sin^2 \varphi \sin \vartheta - b\rho^2 \sin \vartheta \cos^2 \varphi) + \\ & - (a \cos \vartheta + b\rho \cos \varphi \cos \vartheta)(-b^2 \rho \sin^2 \varphi \cos \vartheta - b\rho^2 \cos \vartheta \cos^2 \varphi) = \\ & = (-a \sin \vartheta - b\rho \cos \varphi \sin \vartheta)(-b^2 \rho \sin \vartheta) - (a \cos \vartheta + b\rho \cos \varphi \cos \vartheta)(-b^2 \rho \cos \vartheta) = \\ & = b^2 \rho (a + b \cos \varphi) \end{aligned}$$

Il volume richiesto è $\int_0^1 d\rho \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} d\vartheta d\varphi b^2 \rho (a + b\rho \cos \varphi) = 2\pi^2 a^2 b = \frac{\pi^2}{4} (r_1 + r_2)(r_2^2 - r_1^2)$

• Si calcoli il volume dell'insieme dei punti dello spazio tali che $z \geq a\sqrt{z^2 + y^2}$ e $x^2 + y^2 + z^2 \leq b^2$. La proiezione sul piano (x, y) dell'intersezione della sfera e del cono è data da $(1 + a^2)(x^2 + y^2) = b^2$. Il volume che cerchiamo è quindi $\int \int_{(x^2+y^2) \leq \frac{b^2}{1+a^2}} \int_a^{\sqrt{b^2-x^2-y^2}} dz$. Introducendo coordinate polari nel piano $x = \frac{b}{\sqrt{1+a^2}} \rho \cos t$, $y = \frac{b}{\sqrt{1+a^2}} \rho \sin t$, abbiamo $\int_0^{2\pi} \int_0^1 d\rho \rho \frac{b^2}{1+a^2} \left(\sqrt{b^2 - \frac{b^2 \rho^2}{1+a^2}} - \frac{ab\rho}{\sqrt{1+a^2}} \right) = \frac{2\pi b^2}{1+a^2} \frac{b}{3\sqrt{1+a^2}} \left((1+a^2)^{3/2} - a^3 \right) - \frac{2\pi ab^3}{2(1+a^2)^{3/2}}$ e verificare che indipendentemente dal valore di a , si ottiene una quantità positiva. Inoltre si può verificare che per $a = 0$ si ottiene il valore $\frac{2}{3}\pi b^3$

Volendo si poteva parametrizzare il volume nel seguente modo $x = \frac{b}{\sqrt{1+a^2}} \rho \cos t$, $y = \frac{b}{\sqrt{1+a^2}} \rho \sin t$, $z = u$, con $0 \leq \rho \leq 1$, $0 \leq t \leq 2\pi$, $\sqrt{b^2 - \frac{b^2 \rho^2}{1+a^2}} \leq u \leq \frac{ab\rho}{\sqrt{1+a^2}}$ e scrivendo il volume si arriva allo stesso risultato.

• Si calcoli il volume della porzione di sfera $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$ tale che $z \geq b > 0$ e $b < a$. Si possono utilizzare almeno due maniere. Si parametrizza per strati $x = \sqrt{a^2 - u^2} \rho \cos t$, $x = \sqrt{a^2 - u^2} \rho \sin t$, $z = u$, con $b \leq u \leq a$, $0 \leq \rho \leq 1$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Il volume è $\int_0^{2\pi} dt \int_0^1 d\rho \int_b^a du (a^2 - u^2) \rho = \pi \left(\frac{2}{3} a^3 - a^2 b + \frac{b^3}{3} \right)$ e si può constatare che per $b = 0$ si ha il volume della semisfera mentre per $a = b$ il volume è zero.

Per l'altra maniera si utilizzano coordinate polari sferiche e l'integrale è $\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\vartheta_0} d\vartheta a^3 \sin \vartheta \int_{\frac{b}{a \cos \vartheta}}^1 \rho^2 d\rho$ dove ϑ_0 è quell'angolo per cui $b = a \cos \vartheta_0$. Integrando si ottiene $\frac{2\pi a^3}{3} \left(1 - \cos \vartheta_0 + \frac{b^3}{2a^3} \left(1 - \frac{1}{\cos^2 \vartheta_0} \right) \right)$ e si ottiene lo stesso risultato.

• Si calcoli il volume del cosiddetto *cono a cuneo*. Si consideri sul piano (x, y) una circonferenza di raggio r e si consideri ad una distanza h e parallelamente al piano (x, y) una retta γ . Da ogni punto della circonferenza si conduce un segmento fino a toccare ortogonalmente la retta γ . Si genera il cosiddetto *cono a cuneo*.

Anche qui si possono adottare due possibile vie. La sezione del cono con i piani $x = p$, $-r \leq p \leq r$ genera dei triangoli la cui area è $\frac{1}{2} 2\sqrt{r^2 - p^2} h = h\sqrt{r^2 - p^2}$ e quindi $\int_{-r}^r h\sqrt{r^2 - p^2} dp = \frac{1}{2} \pi r^2 h$

L'altra maniera consiste nel prendere le sezioni $z = z_0$ con $0 \leq z_0 \leq h$.

• Si calcoli il volume dei punti che soddisfano le relazioni $x^2 + y^2 \leq 1$, $0 \leq z \leq 1 - \frac{2}{\sqrt{3}+1}(x+y)$.

Eseguiamo il calcolo in modo più generale. Prendiamo l'insieme $x^2 + y^2 \leq r^2$ e $0 \leq z \leq z_0 - \frac{2z_0}{r(\sqrt{3}+1)}(x+y)$. La circonferenza $x^2 + y^2 = r^2$ ed il piano, sul piano (x, y) si intersecano nei punti $P \equiv \left(\frac{r\sqrt{3}}{2}, \frac{r}{2} \right)$ e $Q \equiv \left(\frac{r}{2}, \frac{r\sqrt{3}}{2} \right)$. Impostando coordinate polari nel piano $x = \rho \cos t$, $y = \rho \sin t$, la retta congiungente i

punti P e Q è data da $\rho(\cos t + \sin t) - \frac{\sqrt{3}+1}{2}r = 0$ per cui il calcolo del volume è la somma dei due integrali

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} dt \int_0^{\frac{r(\sqrt{3}+1)}{2(\cos t + \sin t)}} d\rho \rho(z_0 - \frac{2z_0}{r(\sqrt{3}+1)}(\rho \cos t + \rho \sin t)) + \int_{\frac{\pi}{3}}^{2\pi + \frac{\pi}{6}} dt \int_0^r d\rho \rho(z_0 - \frac{2z_0}{r(\sqrt{3}+1)}(\rho \cos t + \rho \sin t)) = \frac{z_0 r^2}{12} (1 + \frac{11\pi\sqrt{3} + 11\pi + 8\sqrt{3} - 8}{\sqrt{3} + 1})$$

• Volume di una sfera n -dimensionale. Ci sono diversi modi di procedere. Uno è il seguente. Sia $V_r^{(n)} \doteq \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n : \|\underline{x}\| \leq r\}$. Fissiamo un valore h tale che $|h| \leq r$. Ad h fissato abbiamo $x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 = r^2 - h^2$ e quindi la sfera ad $n-1$ dimensioni di raggio $\sqrt{r^2 - h^2}$. È chiaro che $Vol(V_r^{(n)}) = r^n Vol(V_1^{(n)})$. Integrando per strati si ha

$$\begin{aligned} Vol(V_r^{(n)}) &= r^n \int_{-1}^1 Vol(V_{\sqrt{1-h^2}}^{(n-1)}) dh = r^n \int_{-1}^1 (1-h^2)^{\frac{n-1}{2}} Vol(V_1^{(n-1)}) dh = \\ &= r^n Vol(V_1^{(n-1)}) \int_{-1}^1 (1-h^2)^{\frac{n-1}{2}} dh \underset{h=\sin t}{=} r^n Vol(V_1^{(n-1)}) \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^n t dt = \\ &= r^n Vol(V_1^{(n-1)}) \frac{\Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)} \end{aligned}$$

e come noto $\Gamma(n) = \int_0^{+\infty} x^{n-1} e^{-x} dx = (n-1)!$ se n è un intero. Sappiamo che, integrando per parti si ottiene facilmente $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$ qualunque sia p purché gli integrali esistano. Inoltre conosciamo la formula $\Gamma(p)\Gamma(1-p) = \int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x} dx = \frac{\pi}{\sin p\pi}$ da cui $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$. Chiaramente $Vol(V_1^{(1)}) = 2$ essendo pari alla lunghezza dell'intervallo di lunghezza 2.

$$Vol(V_r^{(2)}) = r^2 2 \frac{\Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(\frac{2}{2} + 1)} = 2r^2 \frac{\sqrt{\pi} \frac{1}{2} \Gamma(\frac{1}{2})}{1\Gamma(1)} = \pi r^2$$

$$Vol(V_r^{(3)}) = r^3 \pi \frac{\Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma(2)}{\Gamma(\frac{5}{2})} = \pi r^3 \frac{\sqrt{\pi} 1 \Gamma(1)}{\frac{3}{2} \Gamma(\frac{3}{2})} = \pi r^3 \frac{\sqrt{\pi}}{\frac{3}{2} \frac{1}{2} \Gamma(\frac{1}{2})} = \pi r^3 \frac{\sqrt{\pi}}{\frac{3}{2} \frac{1}{2} \sqrt{\pi}} = \frac{4}{3} \pi r^3$$

Alla fine si ottiene

$$Vol(V_r^{(n)}) = \frac{r^n \pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)}$$

e si nota che ad r fissato, all'aumentare delle dimensioni, il volume decresce a zero molto rapidamente.

• Scrivere come un integrale in una sola variabile l'integrale

$$\int_0^a dx_n \int_0^{x_n} dx_{n-1} \int_0^{x_{n-1}} dx_{n-2} \dots \int_0^{x_2} dx_1 f(x_1).$$

Per trovare la formula conviene scriverlo per qualche valore di n . Sia $n = 2$. $\int_0^a dx_2 \int_0^{x_2} dx_1 f(x_1) =$

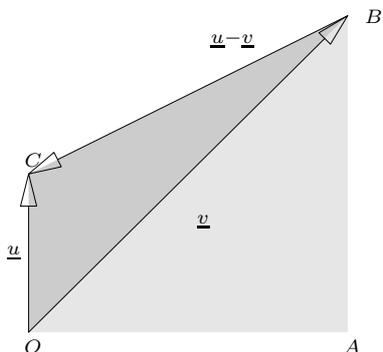
$$\int_0^a dx_1 \int_{x_1}^a dx_2 f(x_1) = \int_0^a f(x_1)(a - x_1)$$

Sia ora $n = 3$. $\int_0^a dx_3 \int_0^{x_3} dx_2 \int_0^{x_2} dx_1 f(x_1) = \int_0^a dx_1 \int_{x_1}^a dx_2 \int_{x_2}^a dx_3 f(x_1) = \frac{1}{2} \int_a^a dx_1 (a - x_1)^2 f(x_1)$. È facile immaginare che la formula sia $\frac{1}{(n-1)!} \int_0^a (a-x)^{n-1} f(x) dx$ e la dimostrazione si effettua per induzione. Infatti supponiamo che la formula sia vera per $1 \leq n \leq r$. Per $n = r + 1$ abbiamo

$$\begin{aligned} & \int_0^a dx_{r+1} \int_0^{x_{r+1}} dx_r \int_0^{x_r} dx_{r-1} \dots \int_0^{x_2} dx_1 f(x_1) = \\ & = \int_0^a dx_{r+1} \left(\int_0^{x_{r+1}} dx_r \int_0^{x_r} dx_{r-1} \dots \int_0^{x_2} dx_1 f(x_1) \right) = \int_0^a \frac{dx_{r+1}}{(r-1)!} \int_0^{x_{r+1}} (a-x_1)^{r-1} f(x_1) = \\ & = \frac{1}{(r-1)!} \int_0^a dx_1 \int_{x_1}^a dx_{r+1} (a-x_1)^{r-1} f(x_1) = \frac{1}{r!} \int_0^a dx_1 f(x_1) (a-x_1)^r \end{aligned}$$

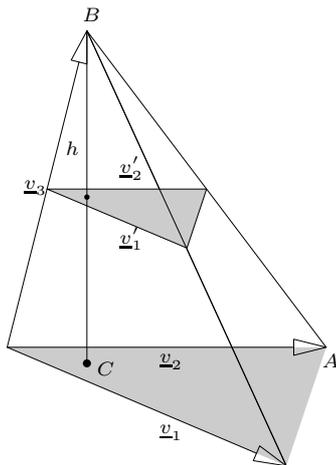
- Calcolare i seguenti integrale tripli $\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{dx dy dz}{(1+x^2+y^2+z^2)^2}$, $\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{dx dy dz}{1-xyz}$ (Avvertimento: sono alquanto difficili)
- Calcolare il volume della regione dello spazio definita da $(x^2 + y^2 + z^2 + 8)^2 \leq 36(x^2 + y^2)$ (Putnam 2006)
- Calcolare il volume della regione dello spazio definita $\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq x + y$, $0 \leq z \leq 1$. [proposto da studente anonimo]
- Sia R la regione $\{(x, y): 0 \leq x \leq 1, 3^x - x - 1 \leq y \leq x\}$. Calcolare il volume del solido generato dalla rotazione di S attorno alla retta $y = x$. [da <http://www.math.purdue.edu/pow/fall2013/pdf/problem3.pdf>]
- Calcolare $\int \int \int_A \frac{dx dy dz}{x^2 + y^2 + z^2}$ dove $A = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \geq z_0 \geq 0\}$
- Siano dati in \mathbb{R}^n gli n -vettori $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$, e siano a_1, \dots, a_n n numeri non negativi tali che $a_1 + \dots + a_n \leq 1$. L'insieme dei punti definiti da $\underline{x} = \sum_{k=1}^n a_k \underline{v}_k$, $\underline{a} \in [0, 1]^n$, e $\sum_{k=1}^n a_k \leq 1$ è detto simpleso n -dimensionale. Calcolare il volume di tale insieme.

Per iniziare mettiamoci in \mathbb{R}^2 . In tal caso dobbiamo calcolare un'area. Non è restrittivo supporre che $\underline{u} = (0, |\underline{u}|) \doteq (u_1, u_2)$. Infatti le rotazioni non cambiano gli angoli fra vettori e quindi le aree ne risultano immutate. L'insieme di cui cerchiamo l'area è quello compreso fra i vettori $\underline{u}, \underline{v} = (v_1, v_2)$, $\underline{u} - \underline{v} \doteq ((u-v)_1, (u-v)_2)$.



L'area è $\frac{(AB + OC)OA}{2} - \frac{OA \cdot AB}{2} = \frac{(v_2 + |u|) \cdot v_1}{2} - \frac{v_1 v_2}{2} = \frac{v_1 \cdot |u|}{2} = \frac{|\underline{u} \wedge \underline{v}|}{2}$

Sia $n = 3$. Abbiamo 3 vettori $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ e supponiamo che \underline{v}_1 e \underline{v}_2 stiano sul piano (x, y) .



Il volume che cerchiamo è

$$\int_0^{|\overline{BC}|} \frac{1}{2} |\underline{v}'_1 \wedge \underline{v}'_2| dh = \int_0^{|\overline{BC}|} \frac{1}{2} |\underline{v}_1 \wedge \underline{v}_2| \frac{h^2}{(|\overline{BC}|)^2} dh = \frac{1}{6} |\underline{v}_1 \wedge \underline{v}_2| |\overline{BC}| = \frac{|(\underline{v}_1 \wedge \underline{v}_2) \cdot \underline{v}_3|}{6}$$

e chiaramente

$$\frac{|(\underline{v}_1 \wedge \underline{v}_2) \cdot \underline{v}_3|}{6} = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} (\underline{v}_1)_1 & (\underline{v}_1)_2 & (\underline{v}_1)_3 \\ (\underline{v}_2)_1 & (\underline{v}_2)_2 & (\underline{v}_2)_3 \\ (\underline{v}_3)_1 & (\underline{v}_3)_2 & (\underline{v}_3)_3 \end{vmatrix}$$

Per $n > 3$ il volume è il determinante della matrice degli n vettori $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ diviso per $n!$.

• Quando si ha a che fare con superfici di rotazione, a volte è utile applicare la formula cosiddetta di Pappo–Guldino. Abbiamo in fatti il

Primo Teorema di Pappo–Guldino Sia dato un insieme D nel piano (y, z) avente interno non vuoto e connesso e sia V l'insieme ottenuto ruotando D intorno ad un'asse non passante per D di un angolo α . Allora il volume di V è pari al prodotto di α per l'area di D per la distanza del baricentro di D dall'asse di rotazione.

Dimostrazione Siano (u, v) le coordinate di D . Supponiamo di ruotare intorno all'asse z . Le coordinate di V sono $x = u \cos t, y = u \sin t, z = v, (u, v) \in D, 0 \leq t \leq \alpha$. Lo iacobiano è v e detta $|D|$ l'area di D , il volume cercato è V è $\int \int_D du dv \int_0^\alpha v = |D| \left(\frac{1}{|D|} \alpha \int \int_D du dv u \right)$ da cui il risultato.

Esercizi Degli *esercizi in rete* risolvere **14.8.1, 16.8.1, 24.8.1, 36.8.1, 41.8.1**. Da [BPS1] studiare gli esempi 1.6–1.11 fra pag.460 e pag. 464. Risolvere gli esercizi 1–18 a pag. 466–467; studiare gli esempi 1.12, 1.13 a pag.468–469. Risolvere gli esercizi 19–28 pag. 469–470. Da [BPS2] studiare gli esempi contenuti nelle pagine 511–526.

8 curve e superfici (calcolo integrale)

Per gli integrali di linea di prima specie si può guardare [BPS1] capitolo 10 paragrafo 3 oppure [BPS2] pag.402.

integrali curvilinei di prima specie

Consideriamo un problema di natura fisica. Sia $\underline{\gamma}(t): [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ ($\underline{x}(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t))$) una curva in \mathbb{R}^3 e immaginiamo che un filo di densità $\delta(x, y, z)$ si adagiato sul sostegno della curva. Si vuole sapere la massa del filo. Bisogna integrare la densità lungo il filo e la formula è $\int_a^b dt \|\underline{\gamma}'(t)\| \delta(x(t), y(t), z(t))$.

Definizione 8.1 Sia data una funzione di $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x, y, z)$, continua, il suo integrale lungo la curva $\underline{\gamma}$ è $\int_a^b dt \|\underline{\gamma}'(t)\| F(\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t))$ ed è detto integrale curvilineo di prima specie

È utile capire da dove nasce una tale formula che a tutta prima può apparire poco chiara. Se dovessimo calcolare la lunghezza di un filo posto lungo il sostegno della curva $\underline{\gamma}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ $\underline{\gamma}(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$

data da $\underline{\gamma}(t) = \begin{cases} t & 0 \leq t \leq x_o \\ 0 & \end{cases}$ avremmo $m = \int_0^{x_o} dt$. Il fattore dt , che è uguale a dx in quanto

nella curva $t = x$, venga immaginato come $dx \sim \Delta x = x' - x = \gamma_1(t') - \gamma_1(t)$. Ora supponiamo che il filo sia disposto lungo il sostegno di una curva in \mathbb{R}^3 $\underline{\varphi}(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \varphi_3(t))$, $0 \leq t \leq t_o$. Se

$\underline{x} = \underline{\varphi}(t)$ abbiamo $|\underline{x}' - \underline{x}| = |\underline{\varphi}(t') - \underline{\varphi}(t)| \sim \sqrt{\sum_{i=1}^3 (\varphi'_i(\tau))^2 (t' - t)^2}$, $t < \tau < t'$, $t' - t \sim dt$ e quindi

$\sqrt{\sum_{i=1}^3 (\varphi'_i(\tau))^2 (t' - t)^2} \sim \sqrt{\sum_{i=1}^3 (\varphi'_i(t))^2 (dt)^2} = \|\underline{\varphi}'(t)\| dt$. Ciò che prima era dt ora diventa $\|\underline{\varphi}'(t)\| dt$.

Esempi

- Si consideri un filo elettricamente carico e disposto lungo tutto l'asse delle ascisse in \mathbb{R}^3 . La densità lineare ^(8.1) di carica è costante lungo il filo e vale δ . Dato un punto di coordinate $\underline{x}_o = (0, y_o, 0)$, sia $\underline{r}(x) = (-x, y_o, 0)$ il vettore che dal punto del filo di coordinate $(x, 0, 0)$ arriva in \underline{x}_o . Il campo elettrico in \underline{x}_o generato dal tratto di filo intorno al punto $(x, 0, 0)$ è $\delta dx \frac{\underline{r}}{\|\underline{r}\|^3}$. Si calcoli quanto vale il campo elettrico generato da tutto il filo in \underline{x}_o .

Il campo elettrico è $\underline{E}(\underline{x}_o) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta \frac{\underline{r}}{\|\underline{r}\|^3} dx$. La componente lungo l'asse z è zero in quanto $r_3 \equiv 0$. La componente lungo l'asse x è zero per ragioni di simmetria: al contributo del segmento di filo intorno al punto $(x, 0, 0)$ vi è anche quello intorno al punto $(-x, 0, 0)$ che è opposto al precedente *data la costanza di δ* . In ogni caso si ha $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta \frac{x}{\|\underline{r}\|^3} dx = \delta \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x dx}{(x^2 + y_o^2)^{3/2}} = 0$ essendo dispari la funzione integranda.

La componente lungo l'asse delle y è $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta \frac{y_o}{\|\underline{r}\|^3} dx = \delta y_o \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + y_o^2)^{3/2}} = \frac{\delta}{y_o} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{\cosh^2 t} = 2 \frac{\delta}{y_o}$ (si è cambiato variabile $x = y_o \sinh t$). Si può notare che le dimensioni del risultato sono di una carica fratto una distanza al quadrato come deve essere per un campo elettrico.

Come si può calcolare il potenziale elettrico nello stesso punto? Facendo l'integrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta \frac{dx}{\|\underline{r}\|}$?

- Nella stessa situazione precedente, si calcoli il campo elettrico in un qualsiasi punto di \mathbb{R}^3 .

Sia $\underline{x}_o = (x_o, y_o, z_o)$ un punto dello spazio e sia $(x, 0, 0)$ un punto del filo. Il campo elettrico è $\underline{E}(\underline{x}_o) = \delta \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{(-x + x_o, y_o, z_o)}{(y_o^2 + z_o^2 + (x - x_o)^2)^{3/2}} = \delta \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{(-x, y_o, z_o)}{(y_o^2 + z_o^2 + x^2)^{3/2}}$. La prima componente è nulla. La seconda è

(8.1) La densità lineare di carica ha le dimensioni di una carica elettrica fratto una distanza

uguale a $\frac{2y_o\delta}{(y_o^2+z_o^2)}$ e la terza a $\frac{2z_o\delta}{(y_o^2+z_o^2)}$

- Si consideri un filo elettricamente carico e disposto lungo l'asse delle ascisse in \mathbb{R}^3 nel tratto $(-A, A)$. La densità lineare di carica è costante uguale a δ . Si vuole sapere il potenziale elettrico in un punto dello spazio $\underline{x}_o = (x_o, y_o, z_o)$. Trovare inoltre quelle superfici dello spazio in cui il potenziale è costante. Analizzare inoltre l'andamento del potenziale quando ci si muove sul piano $x = 0$ e si tende all'origine.

L'integrale è $V(\underline{x}_o) = \delta \int_{-A}^A \frac{dx}{\sqrt{(x_o-x)^2+y_o^2+z_o^2}}$. Con il cambio di variabile $x - x_o = \sqrt{y_o^2 + z_o^2} \sinh z$

l'integrale è uguale a $V(\underline{x}_o) = \delta \ln \frac{x_o+A+\sqrt{(x_o+A)^2+y_o^2+z_o^2}}{x_o-A+\sqrt{(x_o-A)^2+y_o^2+z_o^2}}$. Definendo $r_{\pm} \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{(x_o \pm A)^2 + y_o^2 + z_o^2}$ si può

scrivere $V(\underline{x}_o) = \delta \ln \frac{r_-+r_++2A}{r_-+r_+-2A}$. L'equazione $V(\underline{x}_o) = c$ diventa $r_- + r_+ = 2A \coth(\frac{c}{\delta})$. Se quindi $r_- + r_+$ è costante la funzione $V(\underline{x}_o)$ si mantiene anche essa costante e si definiscono le superfici equipotenziali. Le superfici sono il luogo dei punti tali che la somma delle distanze dai punti $(\pm A, 0, 0)$ è costante (ellissoidi di rotazione i cui fuochi sono gli estremi del filo). Inoltre se $c \rightarrow +\infty$ vuol dire che ci si sta avvicinando al filo e infatti $r_- + r_+ \rightarrow 2A$ ossia il punto tende al filo. Se al contrario $c \rightarrow 0$ vuol dire che ci si sta allontanando dal filo e infatti si ha $r_- + r_+ \rightarrow +\infty$.

Indicando con $R = \sqrt{y_o^2 + z_o^2}$ si ottiene $V(\underline{x}_o) \sim 2\delta \ln \frac{A}{R}$ quando $R \rightarrow 0$

- Si consideri un filo elettricamente carico e disposto lungo l'asse delle ascisse in \mathbb{R}^3 nel tratto $(-A, A)$. La densità lineare di carica è $\delta(x, y, z) = \delta_o|x|$ (δ_o costante). Si vuole sapere il potenziale elettrico in un punto dello spazio $\underline{x}_o = (x_o, y_o, z_o)$. Cosa succede quando $z_o = 0, x_o = 0$ e $y_o \neq 0$?

La risposta è $V(\underline{x}_o) = \delta_o(r_+ - r_-) + \delta_o x_o \ln \frac{r_-+r_++2A}{r_-+r_+-2A}$. Nel caso $z_o = 0, x_o = 0$ e $y_o \neq 0$ il potenziale è nullo. Siccome il campo elettrico per definizione è $\underline{E}(\underline{x}_o) = \underline{\partial}V(\underline{x}_o)$ significa che muovendo una carica elettrica lungo l'asse delle y senza incontrare l'origine non si fa alcun lavoro.

- Si consideri un filo con densità di carica costante disposto lungo il sostegno della circonferenza $x^2 + y^2 = r^2$. Si calcoli il campo elettrico in un punto dell'asse delle ordinate.

Degli *esercizi in rete* risolvere: **2.8.1, 3.8.1, 11.8.1, 32.8.1**. Dal libro [BPS1] risolvere gli esercizi di pag. 369: 2-12 e risolvere quelli degli esempi 3.2 e 3.3 di pag. 368. Da [BPS2] studiare gli esempi fra le pagine 399 e 406.

Integrali curvilinei di seconda specie, forme differenziali

Da [BPS1] si possono guardare le pagine 438-454. Da [BPS2] si possono guardare le pagine 493-509.

Sia data una curva regolare a tratti $\underline{\gamma}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ (pensiamo a $n = 3$).

Definizione 8.2 Una applicazione $\underline{F}(\underline{x})$ che a ogni punto \underline{x} associa un vettore con punto di applicazione \underline{x} è detto *campo vettoriale*. Tale campo si indica con $\underline{F}(\underline{x}) = \underline{i}F_1(\underline{x}) + \underline{j}F_2(\underline{x}) + \underline{k}F_3(\underline{x})$. Le $F_i(\underline{x})$ sono delle funzioni reali e sono le componenti del campo. Le ipotesi di regolarità sulle funzioni F_i sono tali da far sì che esista l'integrale $\int_a^b \underline{F}(\underline{\gamma}(t)) \cdot \underline{\gamma}'(t) dt$ (ad esempio se le funzioni sono continue). L'integrale è un *integrale curvilineo di seconda specie* ^(8.2).

Ora assumeremo il punto di vista delle forme differenziali anche se, come evidenziato a pag.452 di [BPS1], o 507 di [BPS2] si potrebbe esporre la teoria mantenendo il linguaggio dei campi vettoriali

(8.2) L'idea degli integrali curvilinei deriva dalla fisica e in particolare dal concetto di lavoro di una forza lungo un cammino

Definizione 8.3 Con la notazione $(\mathbb{R}^n)^*$ si indica il duale dello spazio \mathbb{R}^n . $(\mathbb{R}^n)^*$ è lo spazio degli operatori lineari che ad ogni vettore di \mathbb{R}^n associano un numero reale^(8.3).

Teorema 8.05 L'insieme $(\mathbb{R}^n)^*$ è isomorfo all'insieme \mathbb{R}^n

Corollario 8.06 Ad ogni elemento $f \in (\mathbb{R}^n)^*$ corrisponde uno ed un solo elemento $\underline{a} \in \mathbb{R}^n$ tale che $f(\underline{v}) = (\underline{v}, \underline{a})$.

Le dimostrazioni sono in Appendice A-8

Il teorema 8.05 è assai importante in quanto ci dice che ad ogni elemento di $(\mathbb{R}^n)^*$ corrisponde uno ed un solo vettore $\underline{a} \in \mathbb{R}^n$ e viceversa ad ogni vettore $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$ corrisponde una ed una sola forma lineare.

Definizione 8.4 Sia $E = \overset{\circ}{E} \subset \mathbb{R}^n$; una forma differenziale ω definita in E è una applicazione di E in $(\mathbb{R}^n)^*$ ossia $\omega: E \rightarrow (\mathbb{R}^n)^*$ e $\omega(\underline{x}) \in (\mathbb{R}^n)^*$ per ogni $\underline{x} \in E$. Se in $(\mathbb{R}^n)^*$, che è uno spazio lineare di dimensione n , si introduce la base canonica che chiamiamo dx_1, \dots, dx_n e si indicano con $a_1(\underline{x}), a_2(\underline{x}), \dots, a_n(\underline{x})$ le componenti di ω , di può scrivere $\omega(\underline{x}) = \sum_{i=1}^n a_i(\underline{x})dx_i$. Se le funzioni a_i sono funzioni continue di \underline{x} si dice che la forma ω è continua. Se $a_i \in C^1(E)$ si dice che la forma è in $C^1(E)$.

Definizione 8.5 Sia $\omega = \sum_{i=1}^n a_i(\underline{x})dx_i$ una forma differenziale continua in E e sia $\underline{\gamma}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ una curva regolare a tratti con sostegno contenuto in E . Si definisce l'integrale di ω lungo la curva $\underline{\gamma}$

l'integrale $\int_{\underline{\gamma}} \omega \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^b dt \sum_{i=1}^n a_i(\underline{\gamma}(t))\gamma'_i(t)$

Se $\underline{\gamma}$ è una curva in \mathbb{R}^n allora il vettore $(\gamma'_1(t), \dots, \gamma'_n(t))$ è un vettore a n componenti e $\omega(\underline{\gamma}) = \sum_{i=1}^n a_i(\underline{\gamma}(t))(dx_i, \underline{\gamma}'(t)) = \sum_{i=1}^n a_i(\underline{\gamma}(t))\gamma'_i(t)dt$

Teorema 8.1 Sia $\underline{\varphi}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ una curva e $\underline{\psi}: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$ una curva avente lo stesso sostegno. Sia

$P: [a, b] \rightarrow [c, d]$ un diffeomorfismo tale che $\underline{\varphi}(t) = \underline{\psi} \circ P(t)$. Allora si ha $\int_{\underline{\varphi}} \omega = \pm \int_{\underline{\psi}} \omega$ a seconda che

P conservi o inverta l'orientamento

Dimostrazione $\int_{\underline{\varphi}} \omega = \int_a^b \sum_{i=1}^n a_i(\underline{\varphi}(t)) \cdot \varphi'_i(t)dt = \int_a^b \sum_{i=1}^n a_i(\underline{\varphi} \circ P) \cdot (\psi'_i \circ P) \cdot P' dt$. Ora cambiamo

variabile $\tau = P(t)$ ^(8.4). L'integrale diventa $\int_c^d \sum_{i=1}^n a_i(\underline{\psi}(\tau))\psi'_i(\tau)d\tau$ se P conserva l'orientamento e

$\int_d^c \sum_{i=1}^n a_i(\underline{\psi}(\tau))\psi'_i(\tau)d\tau$ se P inverte l'orientamento. In ogni caso si ottiene $\pm \int_{\underline{\psi}} \omega$. ■

Definizione 8.6 Sia $E = \overset{\circ}{E} \subset \mathbb{R}^n$ e ω una forma differenziale continua in E . ω è detta esatta se esiste una funzione $f \in C^1(E)$ tale che $\omega = df$ ossia $a_i(\underline{x}) = \frac{\partial f}{\partial x_i}$

(8.3) Sono dette anche forme lineari su \mathbb{R}^n

(8.4) ricordiamo che la derivata del diffeomorfismo è positiva oppure negativa e quindi il cambio di variabile è lecito

Sia ora $E = \overset{\circ}{E}$ un insieme tale che dati qualsiasi due punti $\underline{x} \in E$ e $\underline{y} \in E$ esiste una curva regolare a tratti che congiunge \underline{x} a \underline{y} . Per definizione sia $\Phi(\underline{x}, \underline{y})$ l'insieme delle curve regolari a tratti che congiungono \underline{x} a \underline{y} e che hanno \underline{x} come primo estremo e \underline{y} come secondo. Una condizione sufficiente perché ciò accada è che E sia connesso. Non daremo qui la definizione di insieme connesso perché nel teorema che segue, serve solo la proprietà che $\Phi(\underline{x}, \underline{y})$ esista.

Teorema 8.2 Sia $E = \overset{\circ}{E}$ connesso; ω è una forma differenziale continua in E . La forma è esatta se e solo se comunque si prendano due punti \underline{x} e \underline{y} in E e due curve $\underline{\varphi}, \underline{\psi}$ in $\Phi(\underline{x}, \underline{y})$, si ha $\int_{\underline{\varphi}} \omega = \int_{\underline{\psi}} \omega$

Dimostrazione solo se; supponiamo che la forma sia esatta e quindi $\omega(\underline{x}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$. $\int_{\underline{\varphi}} \omega = \int_a^b \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{\varphi}(t)) \varphi'_i(t) dt = \int_a^b \frac{d}{dt} f(\underline{\varphi}(t)) = f(\underline{\varphi}(b)) - f(\underline{\varphi}(a)) = f(\underline{y}) - f(\underline{x})$. Poiché il risultato è indipendente dalla curva $\underline{\varphi}$ purché appartenga a $\Phi(\underline{x}, \underline{y})$ ne segue il risultato.

parte solo se; supponiamo ora che $\int_{\underline{\varphi}} \omega = \int_{\underline{\psi}} \omega$ per ogni $\underline{\varphi} \in \Phi(\underline{x}, \underline{y})$ e $\underline{\psi} \in \Phi(\underline{x}, \underline{y})$ dove $\omega = \sum_{i=1}^n a_i(\underline{x}) dx_i$ è una data forma differenziale. Sia $\underline{x}_o \in E$, $\underline{x} \in E$ e sia $\underline{\varphi} \in \Phi(\underline{x}_o, \underline{x})$. Definiamo una *funzione della sola \underline{x}* nel seguente modo $\int_{\underline{\varphi}} \omega \stackrel{\text{def}}{=} f(\underline{x})$. La funzione f dipende solo da \underline{x} in quanto se prendo un altro elemento in $\Phi(\underline{x}_o, \underline{x})$ l'integrale è lo stesso per ipotesi. Vogliamo far vedere che $f_{x_j} = a_j(\underline{x})$. Sia $\underline{\varphi} \in \Phi(\underline{x}_o, \underline{x})$,

$\underline{\varphi}: [a, b] \rightarrow E$. Definiamo la curva $\underline{\psi}(t) = \begin{cases} \underline{\varphi}(t) & a \leq t \leq b \\ \underline{x} + (t-b)h\underline{v} & b < t \leq b+1 \end{cases}$; $\underline{\psi}(t) \in \Phi(\underline{x}_o, \underline{x} + h\underline{v})$ per $|h| < \delta$, e $\|\underline{v}\| = 1$ in quanto il punto $\underline{x} + h\underline{v}$ appartiene ancora a E che è aperto. $f(\underline{x} + h\underline{v}) = \int_{\underline{\psi}} \omega =$

$$\int_{\underline{\varphi}} \omega + \int_b^{b+1} \sum_{i=1}^n a_j(\underline{\psi}(t)) \psi'_j(t) = \int_{\underline{\varphi}} \omega + \int_b^{b+1} \sum_{i=1}^n a_j(\underline{x} + (t-b)h\underline{v}) h v_j$$

Cambiamo ora variabile $h(t-b) \stackrel{\text{def}}{=} \tau$ e l'integrale diventa $f(\underline{x} + h\underline{v}) = f(\underline{x}) + \int_0^h \sum_{i=1}^n a_j(\underline{x} + \tau\underline{v}) v_j d\tau$

per cui $\frac{f(\underline{x} + \tau\underline{v}) - f(\underline{x})}{h} = \frac{1}{h} \int_0^h \sum_{i=1}^n a_j(\underline{x} + \tau\underline{v}) v_j d\tau$ e per $h \rightarrow 0$, otteniamo $a_j(\underline{x}) v_j$ essendo $a_j(\underline{x})$

continua. Se $\underline{v} = \underline{e}^{(j)}$ (il versore nella direzione j -esima) otteniamo $\frac{f(\underline{x} + h\underline{e}^{(j)}) - f(\underline{x})}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} a_j(\underline{x})$

Corollario 8.2 Sia $E = \overset{\circ}{E}$ connesso; ω è una forma differenziale continua in E . Condizione necessaria e sufficiente perché sia esatta è che $\int_{\underline{\varphi}} \omega = 0$ per ogni curva regolare a tratti chiusa il cui sostegno appartiene a E .

Dimostrazione Sufficienza. Le ipotesi sono $\omega = df$ e quindi esatta e $\underline{\varphi} \in \Phi(\underline{x}, \underline{x})$. $\int_{\underline{\varphi}} \omega = f(\underline{x}) - f(\underline{x}) = 0$.

Necessità . Le ipotesi sono che $\int_{\underline{\varphi}} \omega = 0$ per ogni curva chiusa con sostegno in E .

Sufficienza. Dobbiamo far vedere che se $\int_{\underline{\varphi}} \omega = 0$ per ogni curva chiusa regolare a tratti allora ω è esatta.

Per il Teorema 8.2 ci basta far vedere come dall'ipotesi segue che l'integrale $\int_{\underline{\psi}} \omega$ non dipende dalla curva $\underline{\psi}$ purché gli estremi della curva siano gli stessi. Siano dunque date le due curve $\underline{\varphi}_1: [a, b] \rightarrow E$ $\underline{\varphi}_1(a) = \underline{x}$, $\underline{\varphi}_1(b) = \underline{y}$, e $\underline{\varphi}_2: [d, c] \rightarrow E$, $\underline{\varphi}_2(d) = \underline{x}$, $\underline{\varphi}_2(c) = \underline{y}$. Sia data inoltre la curva $\tilde{\varphi}_2(t) = \underline{\varphi}_2((t-b)(d-c) + c)$ dove $\tilde{\varphi}_2(b) = \underline{\varphi}_2(c) = \underline{y}$ e $\tilde{\varphi}_2(b+1) = \underline{\varphi}_2(d) = \underline{x}$. Si consideri ora la curva $\underline{\varphi}(t) = \begin{cases} \underline{\varphi}_1(t) & a \leq t \leq b \\ \tilde{\varphi}_2(t) & b \leq t \leq b+1 \end{cases}$. La curva $\underline{\varphi}$ è chiusa e per ipotesi $\int_{\underline{\varphi}} \omega = 0$. Del resto $\int_{\underline{\varphi}} \omega = \int_{\underline{\varphi}_1} \omega + \int_{\tilde{\varphi}_2} \omega = 0$ per cui $\int_{\underline{\varphi}_1} \omega = - \int_{\tilde{\varphi}_2} \omega = \int_{\underline{\varphi}_2} \omega$ che è esattamente quanto andava dimostrato. L'uguaglianza $-\int_{\tilde{\varphi}_2} \omega = \int_{\underline{\varphi}_2} \omega$ segue dal Teorema 8.2 con un opportuno diffeomorfismo fra $[d, c]$ e $[b, b+1]$. ■

Supponiamo di avere una forma differenziale esatta $\omega = \sum_{i=1}^n a_i(\underline{x})dx_i$ in cui le funzioni a_i sono funzioni $C^1(E)$. Dunque esiste una funzione $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ $f \in C^2(E)$ tale che $f_{x_i} = a_i$. Derivando ulteriormente e usando il Lemma di Schwarz otteniamo $f_{x_i x_j} = f_{x_j x_i}$ e quindi $\frac{\partial a_i}{\partial x_j} = \frac{\partial a_j}{\partial x_i}$.

Definizione 8.7 Una forma differenziale $\omega \in C^1(E)$ per cui $\frac{\partial a_i}{\partial x_j} = \frac{\partial a_j}{\partial x_i}$ si dice chiusa

Quindi se una forma differenziale è esatta, è chiusa.

Esempi

- sia data la forma differenziale $\omega = \frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}dx + \frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}dy + \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}dz$. Si dimostri che è esatta in $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. Basta osservare che $\omega = df$ dove $f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ e quindi è esatta.

A parte qualche costante ed un segno, il fatto che la forma sia esatta è un riflesso del fatto che il campo gravitazionale oppure elettrico è conservativo. Il lavoro fatto lungo un cammino non dipende dal cammino ma solo dagli estremi del cammino stesso. Il campo gravitazionale è infatti dato da $\underline{V} = \frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\underline{i} + \frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\underline{j} + \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\underline{k}$ e l'integrale lungo la curva $\underline{\gamma}(t)$ $a \leq t \leq b$ è $\int_a^b dt \sum_{i=1}^3 \gamma_i(t)\gamma_i'(t) \frac{1}{(\gamma_1^2+\gamma_2^2+\gamma_3^2)^{3/2}} = \int_a^b dt \frac{d}{dt} \frac{1}{(\gamma_1^2+\gamma_2^2+\gamma_3^2)^{1/2}} = \frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b}$ dove $r(t) = \sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2}$ Chiaramente la forma differenziale è chiusa.

- Sia data la forma differenziale $\omega = \frac{x}{x^2+y^2}dx + \frac{y}{x^2+y^2}dy = a_1(\underline{x})dx + a_2(\underline{x})dy$ definita in $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Si verifica che $a_1(\underline{x}) = \frac{\partial}{\partial x} \ln(\sqrt{x^2 + y^2})$, $a_2(\underline{x}) = \frac{\partial}{\partial y} \ln(\sqrt{x^2 + y^2})$ e quindi è esatta. Essendo esatta è anche chiusa

- Sia data la forma differenziale $\omega = \frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy = a_1(\underline{x})dx + a_2(\underline{x})dy$ definita in $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Si verifica che $a_1(\underline{x}) = \frac{\partial}{\partial x} \arctan \frac{y}{x}$, $a_2(\underline{x}) = \frac{\partial}{\partial y} \arctan \frac{y}{x}$ ma non si è autorizzati a dire che è esatta in quanto il dominio di $\arctan \frac{y}{x}$ è $\mathbb{R}^2 \setminus \{x \neq 0\}$ e non coincide con il dominio della forma. Nonostante ciò la forma è chiusa in quanto $\frac{\partial a_1}{\partial y} = \frac{\partial a_2}{\partial x} = \frac{y^2-x^2}{x^2+y^2}$. Per dimostrare che la forma non è esatta basta trovare

una curva chiusa $\underline{\varphi}$ lungo la quale $\int_{\underline{\varphi}} \omega \neq 0$. Infatti se si prende la curva $\underline{\varphi}(t) = \begin{cases} \cos t & 0 \leq t \leq 2\pi \\ \sin t & \end{cases}$ si

ha $\int_{\underline{\varphi}} \omega = 2\pi$.

Definizione 8.8 Un insieme $E = \overset{\circ}{E}$ si dice stellato rispetto ad un suo punto \underline{x} se per ogni punto

$\underline{y} \in E$, il segmento di estremi \underline{x} e \underline{y} appartiene tutto a E

Ad esempio una sfera aperta è un insieme stellato. Vale il seguente teorema

Teorema 8.3 Sia $\omega = \sum_{i=1}^n a_i(\underline{x})dx_i$ una forma differenziale $C^1(E)$, $E = \overset{\circ}{E}$, E -stellato rispetto a \underline{y} .

Allora se ω è chiusa è esatta.

Dimostrazione Sia data la curva $\underline{\varphi}(t) = \underline{y} + t(\underline{x} - \underline{y})$ $0 \leq t \leq 1$. $\underline{\varphi}(t) \subset E$ essendo E stellato. Sia $\int_{\underline{\varphi}} \omega \stackrel{\text{def}}{=} f(\underline{x}) = \int_0^1 \sum_{i=1}^n a_i(\underline{\varphi})(x_i - y_i) dt$. $\frac{\partial f}{\partial x_k} = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x_k} \sum_{i=1}^n a_i(\underline{y} + t(\underline{x} - \underline{y}))(x_i - y_i) dt = \int_0^1 dt \sum_{i=1}^n \frac{\partial a_i}{\partial x_k} \Big|_{\underline{x}=\underline{y}+t(\underline{x}-\underline{y})} t(x_i - y_i) + \int_0^1 a_k(\underline{y} + t(\underline{x} - \underline{y})) dt$. Dalla chiusura della forma si può riscrivere $\int_0^1 dt \sum_{i=1}^n \frac{\partial a_i}{\partial x_i} \Big|_{\underline{x}=\underline{y}+t(\underline{x}-\underline{y})} t(x_i - y_i) + \int_0^1 a_k(\underline{y} + t(\underline{x} - \underline{y})) dt$. Detta $F(t) = a_k(\underline{\varphi})$, la somma dei due integrali può essere riscritta come $\int_0^1 tF'(t)dt + \int_0^1 a_k(\underline{\varphi})dt$ e integrando per parti si ottiene $tF(t) \Big|_0^1 - \int_0^1 F(t)dt + \int_0^1 a_k(\underline{\varphi})dt = F(1) = a_k(\underline{x})$. ■

- L'ambito di applicazione delle forme differenziali si estende alla termodinamica. Infatti se uno prende come variabili termodinamiche ad esempio (T, V) (temperatura e volume) si assume che la variazione di energia interna (detta comunemente U) dipenda solo dai valori iniziali e finali di (T, V) . Quindi si può scrivere $dU = U_T dT + U_V dV$. Se però scriviamo la forma differenziale $\omega = dU + P(T, V)dV$ dove $P(T, V)$ è la pressione, otteniamo una nuova forma differenziale *non esatta* poiché $\int_{\underline{\gamma}} \omega$ è la variazione di calore nel passaggio da $\underline{\gamma}(a)$ a $\underline{\gamma}(b)$ muovendosi lungo la curva $\underline{\gamma}$ ($\underline{\gamma}(t)$ ha valori nello spazio (T, V)). È un fatto sperimentale che la variazione di calore dipende non solo dai valori iniziali (T_a, V_a) e finali (T_b, V_b) della temperatura e del volume ma anche dalla successione dei valori intermedi. Alla forma ω si dà il nome dQ per cui $dQ = dU + PdV$ che è il primo principio della termodinamica. Va evidenziato però che la scrittura dQ costituisce un abuso di notazione in quanto *non esiste* una *funzione di stato* Q (ossia una funzione chiamata *calore* che dipende solo dal punto (T, V) nel piano). È altresì un fatto noto che la forma differenziale $dS \stackrel{\text{def}}{=} \frac{dQ}{T}$ è esatta (*secondo principio della termodinamica*, S è l'entropia). Si ottiene $TdS = U_T dT + dV(U_V + P)$ e quindi $\frac{\partial S}{\partial T} = \frac{1}{T}U_T$ e $\frac{\partial S}{\partial V} = \frac{1}{T}(P + U_V)$ che sono delle nuove relazioni termodinamiche. Inoltre essendo dS esatta, è chiusa e quindi $\frac{\partial}{\partial V}(\frac{1}{T}U_T) = \frac{\partial}{\partial T}(\frac{1}{T}(P + U_V))$. Si possono ottenere quindi anche altre relazioni termodinamiche.

Sia data ora la forma differenziale $\omega(\underline{x}) = \sum_{i=1}^3 V_i(\underline{x})dx_i$, $\underline{x} \in E = \overset{\circ}{E} \subseteq \mathbb{R}^3$ associata al campo vettoriale

$V(\underline{x}) = V_1(\underline{x})\underline{i} + V_2(\underline{x})\underline{j} + V_3(\underline{x})\underline{k}$. ω è detta *chiusa* se il nuovo vettore $(\frac{\partial V_2}{\partial x_3} - \frac{\partial V_3}{\partial x_2})\underline{i} + (\frac{\partial V_3}{\partial x_1} - \frac{\partial V_1}{\partial x_3})\underline{j} + (\frac{\partial V_1}{\partial x_2} - \frac{\partial V_2}{\partial x_1})\underline{k}$, detto *rotore di V* e che si indica con $\underline{rotV}^{(8.5)}$, è il vettore nullo. Quindi in \mathbb{R}^3 una

(8.5) si ricava eseguendo il prodotto vettoriale del "vettore" $\underline{\partial}$ e del vettore \underline{V} per cui è dato da
$$\begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix}$$

forma $\omega(\underline{x}) = \sum_{i=1}^3 V_i(\underline{x}) dx_i$ è chiusa se $\underline{rotV} = \underline{0}$

Supponiamo ora di avere una forma differenziale $\omega = \sum_{i=1}^3 a_i(\underline{x}) dx_i$ chiusa in un insieme stellato. Per il Teorema 8.3 la forma è esatta e quindi possiamo trovare quella funzione f tale che $f_{x_k} = a_k(\underline{x})$. Ne deriva che $\int_{\underline{\varphi}} \omega = f(\underline{\varphi}(b)) - f(\underline{\varphi}(a))$, $\underline{\varphi}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ e quindi non è necessario integrare la funzione $\sum_{i=1}^3 a_i(\underline{\varphi}) \cdot \underline{\varphi}'_i$ (operazione questa che potrebbe anche rivelarsi difficoltosa qualora non esista la primitiva).

Esempio

Sia data la forma differenziale $\cos(x+y+z)dx + \cos(x+y+z)dy + \cos(x+y+z)dz$ $\underline{x} \in \mathbb{R}^3$. Si vuole sapere $\int_{\underline{\varphi}} \omega$ dove $\underline{\varphi}(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \varphi_3(t)) = (t^2(\pi-2), t, t)$, $0 \leq t \leq 1$. $\int_{\underline{\varphi}} \omega = \int_0^1 \cos(2t+t^2(\pi-2))(2t\pi-4t+2)dt$. ed è un integrale di non immediata soluzione (almeno a prima vista). Essendo però la forma esatta, l'integrale è $\sin(\pi) - \sin(0) = 0$

Si può verificare che *il rotore di un gradiente è sempre nullo*. Una modo rapido di verificare il calcolo consiste nell'introdurre il simbolo Σ^{ijk} dove i, j, k valgono $1, 2, 3$ e Σ^{ijk} vale $+1$ se la permutazione di ijk è pari e -1 se la permutazione è dispari. In tal modo $\underline{rotV} = \Sigma^{ijk} \partial_j V_k$ e si intende che quando gli indici sono ripetuti si somma da 1 a 3 . Infatti otteniamo $(\underline{rotV})_1 = \Sigma^{1jk} \partial_j V_k = \Sigma^{123} \partial_2 V_3 + \Sigma^{132} \partial_3 V_2 = \partial_2 V_3 - \partial_3 V_2$. $(\underline{rotV})_2 = \Sigma^{2jk} \partial_j V_k = \Sigma^{213} \partial_1 V_3 + \Sigma^{231} \partial_3 V_1 = -\partial_1 V_3 + \partial_3 V_1$. $(\underline{rotV})_3 = \Sigma^{3jk} \partial_j V_k = \Sigma^{321} \partial_2 V_1 + \Sigma^{312} \partial_1 V_2 = -\partial_2 V_1 + \partial_1 V_2$. Se ora abbiamo $\underline{V} = \underline{\partial f}$ (il campo vettoriale è dato dal gradiente), il suo rotore è $\underline{rot \partial f} = \Sigma^{ijk} \partial_j \partial_k f$ e lo scambio fra j e k , da un lato lascia le doppie derivate inalterate (prendiamo $f \in C^2(E)$), dall'altro fa cambiare segno nel passaggio da Σ^{ijk} a Σ^{ikj}

Poiché tanto il campo elettrico quanto il campo gravitazionale provengono dal gradiente di opportuni potenziali (hanno il rotore nullo – sono conservativi), il loro integrale di linea dipende solo dagli estremi.

Da [BPS1] si possono studiare gli esempi fra le pagine 438 e 454. Da [BPS2] si possono studiare gli esempi fra le pagine 493 e 506.

Integrali di superficie

Il materiale si trova alle pagine 482–485 di [BPS1] oppure 540–543 di [BPS2].

Se si esegue il prodotto vettoriale $\underline{\varphi}_u \wedge \underline{\varphi}_v$ dei vettori tangenti (vedi la Osservazione dopo la definizione 5.5) a una superficie, si ottiene un vettore il cui modulo è l'area definita dal parallelogramma di lati $\underline{\varphi}_u$ e $\underline{\varphi}_v$ e tale area è $\sqrt{I_1^2 + I_2^2 + I_3^2}$. È naturale dare la seguente definizione

Definizione 8.10 Si definisce *area della superficie* l'integrale doppio $\int \int_D dudv \sqrt{I_1^2 + I_2^2 + I_3^2}$

Osservazione i) Se si guarda la definizione 5.3 si vede una analogia. Lì si integra la lunghezza del vettore tangente alla curva. Qui si integra l'area del parallelogramma “tangente” alla superficie.

Se la superficie è il grafico di una funzione di due variabili ossia $S = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3: x_1 = u, x_2 = v, x_3 = f(u, v), (u, v) \in D \subset \mathbb{R}^2\}$ la formula dell'area della superficie è data da $\int \int_D dudv \sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}$

Se si deve integrare una funzione $F(x_1, x_2, x_3)$ definita sul sostegno di una determinata superficie tale che $x_i = X_i(u, v)$ $i = 1, 2, 3$, si deve eseguire l'integrale doppio $\int \int_D dudv \sqrt{I_1^2 + I_2^2 + I_3^2} F(X_1, X_2, X_3)$

Indicando con $d\sigma = dudv \sqrt{I_1^2 + I_2^2 + I_3^2} \stackrel{\text{def}}{=} dudv \|\underline{\varphi}_u \wedge \underline{\varphi}_v\|$, l'integrale precedente si scrive anche come

$$\int \int_D d\sigma F(X_1, X_2, X_3)$$

Dobbiamo dimostrare che cambiando parametrizzazione l'integrale di superficie non cambia valore. Per questo dimostriamo la Proposizione

Proposizione 8.1 *Siano date due parametrizzazioni della stessa superficie bidimensionale in \mathbb{R}^3 , detta S . Abbiamo quindi le due parametrizzazioni $\underline{x} = \underline{\varphi}(u, v)$, $(u, v) \in D \subset \mathbb{R}^2$ e $\underline{x} = \psi(a, b)$, $(a, b) \in E \subset \mathbb{R}^2$. Supponiamo inoltre che esista una corrispondenza biunivoca e C^1 $u = f(a, b)$, $v = g(a, b)$, $(f, g): E \rightarrow D$. Allora sono uguali gli integrali*

$$\begin{aligned} & \int \int_D (\|\underline{\varphi}_u \wedge \underline{\varphi}_v\|)(u, v) \cdot F(\varphi_1(u, v), \varphi_2(u, v), \varphi_3(u, v)) dudv = \\ & = \int \int_E (\|\underline{\psi}_u \wedge \underline{\psi}_v\|)(a, b) \cdot F(\psi_1(a, b), \psi_2(a, b), \psi_3(a, b)) dadb \end{aligned}$$

Dimostrazione Nell'integrale $\int \int_D \|\underline{\varphi}_u \wedge \underline{\varphi}_v\| F(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) dudv$ eseguiamo il cambio di variabile $u = f(a, b)$, $v = g(a, b)$. Otteniamo

$$\begin{aligned} & \int \int_D \|\underline{\varphi}_u \wedge \underline{\varphi}_v\| F(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) dudv = \\ & = \int \int_E (\|\underline{\varphi}_u \wedge \underline{\varphi}_v\|)(f(a, b), g(a, b)) \cdot \\ & \cdot F(\varphi_1(f(a, b), g(a, b)), \varphi_2(f(a, b), g(a, b)), \varphi_3(f(a, b), g(a, b))) |f_a g_b - f_b g_a| dadb \end{aligned}$$

D'altra parte $\underline{\varphi}(u, v) = \underline{\varphi}(f(a, b), g(a, b)) \doteq \underline{\psi}(a, b)$ e

$$\begin{aligned} (\psi_1)_a &= (\varphi_1)_u|_{(u,v)=(f(a,b),g(a,b))} f_a + (\varphi_1)_v|_{(u,v)=(f(a,b),g(a,b))} g_a \\ (\psi_2)_a &= (\varphi_2)_u|_{(u,v)=(f(a,b),g(a,b))} f_a + (\varphi_2)_v|_{(u,v)=(f(a,b),g(a,b))} g_a \\ (\psi_1)_b &= (\varphi_1)_u|_{(u,v)=(f(a,b),g(a,b))} f_b + (\varphi_1)_v|_{(u,v)=(f(a,b),g(a,b))} g_b \\ (\psi_2)_b &= (\varphi_2)_u|_{(u,v)=(f(a,b),g(a,b))} f_b + (\varphi_2)_v|_{(u,v)=(f(a,b),g(a,b))} g_b \end{aligned}$$

D'ora in poi omettiamo $|_{(u,v)=(f(a,b),g(a,b))}$.

$$\begin{aligned} & (\psi_1)_a (\psi_2)_b - (\psi_1)_b (\psi_2)_a = \\ & = f_a f_b ((\varphi_1)_u (\varphi_2)_v - (\varphi_1)_v (\varphi_2)_u) + g_a g_b ((\varphi_1)_u (\varphi_2)_v - (\varphi_1)_v (\varphi_2)_u) + \\ & + f_a g_b ((\varphi_1)_u (\varphi_2)_v - (\varphi_2)_u (\varphi_1)_v) + f_b g_a ((\varphi_1)_v (\varphi_2)_u - (\varphi_1)_u (\varphi_2)_v) = \\ & = (f_a g_b - f_b g_a) (\varphi_1)_u (\varphi_2)_v - (f_a g_b - f_b g_a) (\varphi_1)_v (\varphi_2)_u = \\ & = (f_a g_b - f_b g_a) ((\varphi_1)_u (\varphi_2)_v - (\varphi_1)_v (\varphi_2)_u) \end{aligned}$$

per cui

$$\begin{aligned} & \int \int_E (\|\underline{\varphi}_u \wedge \underline{\varphi}_v\|)(f(a, b), g(a, b)) \cdot \\ & \cdot F(\varphi_1(f(a, b), g(a, b)), \varphi_2(f(a, b), g(a, b)), \varphi_3(f(a, b), g(a, b))) |f_a g_b - f_b g_a| dadb = \\ & = \int \int_E \|\underline{\psi}_u \wedge \underline{\psi}_v\| F(\psi_1, \psi_2, \psi_3) dadb \end{aligned}$$



Degli *esercizi in rete* risolvere i numeri **5.8.1**, **9.8.1**, **10.8.1**, **1.8.1**, **15.8.1**, **17.8.1**, **18.8.1**, **19.8.1**, **25.8.1**, **37.8.1**. Dal libro [BPS1] studiare gli esempi ed esercizi del capitolo 13 paragrafo 2. Da [BPS2] studiare gli esempi di pag. 540–543.

Esempi

- Si calcoli l'area della superficie definita da $z = a - x^2 - y^2$, $z \geq 0$. L'integrale da calcolare è $\int \int_{x^2+y^2 \leq a} \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} dx dy$ e passando a coordinate polari si ha $a \int_0^{\sqrt{a}} d\rho \rho \sqrt{1 + 4a\rho^2} \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{\pi}{6} \left((1 + 4a^2)^{3/2} - 1 \right)$

- Si calcoli l'area della “ciambella” la cui proiezione sul piano $z = 0$ è data dalle due circonferenze di raggi $r_1 < r_2$. La parametrizzazione della superficie è $a = \frac{1}{2}(r_2 + r_1)$, $b = \frac{1}{2}(r_2 - r_1)$

$$x = a \cos \vartheta + b \cos \varphi \cos \vartheta = \cos \vartheta (a + b \cos \varphi) \quad 0 \leq \vartheta \leq 2\pi \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

$$y = a \sin \vartheta + b \cos \varphi \sin \vartheta = \sin \vartheta (a + b \cos \varphi)$$

$$z = b \sin \varphi$$

L'area richiesta è $b \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} d\vartheta d\varphi (a + b \cos \varphi) = 4\pi^2 ab = \pi^2 (r_2^2 - r_1^2)$

- Sia data una superficie sferica $S = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3: x^2 + y^2 + z^2 = r^2\}$ avente densità superficiale di massa costante δ . Si vuole calcolare il potenziale gravitazionale in un qualsiasi punto dello spazio.

Sia $\underline{y}_o \equiv (\xi, \eta, \zeta)$ un punto dello spazio. Il potenziale nel punto \underline{y}_o generato da un “pezzettino” della sfera intorno al punto della sfera $\underline{x}_o = (x_o, y_o, z_o)$ è dato da $\frac{\delta d\sigma}{dist(\underline{x}_o, \underline{y}_o)}$ ^(8.6) Il potenziale

generato dalla sfera in \underline{y}_o è $I = \int \int_S \frac{\delta d\sigma}{dist(\underline{x}_o, \underline{y}_o)}$. Con la parametrizzazione in coordinate polari

avente l'asse z posto lungo la retta congiungente il centro di V con il punto \underline{y}_o , l'integrale diventa

$$r^2 \delta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\vartheta \frac{\sin \vartheta}{\sqrt{r^2 - 2r\zeta \cos \vartheta + \zeta^2}} = \frac{2\pi r \delta}{\zeta} (|r + \zeta| - |r - \zeta|). \text{ Se } \zeta > r \text{ abbiamo } I = \frac{4\pi r^2 \delta}{\zeta} = \frac{M}{\zeta}$$

dove $M = 4\pi r^2 \delta$ è la massa della superficie sferica. Se $\zeta < -r$ la formula è la stessa $I = \frac{M}{-\zeta}$. Se $|\zeta| < r$ abbiamo $I = 4\pi \delta r$. Come si vede, in ambedue i casi le dimensioni del risultato sono pari a una massa fratto una distanza. Inoltre all'interno della sfera non vi è campo gravitazionale ossia un corpo materiale non sarebbe soggetto ad alcuna forza.

Per simmetria sferica il campo gravitazionale in un punto a distanza R dall'origine è $\frac{M}{R}$ e $-\partial(\frac{M}{R})$ è la forza gravitazionale. Viene fuori che tanto il campo quanto il potenziale hanno la stessa forma che avrebbero se la massa fosse concentrata nell'origine.

Si noti che il potenziale è uguale se si pone $\zeta = r$ nelle due formule di prima ma la forza no.

- Si calcoli l'area dell'insieme definito dalle relazioni $\{x^2 + y^2 \leq r^2, x^2 + z^2 = r^2\}$ e $\{x^2 + z^2 \leq r^2, x^2 + y^2 = r^2\}$.

^(8.6) Notare che vi è il fattore $d\sigma$ che è uguale a $\|\underline{\varphi}_u \wedge \underline{\varphi}_v\| dudv$ e non semplicemente $dudv$ in quanto il fattore metrico di una superficie passa attraverso una sua parametrizzazione.

- Si calcoli l'area di quella superficie conica $z = a\sqrt{x^2 + y^2}$ tale che $bx + cy + dz \leq 1$ e $x, y \geq 0$ ($a, b, c, d \geq 0$).
- Si calcoli l'area dell'insieme definito da $x^2 + (y - 1)^2 \leq r^2$, $0 \leq z \leq ax + by$
- Sia data la parabola $2ax = y^2$, $z = 0$ ed il punto $P \equiv (0, 0, a)$. Sia inoltre C il cono di vertice P e direttrice la parabola e sia S la sfera di equazione $x^2 + y^2 + z^2 - az = 0$. 1) Calcolare l'area della porzione di cono interno alla sfera. 2) Calcolare l'area di quella parte di sfera, detta S' che è interna al cono C .
- Dopo avere osservato che le formule $x = r\frac{u^2 - r^2}{u^2 + r^2}$ e $y = \frac{2ur^2}{u^2 + r^2}$ soddisfano la relazione $x^2 + y^2 = r^2$, si calcoli la lunghezza della circonferenza di raggio r .
- Sia data curva $y = \sqrt{2ax}$, $z = 0$ ed il punto $P \equiv (0, 0, a)$, $a > 0$. Sia inoltre C il cono di vertice P e direttrice la curva e il semiasse positivo delle ascisse. Sia inoltre S la sfera di equazione $x^2 + y^2 + z^2 - az = 0$. 1) Calcolare l'area della porzione di cono interno alla sfera. 2) Calcolare l'area di quella parte di sfera, detta S' che è interna al cono C .
- Sia data la "lemniscata di Bernoulli" $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$. Sia M un punto di essa e sia C la circonferenza avente per diametro OM e giacente sul piano passante per il diametro e l'asse z . Calcolare la superficie, detta S , della figura che si ottiene come luogo delle circonferenze al variare di M sulla lemniscata. Detto V il volume racchiuso da S , si calcoli il baricentro della parte di V la cui proiezione sul piano (x, y) è situata nel primo quadrante.
- Siano dati curva $y^2 = 2ax$, $z = 0$ ed il punto $P \equiv (0, 0, a)$, $a > 0$. Sia C il cono di vertice P e direttrice la curva. Sia inoltre S_1 il piano di equazione $x + y + z = b$ e S_2 il piano di equazione $x - y + z = b$. (1) Al variare di $b \geq 0$, calcolare l'area della porzione di cono interno alla regione, detta R , individuata dai due piani S_1 e S_2 , dal piano $z = 0$ e $x = 0$. (2) Calcolare il volume della porzione di cono descritta nella domanda precedente. (3) Si scriva poi il risultato per $(a, b) = (2, 5/4)$, e $(a, b) = (1, 4)$. (4) Della regione individuata dai due piani S_1 e S_2 , dal piano $z = 0$ e $x = 0$, si calcoli l'area della porzione interna ad R .

A proposito del fattore $\|\underline{\varphi}_u \wedge \underline{\varphi}_v\|$

Per capirne l'importanza si immagini di calcolare l'area della superficie sferica come la somma della lunghezze delle circonferenze ottenute "tagliando" la sfera con dei piani orizzontali. Otterremmo $S = 2 \int_0^r 2\pi\sqrt{r^2 - z^2} dz = \pi r^2$ che è chiaramente sbagliata.

Se invece volessimo calcolare l'area del cerchio come somma delle lunghezze ottenute tagliando il cerchio con dei segmenti verticali otterremmo $2 \int_0^r dx\sqrt{r^2 - x^2} = \pi r^2$ che è giusta. La differenza fra i due calcoli sta nel fatto che il cerchio è piatto e il fattore $\|\underline{\varphi}_u \wedge \underline{\varphi}_v\|$ vale 1 mentre la sfera non è piatta e il fattore tiene conto di ciò.

Anche nel caso del cilindro $x^2 + y^2 = r^2$ si ha la stessa cosa. Infatti la parametrizzazione $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $z = u$ fa sì che $\|\underline{\varphi}_\theta \wedge \underline{\varphi}_u\| = 1$ (non dipende da θ). La stessa cosa accade con il cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

Diamo ora qualche formula per superfici in dimensioni $k - n$. Supponiamo di avere una superficie k -dimensionale dentro un "ambiente" n -dimensionale. In altre parole abbiamo le n relazioni $x_1 = \varphi_1(u_1, \dots, u_k), \dots, x_n = \varphi_n(u_1, \dots, u_k)$ ($\underline{x} = \underline{\varphi}(\underline{u})$). Otteniamo la matrice

$$\begin{pmatrix} (\varphi_1)_{u_1} & (\varphi_1)_{u_2} & \cdots, & (\varphi_1)_{u_k} \\ (\varphi_2)_{u_1} & (\varphi_2)_{u_2} & \cdots, & (\varphi_2)_{u_k} \\ \vdots & & & \\ (\varphi_n)_{u_1} & (\varphi_n)_{u_2} & \cdots, & (\varphi_n)_{u_k} \end{pmatrix} \underline{u} = (u_1, \dots, u_k) \in D \subset \mathbb{R}^k.$$
 Definiamo la quantità

$$\left\| \frac{\partial \varphi(\underline{u})}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial \varphi(\underline{u})}{\partial u_n} \right\|$$
 la radice quadrata della somma dei quadrati di tutti i minori di ordine k della

matrice. L'area della superficie è data dalla quantità

$$\int_D \left\| \frac{\partial \varphi(\underline{u})}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial \varphi(\underline{u})}{\partial u_n} \right\| du_1 du_2 \dots du_k = \int_D \left\| \frac{\partial \varphi(\underline{u})}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial \varphi(\underline{u})}{\partial u_n} \right\| d\underline{u}$$

Corollario 8.2 Osserviamo che se la superficie da parametrizzazione fosse $\underline{x} = \lambda \underline{\varphi}(\underline{u})$ dove λ è una costante positiva, l'integrale sarebbe $\lambda^k \int_D \left\| \frac{\partial \varphi(\underline{u})}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial \varphi(\underline{u})}{\partial u_n} \right\| d\underline{u}$

Nel resto del capitolo ci occuperemo della relazione esistente fra integrali multipli e integrali curvilinei

Lemma di Gauss–Green

Pag. 471–473 di [BPS1] oppure pag. 527–529 di [BPS2].

Sia data D un insieme limitato in \mathbb{R}^2 tale che ∂D sia il sostegno di una *curva di Jordan*. Una curva di Jordan è un curva piana, chiusa, semplice. Un teorema di Geometria asserisce che il sostegno di una curva di Jordan è frontiera di due insiemi aperti nel piano, uno dei quali è limitato e si chiama *interno della curva* e l'altro illimitato e detto *esterno della curva*.

Sia $\underline{\varphi}(t): [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ $\underline{\varphi}(t) = \begin{cases} x(t) \\ y(t) \end{cases}$ la curva di sostegno ∂D . Il suo vettore tangente di modulo 1 è

$$\underline{T}(t) = \frac{(x'(t), y'(t))}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}}.$$

$\underline{\varphi}$ fissa una orientazione di ∂D e precisamente l'orientazione data dal verso di

percorrenza di ∂D andando verso i valori di t crescenti se soddisfa la seguente definizione:

Definizione Si dice che $\underline{\varphi}$ è una orientazione positiva per ∂D se per ogni punto $P \in \partial D$ l'angolo fra il versore normale esterno e quello tangente, misurato in senso antiorario, è $\frac{\pi}{2}$.

Il versore normale esterno ha due possibili versi. La definizione appena data fissa il verso “giusto”. I

due versori normali possibili sono $\underline{T}_1(t) = \frac{(-y'(t), x'(t))}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}}$ e $\underline{T}_2(t) = \frac{(y'(t), -x'(t))}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}}$. Cerchiamo quello

per cui $\underline{n} \wedge \underline{T} = (0, 0, 1)$ e si vede subito che quello giusto è $\underline{T}_2(t)$. Intuitivamente $\underline{\varphi}$ orienta positivamente ∂D se percorrendo ∂D nel verso delle t crescenti, “ D rimane a sinistra”. Sia $\partial^+ D$ il cammino orientato positivamente e $\partial^- D$ il cammino orientato negativamente

Sia $\overline{D} = \partial D \cup D$ e sia data una forma differenziale $\omega = P(\underline{x})dx + Q(\underline{x})dy$ con $P, Q \in C^1(\overline{D})$. Supponiamo poi che D sia normale rispetto a uno degli assi. Abbiamo allora il seguente

Lemma 8.1 Se $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: a < x < b \quad \varphi_1(x) < y < \varphi_2(x)\}$ con φ_1 e φ_2 regolari a tratti si ha

$$\int \int_D P_y dx dy = - \int_{\partial^+ D} P dx. \quad \text{Se } D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: c < x < d \quad \psi_1(y) < x < \psi_2(y)\} \text{ con } \psi_1 \text{ e } \psi_2$$

$$\text{regolari a tratti si ha } \int \int_D Q_x dx dy = \int_{\partial^+ D} Q dy.$$

Dimostrazione
$$\int \int_D P_y dx dy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} P_y dy = \int_a^b dx (P(x, \varphi_2(x)) - P(x, \varphi_1(x))).$$

$\int_{\partial^+ D} P dx$ si scompone in quattro pezzi. I due pezzi in cui $x = a$ o $x = b$ danno zero in quanto ivi $dx = 0$. Rimangono gli altri due pezzi ossia $\int_a^b dt P(t, \varphi_1(t)) + \int_b^a dt P(t, \varphi_2(t)) = \int_a^b dt P(t, \varphi_1(t)) - \int_a^b dt P(t, \varphi_2(t)) = -(-\int_a^b dt P(t, \varphi_1(t)) + \int_a^b dt P(t, \varphi_2(t))) = -\int_{\partial^+ D} P dx$

La dimostrazione della seconda parte è identica nella sostanza. ■

Teorema 8.4 Consideriamo le stesse ipotesi del Lemma con in più il fatto che il dominio D sia normale rispetto a tutti e due gli assi. Allora vale la formula
$$\int \int_D (Q_x - P_y) dx dy = \int_{\partial^+ D} (P dx + Q dy)$$

Dimostrazione sottrarre le due espressioni di prima. ■

Osservazione *i)* Se facciamo il rotore di $(P, Q, 0)$ otteniamo il vettore $(Q_y - P_x)\underline{k}$. Ne segue che l'uguaglianza $\int \int (Q_x - P_y) dx dy = \int_{\partial^+ D} (P dx + Q dy)$ può essere vista, a sinistra come l'integrale doppio del rotore e a destra come l'integrale di linea del vettore (P, Q) . *ii)* Il Teorema 8.4 vale anche senza l'ipotesi che il sostegno di φ sia normale rispetto a tutti e due gli assi. È sufficiente che il sostegno sia una curva regolare ma la dimostrazione è alquanto più complicata.

Il Teorema appena dimostrato ha almeno tre applicazioni importanti. la prima è che può essere più facile calcolare l'integrale curvilineo rispetto all'integrale doppio o viceversa. La seconda è una

utile formula per il calcolo delle aree. Infatti $|D| = \int \int_D dx dy = -\int_{\partial^+ D} y dx$ e d'altro canto ho $|D| = \int \int_D dx dy = \int_{\partial^+ D} x dy$ da cui $|D| = \frac{1}{2} \int_{\partial^+ D} (x dy - y dx)$ Una terza applicazione riguarda l'invarianza rispetto a deformazioni della traiettoria per integrali curvilinei. Supponiamo di avere una curva di Jordan $\underline{\psi}$ il cui sostegno è contenuto in $\overset{\circ}{D}$. Sia A l'insieme esterno a $\underline{\psi}$ e interno a φ . Abbiamo il seguente

Corollario 8.3 Sia $\omega = P dx + Q dy$ chiusa in A . Allora $\int_{\varphi} \omega = \int_{\underline{\psi}} \omega$ dove φ e $\underline{\psi}$ appartengono ad A .

Dimostrazione
$$\int \int_A (-P_y + Q_x) dx dy = \int_{\partial^+ A} (P dx + Q dy) = 0$$
 essendo ω chiusa. Ma allora $\int_{\varphi} (P dx + Q dy) = \int_{\underline{\psi}} (P dx + Q dy)$. ■

Esempi

- Sia dato un insieme in $E \subset \mathbb{R}^2$ tale che ∂E è il sostegno della curva $\varphi(\theta) = \begin{cases} x = f(\theta) \cos \theta \\ y = f(\theta) \sin \theta \end{cases}$. Allora
$$area(E) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta (f' \sin \theta + f \cos \theta) f \cos \theta - (f' \cos \theta - f \sin \theta) f \sin \theta = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} f^2(\theta)$$

- Si calcoli $\int_{\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} = 1} \omega$ dove $\omega = \frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy$ percorrendo l'ellisse in senso antiorario. Per

il Corollario 8.3 l'integrale è uguale a $\int_{x^2+y^2=1} \omega = 2\pi$

- Si calcoli il volume del solido racchiuso dal piano (x, y) , dal paraboloide di equazione $z = \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b}$ e dal cilindro $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Il volume è dato da $\int \int_{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1} \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b}$. Si può certamente calcolare l'integrale doppio oppure osservare

che esso è uguale, dopo avere parametrizzato l'ellisse con $\varphi(t) = \begin{cases} x = a \cos \theta \\ y = b \sin \theta \end{cases}$, all'integrale $\int_{\varphi} (\frac{y^2 x}{b} dy -$

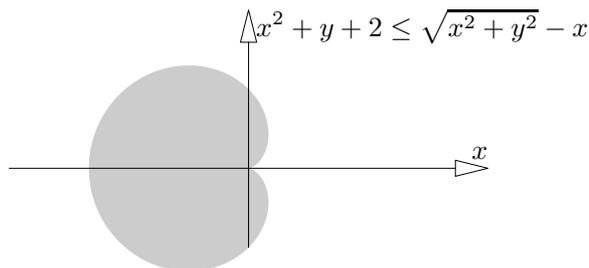
$$\frac{x^2 y}{a} dx) = \frac{\pi}{4} ab(a + b)$$

- Si calcoli l'area della regione D interna alla curva il cui sostegno è definito dalla equazione $x^2 + y^2 = \sqrt{x^2 + y^2} - x$

Si esprime la relazione $x^2 + y^2 = \sqrt{x^2 + y^2} - x$ in coordinate polari e viene $\rho = 1 - \cos \theta$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$

(*cardioide, vedi figura.*) La curva con sostegno ∂D è data da $\varphi(t) = \begin{cases} x = (1 - \cos \theta) \cos \theta \\ y = (1 - \cos \theta) \sin \theta \end{cases}$ e quindi

$$\int \int_D dx dy = \frac{1}{2} \int_{\partial^+ D} (x dy - y dx) \text{ e i calcoli portano a } \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta (1 - \cos \theta)^2 = \frac{3}{2} \pi$$

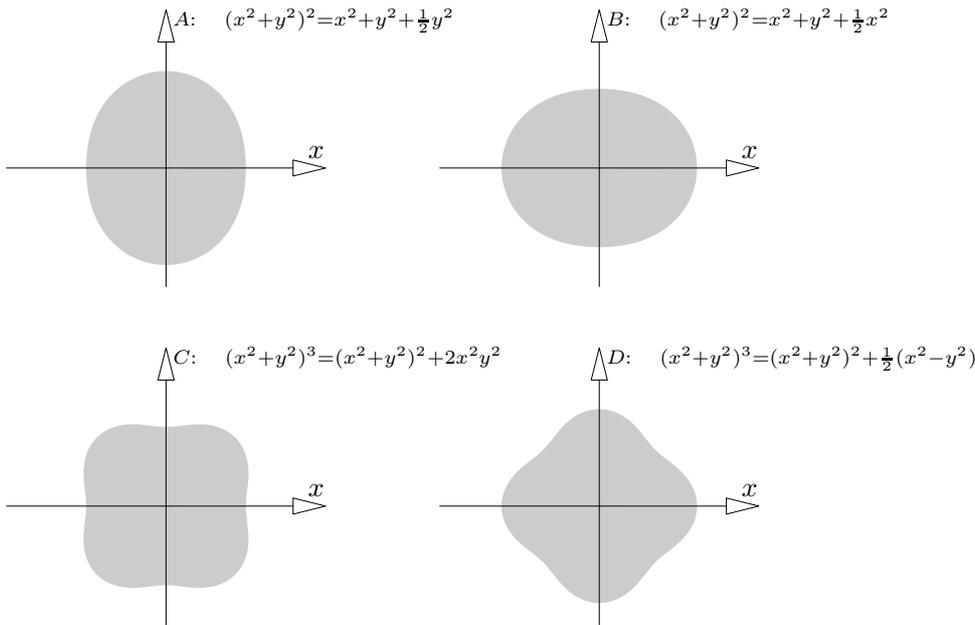


- Riprendiamo la Lemniscata di Bernoulli la cui area è stata trovata nel capitolo sugli integrali doppi. Si ottiene $A = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\vartheta (1 + 3 \cos^2 \vartheta) = \frac{1}{2} (2\pi + 3\pi) = \frac{5}{2} \pi$

- Si calcoli l'area della regione racchiusa dalle curve la cui frontiera è data da:

- 1) $(x^2 + y^2)^2 = x^2 + y^2 + \frac{1}{2} y^2$,
- 2) $(x^2 + y^2)^2 = x^2 + y^2 + \frac{1}{2} x^2$,
- 3) $(x^2 + y^2)^3 = (x^2 + y^2)^2 + 2x^2 y^2$
- 4) $(x^2 + y^2)^3 = (x^2 + y^2)^2 + \frac{1}{2} (x^2 - y^2)$

In coordinate polari $x = \rho(\vartheta) \cos \vartheta$, $y = \rho(\vartheta) \sin \vartheta$, le precedenti relazioni si scrivono rispettivamente come $\rho(\vartheta) = \sqrt{1 + \frac{1}{2} \sin^2 \vartheta}$, $\rho(\vartheta) = \sqrt{1 + \frac{1}{2} \cos^2 \vartheta}$, $\rho(\vartheta) = \sqrt{1 + \frac{1}{2} \sin^2(2\vartheta)}$, $\rho(\vartheta) = \sqrt{1 + \frac{1}{2} \cos^2(2\vartheta)}$, e l'area in tutti i casi è $\frac{5}{4} \pi$. I grafici sono i seguenti



Il Teorema 8.4 consente di trovare un criterio sufficiente perché una forma differenziale chiusa sia esatta.

Definizione 8.11 Un insieme aperto connesso $A \subset \mathbb{R}^2$ si dice *semplicemente connesso* se comunque si prenda una curva $\varphi: [a, b] \rightarrow A \subset \mathbb{R}^2$ chiusa e regolare a tratti, il suo sostegno è frontiera di un aperto limitato e contenuto in A

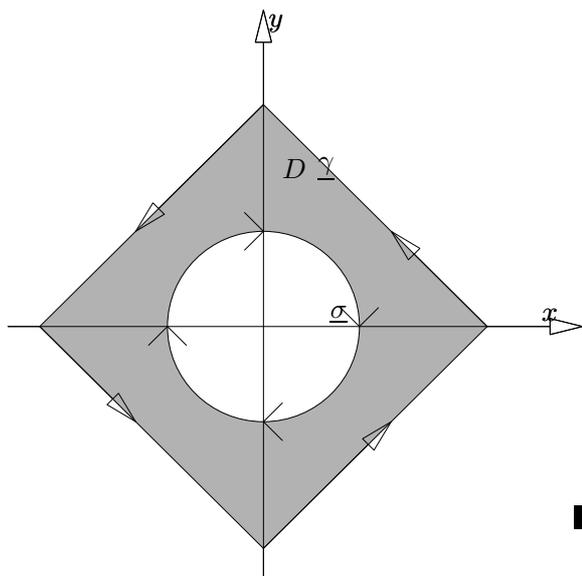
Teorema 8.5 Sia A semplicemente connesso. Ogni forma chiusa definita in A è esatta.

Dimostrazione Sia $\varphi: [a, b] \rightarrow A$ una curva chiusa e regolare a tratti. Esisterà un insieme $B \subset D$ tale che ∂B è il sostegno di φ in quanto si suppone che A sia semplicemente connesso. Sia $\omega = P(\underline{x})dx + Q(\underline{x})dy$ chiusa ossia $P_y = Q_x$ per ogni $\underline{x} \in A$. Allora $\int \int_B (Q_x - P_y) = \int_{\partial^+ B} \omega = 0$ per ogni curva chiusa e per il Corollario 8.3 la forma è esatta. ■

Siano date ora due curve di Jordan $\underline{\gamma}(t)$ e $\underline{\sigma}(t)$ percorse in senso antiorario tali che l'interno di $\underline{\sigma}$ è un sottoinsieme dell'interno di $\underline{\gamma}$. Supponiamo inoltre il complementare dell'interno di $\underline{\sigma}$ sia un sottoinsieme dell'insieme di definizione di una certa forma ω chiusa. Si ha il teorema

Teorema 8.6 Per ogni forma chiusa ω si ha $\int_{\underline{\gamma}} \omega = \int_{\underline{\sigma}} \omega$.

Dimostrazione Il sostegno delle due curve $\underline{\gamma}$ e $\underline{\sigma}$ costituiscono il bordo dell'insieme contornato da $\underline{\gamma}$ e che non fa parte dell'interno di $\underline{\sigma}$ (detto D). $\int_{\underline{\gamma}} \omega - \int_{\underline{\sigma}} \omega = \int \int (Q_x - P_y) = 0$ da cui il risultato. Dalla figura si vede che il bordo di D è percorso in senso antiorario e quindi $\underline{\gamma}$ è percorsa in senso antiorario mentre il bordo interno in senso orario.



- Si calcoli $\oint_{\underline{\gamma}} \omega$ dove $\omega = \frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy$ e $\underline{\gamma}$ è la curva, percorsa in senso antiorario, il cui sostegno è dato dall'ellisse $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$. In base al teorema, il risultato dell'integrale è lo stesso nel caso della circonferenza di raggio 1 e quindi 2π . È importante notare che $\oint_{\underline{\gamma}} \omega = \int_0^{2\pi} dt \left(\frac{2 \sin^2 t}{1+3 \cos^2 t} + \frac{2 \cos^2 t}{1+3 \cos^2 t} \right) = \int_0^{2\pi} dt \frac{2}{1+3 \cos^2 t}$. Volendo passare attraverso la primitiva della funzione $\frac{2}{1+3 \cos^2 t}$, il calcolo è parecchio meno agevole. Un modo di procedere è il seguente: $\cos^2 t = \frac{1+\cos 2t}{2}$ da cui $\int_0^{2\pi} \frac{4dt}{5+3 \cos 2t} = \int_0^{\pi} \frac{8dt}{5+3 \cos 2t} = \int_0^{\pi/2} \frac{16dt}{5+3 \cos 2t}$. Poi cambiamo variabile $t = \arctan z$ da cui $16 \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+z^2} \frac{1}{5+3 \frac{z^2}{1+z^2} - 3 \frac{1}{1+z^2}} = 8 \int_0^{2\pi} \frac{1}{1+4z^2} = 4 \arctan(2z) \Big|_0^{+\infty} = 4 \frac{\pi}{2} = 2\pi$

Funzione potenziale per forme chiuse su insiemi semplicemente connessi

Sia data una forma differenziale ω chiusa definita in un sottoinsieme di \mathbb{R}^3 $E = \overset{\circ}{E}$ semplicemente connesso. Supponiamo che la forma sia $C^1(E)$. La definizione di insieme (è chiaro che trattasi di sottoinsieme) semplicemente connesso in \mathbb{R}^3 non è stata data. Si può immaginare che essa equivale alla seguente possibilità : qualunque curva data nell'insieme può essere contratta in almeno un modo fino a ridurla ad un punto dell'insieme "senza mai uscire dall'insieme". Ad esempio una sfera in \mathbb{R}^3 è un insieme semplicemente connesso. Una qualunque curva data su di essa (ad esempio un equatore) è contraibile fino a ridurla a un punto e ogni volta "l'interno" della curva appartiene alla sfera. La sfera alla quale viene tolto il Polo Nord e il Polo Sud non è semplicemente connesso in quanto lo stesso meccanismo di prima non funziona. Se si toglie solamente uno dei Poli rimane semplicemente connesso.

Il Teorema 8.5 è generalizzabile in \mathbb{R}^3 . Quindi data una forma ω chiusa in \mathbb{R}^2 oppure \mathbb{R}^3 definita su di un semplicemente connesso possiamo trovare una funzione (detta anche *funzione potenziale*) $f(\underline{x})$ tale che $\omega = df$. Procedendo come nel Teorema 8.2 sia $\underline{\gamma}(t)$ una curva tale che $\underline{\gamma}(a) = \underline{x}_o$ e $\underline{\gamma}(b) = \underline{x}$. $\underline{\gamma}(t) \in E$ per ogni t . Come funzione $f(\underline{x})$ basta prendere $\int_{\underline{\gamma}} \omega$. Ai fini del calcolo però conviene prendere la curva che rende l'integrale il più semplice possibile e ciò dipende dalla struttura di E . Se ad esempio $E = \mathbb{R}^3$ e $\omega = \sum_{i=1}^3 a_i(\underline{x})dx_i$ allora una possibile curva regolare a tratti è : $\underline{\gamma}_1(t) = (t, y_o, z_o)$ $x_o \leq t \leq x$,

$$\underline{\gamma}_2(t) = (x, t, z_o) \quad y_o \leq t \leq y, \quad \underline{\gamma}_3(t) = (x, y, t) \quad z_o \leq t \leq z. \quad f(\underline{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\underline{\gamma}} \omega = \int_{\underline{\gamma}_1} \omega + \int_{\underline{\gamma}_2} \omega + \int_{\underline{\gamma}_3} \omega = \int_{x_o}^x dt a_1(t, y_o, z_o) + \int_{y_o}^y dt a_2(x, t, z_o) + \int_{z_o}^z dt a_3(x, y, t).$$

Esercizio Si verifichi che $\underline{\partial}f(\underline{x}) = \omega(\underline{x})$.

$$\begin{aligned} f_x &= a_1(x, y_o, z_o) + \int_{y_o}^y \frac{\partial a_2}{\partial x}(x, t, z_o) dt + \int_{z_o}^z \frac{\partial a_3}{\partial x}(x, y, t) dt && \stackrel{\text{usando la chiusura}}{=} \\ &= a_1(x, y_o, z_o) + \int_{y_o}^y \frac{\partial a_1}{\partial t}(x, t, z_o) dt + \int_{z_o}^z \frac{\partial a_1}{\partial t}(x, y, t) dt \\ &= a_1(x, y_o, z_o) + a_1(x, y, z_o) - a_1(x, y_o, z_o) + a_1(x, y, z) - a_1(x, y, z_o) = a_1(x, y, z) \\ f_y &= a_2(x, y, z_o) + \int_{z_o}^z dt \frac{\partial a_3}{\partial y}(x, y, t) = a_2(x, y, z_o) + \int_{z_o}^z dt \frac{\partial a_2}{\partial z}(x, y, t) = \\ &= a_2(x, y, z_o) + a_2(x, y, z) - a_2(x, y, z_o) = a_2(x, y, z) \end{aligned}$$

Ogni altra funzione potenziale differisce dalla precedente per una costante. Ad esempio si può procedere nella seguente maniera. Si risolve la equazione $f_x(\underline{x}) = a_1(\underline{x})$ e quindi $f(\underline{x}) = \int_{x_o}^x dt a_1(t, y, z) + q(y, z)$.

Si ottiene

$$\begin{aligned} f_y(\underline{x}) &= \int_{x_o}^x \frac{\partial a_1}{\partial y}(t, y, z) dt + q_y(y, z) && \stackrel{\text{usando la chiusura}}{=} \int_{x_o}^x \frac{\partial a_2}{\partial x}(t, y, z) dt + q_y(y, z) && \stackrel{\text{integrando}}{=} \\ &= a_2(x, y, z) - a_2(x_o, y, z) + q_y(y, z) = a_2(x, y, z) \end{aligned}$$

e quindi $q_y(y, z) = a_2(x_o, y, z)$. Una ulteriore integrazione dà $q(y, z) = \int_{y_o}^y ds a_2(x_o, s, z) + p(z)$. A questo punto la funzione potenziale è

$$f(x, y, z) = \int_{x_o}^x dt a_1(t, y, z) + \int_{y_o}^y ds a_2(x_o, s, z) + p(z).$$

L'ultima derivazione dà

$$f_z(x, y, z) = \int_{x_o}^x dt \frac{\partial a_1}{\partial z}(t, y, z) + \int_{y_o}^y ds \frac{\partial a_2}{\partial z}(x_o, s, z) + p_z(z).$$

ed usando sempre la chiusura si perviene a

$$f_z(x, y, z) = \int_{x_o}^x \frac{\partial a_3}{\partial x}(t, y, z) dt + \int_{y_o}^y \frac{\partial a_3}{\partial y}(x_o, s, z) ds + p_z = a_3(x, y, z).$$

ossia

$$f_z(x, y, z) = a_3(x, y, z) - a_3(x_o, y, z) + a_3(x_o, y, z) - a_3(x_o, y_o, z) + p_z = a_3(x, y, z)$$

Integrando si ha $p_z(z) = a_3(x_o, y_o, z)$ e quindi $p(z) = c + \int_{z_o}^z du a_3(x_o, y_o, u)$ e quindi la funzione potenziale è $f(x, y, z) = \int_{x_o}^x dt a_1(t, y, z) + \int_{y_o}^y ds a_2(x_o, s, z) + \int_{z_o}^z du a_3(x_o, y_o, u) + c$

Esercizio Si dimostri che la funzione appena scritta è uguale alla precedente a meno di una costante.

Dobbiamo far vedere che la funzione

$$f(\underline{x}) = \int_{x_0}^x dt a_1(t, y, z) + \int_{y_0}^y ds a_2(x_0, s, z) + \int_{z_0}^z du a_3(x_0, y_0, u)$$

e la funzione

$$g(\underline{x}) = \int_{x_0}^x dt a_1(t, y_0, z_0) + \int_{y_0}^y dt a_2(x, t, z_0) + \int_{z_0}^z dt a_3(x, y, t)$$

differiscono per una costante. Ci basta far vedere che $\underline{\partial}f(\underline{x}) = \underline{\partial}g(\underline{x})$.

$$f_x = a_1(x, y, z)$$

$$g_x = a_1(x, y_0, z_0) + \int_{y_0}^y dt \frac{\partial a_2}{\partial x}(x, t, z_0) + \int_{z_0}^z dt \frac{\partial a_3}{\partial x}(x, y, t) =$$

$$a_1(x, y_0, z_0) + \int_{y_0}^y dt \frac{\partial a_1}{\partial y}(x, t, z_0) + \int_{z_0}^z dt \frac{\partial a_1}{\partial z}(x, y, t) =$$

$$= a_1(x, y_0, z_0) + a_1(x, y, z_0) - a_1(x, y_0, z_0) + a_1(x, y, z) - a_1(x, y, z_0) = a_1(x, y, z)$$

Esercizio Si trovi una funzione potenziale per la forma $\omega = \frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy$, $\underline{x} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{y = 0, x \geq 0\}$

Risposta: si prenda la funzione $f(\underline{x}) = \begin{cases} \arctan y/x & x > 0, y \geq 0 \\ \pi + \arctan y/x & x < 0 \\ 2\pi + \arctan y/x & x > 0, y < 0 \\ \pi/2 & x = 0, y \geq 0 \\ \pi 3/2 & x = 0, y < 0 \end{cases}$

Come si vede $\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (x_0,0) \\ x_0 > 0, y > 0}} f(\underline{x}) = 0$ e $\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (x_0,0) \\ x_0 > 0, y < 0}} f(\underline{x}) = 2\pi$. La funzione è discontinua sull'asse delle

ascisse positive o nulle. La discontinuità è di salto e vale 2π . Che tale sia il valore del salto non è un fatto misterioso. Basta osservare che per $-\frac{\pi}{2} < \vartheta < \frac{\pi}{2}$ si ha $\vartheta = \arctan \frac{y}{x}$ dove ϑ è l'angolo polare. ϑ però non è una funzione del punto (x, y) in quanto girando intorno all'origine di un angolo 2π , ϑ diventa $\vartheta + 2\pi$.

Esercizio Si trovi una funzione potenziale per la forma $\omega = \frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy$, $\underline{x} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{y = 0, x \leq 0\}$

Risposta: si prenda la funzione $f(\underline{x}) = \begin{cases} \arctan y/x & x \geq 0 \\ \pi + \arctan y/x & x < 0, y > 0 \\ -\pi + \arctan y/x & x < 0, y < 0 \\ \pi/2 & x = 0, y \geq 0 \\ -\pi/2 & x = 0, y < 0 \end{cases}$

In questo caso $\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (x_0,0) \\ x_0 < 0, y > 0}} f(\underline{x}) = \pi$ e $\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (x_0,0) \\ x_0 < 0, y < 0}} f(\underline{x}) = -\pi$.

Esercizio Sia data la forma differenziale $\omega = \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2} + \frac{zdy-ydz}{x^2+z^2}$. Si calcoli il valore di $\oint_{\varphi} \omega$ dove φ è la curva il cui sostegno è l'intersezione della sfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ con il piano $z = y$. La curva è percorsa in modo tale che le sue proiezioni sui piani coordinati sono percorse in senso antiorario. (R.:0).

Teorema di Stokes o del rotore

Il materiale si trova fra le pagine 494–500 di [BPS1] oppure 552–558 di [BPS2].

Sia $D \subset \mathbb{R}^2$ compatto $D = \overline{B}$ con B aperto e connesso. $\underline{\varphi}: D \rightarrow \mathbb{R}^3$ è una superficie regolare di

equazioni parametriche $\underline{\varphi}(t) = \begin{cases} x = \varphi^1(u, v) \\ y = \varphi^2(u, v) \\ z = \varphi^3(u, v) \end{cases}$. Sia $A = \overset{\circ}{A}$ un aperto tale che $\overline{A} \subset \overset{\circ}{D}$ e ∂A è una

curva regolare. Sia $S = \underline{\varphi}(A)$. Chiameremo *bordo di S* l'immagine secondo $\underline{\varphi}$ della frontiera di A ossia $\partial S = \underline{\varphi}(\partial A)$. Sia $\underline{\gamma}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva il cui sostegno è ∂A e orienta ∂A positivamente. La curva $\underline{\Gamma} = \underline{\varphi} \circ \underline{\gamma}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ ha come sostegno ∂S . Si dice che $\underline{\Gamma}$ orienta positivamente ∂S e si indica con

$\partial^+ S$ il cammino individuato da $\underline{\Gamma}$. Se $\underline{\gamma}(t) = \begin{cases} u = u(t) \\ v = v(t) \end{cases}$ la curva $\underline{\Gamma}$ ha equazioni $\begin{cases} x = \varphi^1(u(t), v(t)) \\ y = \varphi^2(u(t), v(t)) \\ z = \varphi^3(u(t), v(t)) \end{cases}$

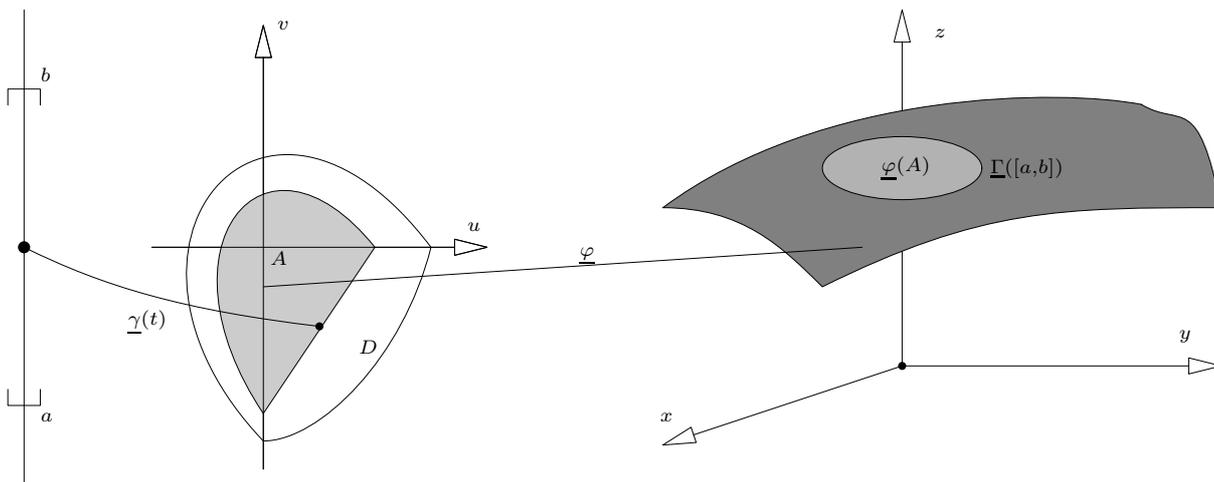
I vettori $\underline{a}(t) \in \mathbb{R}^2$ e $\underline{b}(t) \in \mathbb{R}^2$ sono rispettivamente i vettori, normalizzati a uno, tangente e ortogonale a ∂A in modo tale che $\underline{\gamma}$ orienti positivamente ∂A . $\underline{a}(t) \stackrel{\text{def}}{=} (a_1, a_2) = \frac{1}{\sqrt{(u')^2 + (v')^2}} (u'(t), v'(t))$ e $\underline{b}(t) =$

$(b_1, b_2) = \frac{1}{\sqrt{(u')^2 + (v')^2}} (v'(t), -u'(t))$. La matrice $\begin{pmatrix} \varphi_u^1 & \varphi_v^1 \\ \varphi_u^2 & \varphi_v^2 \\ \varphi_u^3 & \varphi_v^3 \end{pmatrix}$ applicata ai vettori di \mathbb{R}^2 ci fornisce la loro

immagine in \mathbb{R}^3 sotto la parametrizzazione della superficie ossia i due vettori $\begin{pmatrix} \varphi_u^1 & \varphi_v^1 \\ \varphi_u^2 & \varphi_v^2 \\ \varphi_u^3 & \varphi_v^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \underline{t}$ e

$\begin{pmatrix} \varphi_u^1 & \varphi_v^1 \\ \varphi_u^2 & \varphi_v^2 \\ \varphi_u^3 & \varphi_v^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \underline{\tau}$. Sia \underline{n}_e la normale esterna che è definita come quella normale (delle due possibili

$\underline{n} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\underline{\varphi}_u \wedge \underline{\varphi}_v}{\|\underline{\varphi}_u \wedge \underline{\varphi}_v\|}$ e $-\underline{n}$) tale che $(\underline{\tau} \wedge \underline{t}) \cdot \underline{n}_e > 0$



Sia ora $\underline{V}(\underline{x}) = P(\underline{x})\underline{i} + Q(\underline{x})\underline{j} + R(\underline{x})\underline{k}$ un campo vettoriale al quale è associata la forma differenziale $\omega = Pdx + Qdy + Rdz$. Abbiamo il seguente importante teorema

Teorema 8.6 (di Stokes) Sia S una superficie di classe C^2 . Allora $\int \int_S (\underline{rot}V, \underline{n}_e) d\sigma = \int_{\partial^+ S} \omega$

Dimostrazione (supponiamo $\underline{n}_e = \underline{\varphi}_u \wedge \underline{\varphi}_v / \|\underline{\varphi}_u \wedge \underline{\varphi}_v\|$,)

$$\int \int_S (\underline{rot}V, \underline{n}_e) d\sigma = \int \int_A dudv \{ (R_y - Q_z)(\varphi_u^2 \varphi_v^3 - \varphi_v^2 \varphi_u^3) + (P_z - R_x)(\varphi_u^3 \varphi_v^1 - \varphi_u^1 \varphi_v^3) + (Q_x - P_y)(\varphi_u^1 \varphi_v^2 - \varphi_v^1 \varphi_u^2) \}$$

Se indichiamo con

$$\omega = (P\varphi_u^1 + Q\varphi_u^2 + R\varphi_u^3)du + (P\varphi_v^1 + Q\varphi_v^2 + R\varphi_v^3)dv \stackrel{\text{def}}{=} M(u, v)du + N(u, v)dv$$

abbiamo

$$M_v = (\partial P \cdot \underline{\varphi}_v) \varphi_u^1 + (\partial Q \cdot \underline{\varphi}_v) \varphi_u^2 + (\partial R \cdot \underline{\varphi}_v) \varphi_u^3 + P\varphi_{vu}^1 + Q\varphi_{vu}^2 + R\varphi_{vu}^3$$

$$N_u = (\partial P \cdot \underline{\varphi}_u) \varphi_v^1 + (\partial Q \cdot \underline{\varphi}_u) \varphi_v^2 + (\partial R \cdot \underline{\varphi}_u) \varphi_v^3 + P\varphi_{uv}^1 + Q\varphi_{uv}^2 + R\varphi_{uv}^3$$

$\int \int_S (\underline{rot}V, \underline{n}) d\sigma = \int \int_A (N_u - M_v) dudv$ e per il Teorema 8.4 ^(8.8) l'integrale è

$$\int_{\partial^+ A} \tilde{\omega} = \int_a^b dt \{ (P\varphi_u^1 + Q\varphi_u^2 + R\varphi_u^3)u'(t) + (P\varphi_v^1 + Q\varphi_v^2 + R\varphi_v^3)v'(t) \} =$$

$$\int_a^b dt \{ P(\varphi_u^1 u' + \varphi_v^1 v') + Q(\varphi_u^2 u' + \varphi_v^2 v') + R(\varphi_u^3 u' + \varphi_v^3 v') \} = \int_{\partial^+ S} \omega. \blacksquare$$

Osservazione *i)* l'integrale $\int \int_S (\underline{V}(\underline{x}), \underline{n}(\underline{x})) d\sigma$ è detto *flusso del vettore* \underline{V} *attraverso la superficie* S in quanto si pensa a $\underline{V}(\underline{x})$ come a un campo vettoriale che punto per punto è la velocità di un fluido. Il prodotto scalare $(\underline{V}, \underline{n})$ elimina le componenti tangenziali alla superficie S e quindi dà l'idea della quantità di fluido che in un determinato punto ha attraversato la superficie. Possiamo scomporre $\underline{n} = \cos(\underline{n}, \underline{e}_1)\underline{e}_1 + \cos(\underline{n}, \underline{e}_2)\underline{e}_2 + \cos(\underline{n}, \underline{e}_3)\underline{e}_3$ e quindi $(\underline{V}, \underline{n}) = \sum_{i=1}^3 V_i \cos(\underline{n}, \underline{e}_i)$. Ora $d\sigma \cos(\underline{n}, \underline{e}_1)$ rappresenta la proiezione dell'elemento d'area $d\sigma$ sul piano (y, z) , $d\sigma \cos(\underline{n}, \underline{e}_2)$ rappresenta la proiezione sul piano (x, z) e $d\sigma \cos(\underline{n}, \underline{e}_3)$ rappresenta la proiezione sul piano (x, y)

Esempi

- Sia C l'insieme dato dall'intersezione della sfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ e il piano $x + y + z = 0$. Sia data la forma differenziale $\omega = ydx + zdy + xdz$. Sia $\partial^+ C$ l'orientazione positiva su C . Si calcoli $\int_{\partial^+ C} \omega$.

L'intersezione delle due superfici è una circonferenza equatoriale della sfera la cui inclinazione è tale da rendere il disco (detto D) contenuto in tale circonferenza perpendicolare ai vettori $\frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$ e $\frac{1}{\sqrt{3}}(-1, -1, -1)$. Possiamo applicare il Teorema di Stokes ottenendo $\int_{\partial^+ C} \omega = \int \int_D (\underline{rot}V, \underline{n}) d\sigma$. La normale dettata dalla parametrizzazione della superficie e della curva è $\frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$ e quindi $\int \int_D (\underline{rot}V, \underline{n}) d\sigma = \int \int_D -\frac{3}{\sqrt{3}} d\sigma = -3 \int \int_{\tilde{D}} dx dy$ dove \tilde{D} è la proiezione sul piano (x, y) della superficie planare D ossia $\tilde{D} = \{2x^2 + 2y^2 + 2xy \leq a^2\}$. Dunque dobbiamo calcolare l'integrale $\int \int_{2x^2 + 2y^2 + 2xy \leq a^2} dx dy$. Usiamo le coordinate polari $x = \rho \cos \vartheta$, $y = \rho \sin \vartheta$, ed otteniamo che

^(8.8) si usa la formulazione che prevede solamente la regolarità di $\underline{\varphi}$ e non che il sostegno contenga al suo interno un insieme normale rispetto a tutti e due gli assi

$2x^2 + 2y^2 + 2xy = a^2$ è equivalente a $2\rho^2 + 2\rho^2 \sin \vartheta \cos \vartheta = a^2$ ossia $\rho^2 = \frac{a^2}{2+\sin 2\vartheta}$ e quindi $\int \int_D dx dy = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{\sqrt{\frac{a^2}{2+\sin 2\vartheta}}} \rho d\rho = \int_0^{2\pi} d\vartheta \frac{1}{2} \frac{a^2}{2+\sin 2\vartheta} = \int_0^{\pi} d\vartheta \frac{a^2}{2+\sin 2\vartheta} = \int_0^{\pi/2} d\vartheta \frac{a^2}{2+\sin 2\vartheta} + \int_{\pi/2}^{\pi} d\vartheta \frac{a^2}{2+\sin 2\vartheta}$. Con la sostituzione $\vartheta' = \vartheta - \frac{\pi}{2}$ si ha $\int_{\pi/2}^{\pi} d\vartheta \frac{a^2}{2+\sin 2\vartheta} = \int_0^{\pi/2} d\vartheta' \frac{a^2}{2-\sin 2\vartheta'}$ e quindi l'integrale è $\int_0^{\pi/2} d\vartheta \frac{4a^2}{4-\sin^2 2\vartheta}$. Per risolvere l'integrale bisogna effettuare la sostituzione $\vartheta = \arctan x$ da cui si ottiene $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} \frac{4a^2}{4-4\frac{x^2}{(1+x^2)^2}} = a^2 \int_0^{+\infty} dx \frac{1+x^2}{x^4+x^2+1} = a^2 \int_0^{+\infty} dx \frac{1+x^2}{(x^2+x+1)(x^2-x+1)} = \frac{a^2}{2} \int_0^{+\infty} dx \frac{1}{x^2-x+1} + \frac{a^2}{2} \int_0^{+\infty} dx \frac{1}{x^2+x+1} = -\frac{a^2}{2} 2\pi \frac{1}{\sqrt{3}}$ e quindi il risultato è $-\sqrt{3}\pi a^2$

Alternativamente si può procedere al calcolo dell'integrale di linea tenendo conto che essendo l'integrale effettuato su di una curva chiusa, $\int_{\varphi} d(f) = 0$ qualunque sia la funzione f . $\omega = d(xy) - xdy + zdy + x(-dx - dy) = d(xy) - \frac{1}{2}d(x^2) - 2xdy + dy(-x - y) = -3xdy + d(xy) - \frac{1}{2}d(x^2) - \frac{1}{2}d(y^2)$ e quindi $\int_{\varphi} \omega = -3 \int_{\varphi} xdy$ e $\int_{\varphi} xdy$ è l'area della proiezione sul piano (x, y) del disco contenuto all'interno della circonferenza equatoriale di prima (Osservazione i) Teorema 8.4). L'area ha il segno + se la proiezione della circonferenza è percorsa in senso antiorario. La proiezione di tale circonferenza è

l'ellisse $2x^2 + 2y^2 + 2xy = a^2$. Con la trasformazione di coordinate $\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\xi + \eta) \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi + \eta) \end{cases}$ l'ellisse diventa

$3\xi^2 + \eta^2 = a^2$ e $z = -\sqrt{2}\xi$. L'area è $\pi \frac{a^2}{\sqrt{3}}$ e quindi $\int_{\partial^+ C} \omega = -\sqrt{3}\pi a^2$

- Si valuti $\int_{\varphi} \omega$ dove $\omega = (y+z)dx + (z+x)dy + (x+y)dz$ e φ è la curva il cui sostegno è costituito dall'intersezione del cilindro $x^2 + y^2 = 2y$ e dal piano $y = z$.

La curva φ è chiusa in quanto il piano è inclinato e il cilindro è infinito. Sostituendo $z = y$ nella forma differenziale vediamo che $\omega = 2d(xy)$ e quindi l'integrale è nullo.

Usando il Teorema di Stokes vediamo che $\text{rot} \underline{V} = \underline{0}$ dove $\underline{V} = (y+z)\underline{i} + (z+x)\underline{j} + (x+y)\underline{k}$ e quindi...

- Sia C l'insieme dato dall'intersezione del cilindro $x^2 + y^2 = a^2$ e il piano $\frac{x}{a} + \frac{z}{b} = 1$ $a, b > 0$. Sia data la forma differenziale $\omega = (y-z)dx + (z-x)dy + (x-y)dz$. Sia $\partial^+ C$ l'orientazione positiva su C . Si calcoli $\int_{\partial^+ C} \omega$.

L'intersezione (detta S) delle due superfici, una volta proiettata sul piano (x, y) è data dalla circonferenza $x^2 + y^2 = a^2$ e il disco da essa contenuto è detto D .

Usando l'espressione di z in funzione di x , l'integrale della forma è dato da $\int_{\varphi} ((ydx - xdy) - \frac{2b}{a} xdy) = -2\pi a^2 - 2ab\pi = -2a\pi(a+b)$ e il bordo di S è percorso in senso antiorario. φ è la parametrizzazione del bordo di S ossia $x = a \cos t, y = a \sin t, z = b(1 - \cos t)$ ma tale parametrizzazione non serve ai fini del calcolo.

Usando il Teorema di Stokes abbiamo $\text{rot} \underline{V} = -2(1, 1, 1)$ dove $\underline{V} = (y-z)\underline{i} + (z-x)\underline{j} + (x-y)\underline{k}$ e la normale esterna è il vettore $\underline{n}_e = \frac{1}{c}(\frac{b}{a}, 0, 1)$ dove c è il modulo del vettore $(\frac{b}{a}, 0, 1)$. $\int \int_D (\text{rot} \underline{V}, \underline{n}_e) d\sigma = (-2\frac{b}{a} - 2)\pi a^2$.

- Sia C l'insieme dato dall'intersezione della sfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2ax$ e $x^2 + y^2 = 2bx, z > 0, 0 < b < a$. Si calcoli $\int_{\partial^+ C} \omega$ dove $\omega = (y^2 + z^2)dx + (x^2 + z^2)dy + (x^2 + y^2)dz$.

La proiezione di C sul piano (x, y) è il cerchio $(x - b)^2 + y^2 = b^2$ detto D . Usando le relazioni fra le variabili si ha $\int_{\partial+C} \omega = \int_{\partial+C} (2axdy + 2bx dz)$. Ora $z = \sqrt{2a - 2b}\sqrt{x}$ per cui $dz = \sqrt{\frac{a-b}{2}} \frac{1}{\sqrt{x}}$ e quindi, a parte una costante $x dz = \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2d(\sqrt{x})$ da cui l'integrale di linea nullo su una curva chiusa. Si è ottenuto quindi $\int_{\partial+C} \omega = \int_{\partial+C} 2axdy$ che è uguale all'area della proiezione sul piano (x, y) dell'intersezione fra le due figure geometriche (un cerchio di raggio b la cui area è πb^2) moltiplicata per $2a$.

Per usare il Teorema di Stokes calcoliamo $\underline{rotV} = 2(y - z)\underline{i} + 2(z - x)\underline{j} + 2(x - y)\underline{k}$ e chiaramente $\underline{V} = (y^2 + z^2)\underline{i} + (x^2 + z^2)\underline{j} + (x^2 + y^2)\underline{k}$. La normale esterna alla superficie è $\underline{n}_e = \frac{\underline{v}}{\|\underline{v}\|}$ dove $\underline{v} = (\frac{x-a}{\sqrt{a^2-(x-a)^2-y^2}}, \frac{y}{\sqrt{a^2-(x-a)^2-y^2}}, 1)$; $(\underline{rotV} \cdot \underline{v}) = 2a - \frac{2ay}{\sqrt{a^2-(x-a)^2-y^2}}$ e $\int \int_S (\underline{rotV} \cdot \underline{n}_e) d\sigma = \int \int_D (2a - \frac{2ay}{\sqrt{a^2-(x-a)^2-y^2}}) dx dy = 2\pi ab^2$, S è la porzione di spazio delimitata da C .

Teorema di Gauss o della divergenza

Definizione 8.12 Un insieme aperto $D \subset \mathbb{R}^n$ è detto regolare se esiste una funzione $F(\underline{x})$, $F \in C^1(\mathbb{R}^n)$ tale che 1) $D = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n : F(\underline{x}) < 0\}$ 2) $\partial D = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n : F(\underline{x}) = 0\}$ 3) $\underline{\partial}F(\underline{x}) \neq \underline{0}$ per ogni $\underline{x} \in \partial D$

La frontiera di un aperto regolare è una superficie regolare grazie al Teorema delle funzioni implicite. Il versore $\underline{n}_e(\underline{x}) = \frac{\underline{\partial}F(\underline{x})}{\|\underline{\partial}F(\underline{x})\|}$ è normale a ∂D ed è diretto verso l'esterno. Infatti $F(\underline{x} + t\underline{n}_e) = F(\underline{x}) + t\underline{\partial}F(\underline{x}) \cdot \underline{n}_e + o(|t|) = t\|\underline{\partial}F(\underline{x})\| + o(|t|)$ e per $t > 0$ e piccolo la funzione è positiva. Vuol dire che muovendosi sul segmento $[\underline{x}, \underline{x} + \underline{n}_e]$ da \underline{x} verso $\underline{x} + \underline{n}_e$, si aumenta il valore di $F(\underline{x})$ e quindi ci si trova fuori da D .

Sia $\underline{V}(\underline{x})$ un campo vettoriale di classe C^1 definito su \mathbb{R}^n oppure su di un suo sottoinsieme aperto.

Definizione 8.13 La funzione $\sum_{i=1}^n \frac{\partial V_i}{\partial x_i}$ è detta divergenza del campo vettoriale e di indica con $div \underline{V}$.

Ad esempio sia $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - r^2$; $F(\underline{x}) < 0$ definisce l'interno della sfera di raggio r detto D . $F(x, y, z) = 0$ definisce la superficie ossia ∂D . $\underline{\partial}F(\underline{x}) = 2(x, y, z) \neq \underline{0}$ per ogni $\underline{x} \in \partial D$ e quindi l'interno della sfera è un aperto regolare.

Si ha il seguente

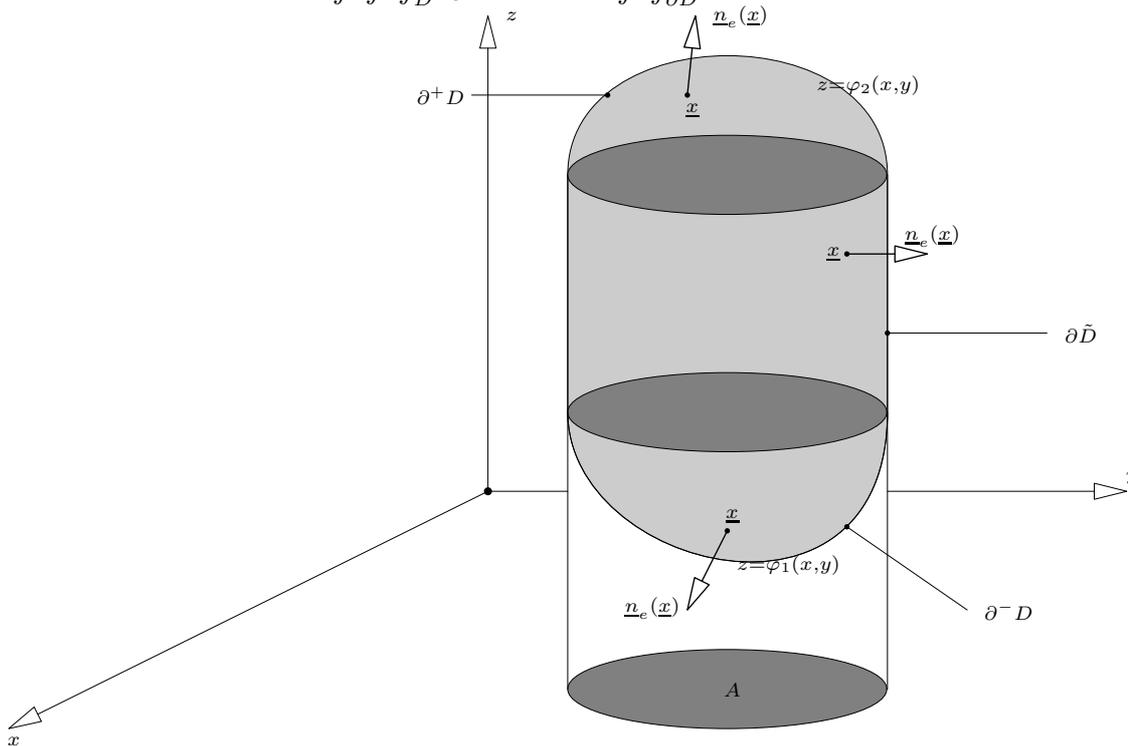
Teorema 8.7 (di Gauss) Sia D un aperto regolare limitato e sia $\underline{V}(\underline{x})$ un campo vettoriale di classe C^1 in un aperto E contenente \overline{D} . Allora $\int \int \int_D div(\underline{V}) dx dy dz = \int \int_{\partial D} (\underline{n}_e(\underline{x}), \underline{V}(\underline{x})) d\sigma$

Dimostrazione Omessa

La dimostrazione richiederebbe un certo lavoro analogo a quello necessario per dimostrare il Lemma di Gauss–Green nella sua formulazione più generale ossia con la frontiera regolare a tratti e non necessariamente normale rispetto ad ambedue gli assi. Per questo motivo viene omessa. La dimostrazione con la frontiera di D normale è molto più semplice.

Consideriamo $n = 3$ e il caso in cui D sia un insieme normale rispetto all'asse z . Quindi $D = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3 : \varphi_1(x, y) \leq z \leq \varphi_2(x, y), (x, y) \in A\}$. A è un aperto connesso e φ_1, φ_2 sono funzioni $C^1(\overline{A})$

Teorema 8.8 Abbiamo $\int \int \int_D \frac{\partial V_3}{\partial z} dx dy dz = \int \int_{\partial D} (n_e)_3(\underline{x}) V_3(\underline{x}) d\sigma;$



Dimostrazione $\int \int \int_D \frac{\partial V_3}{\partial z} dx dy dz = \int \int_A dx dy (V_3(x, y, \varphi_2(x, y)) - V_3(x, y, \varphi_1(x, y)))$

La superficie ∂D è costituita da due o più pezzi. Il primo pezzo è $\partial^+ D = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3 : z = \varphi_2(x, y), (x, y) \in A\}$. il secondo pezzo è $\partial^- D = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3 : z = \varphi_1(x, y), (x, y) \in A\}$. Il terzo pezzo è $\partial \tilde{D} \stackrel{\text{def}}{=} \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3 : \varphi_1(x, y) \leq z \leq \varphi_2(x, y) (x, y) \in \partial A\}$. $\partial^- D$ è parametrizzata come (x, y, φ_1) . $\partial^+ D$ è parametrizzata come (x, y, φ_2) . La terza componente della normale esterna a $\partial^+ D$ è $\frac{k}{\sqrt{(\varphi_2)_x^2 + (\varphi_2)_y^2}}$ mentre su $\partial^- D$ è

$\frac{-k}{\sqrt{(\varphi_1)_x^2 + (\varphi_1)_y^2}}$. Su $\partial \tilde{D}$ la terza componente è nulla. Si capisce quindi che $\int \int_{\partial D} (n_e)_3(\underline{x}) V_3(\underline{x}) d\sigma = \int \int_A V_3(x, y, \varphi_2(x, y)) dx dy - \int \int_A V_3(x, y, \varphi_1(x, y)) dx dy$ ossia il risultato. ■

Osservazioni i) Il teorema continua a valere in un insieme aperto la cui frontiera è l'unione di superfici regolari la cui intersezione ha misura nulla. Ad esempio si consideri l'insieme definito da $x^2 + y^2 + z^2 < r^2$ e $z > 0$. La superficie $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ è regolare per quanto detto prima e la superficie $z = 0$ pure è regolare.^(8.9) L'intersezione delle due superfici è data dall'insieme $x^2 + y^2 = r^2$ che è un insieme nullo in \mathbb{R}^3 (anche in \mathbb{R}^2 ; non in \mathbb{R}). Infatti si può contenere l'insieme in questione in un'unico parallelepipedo le cui basi sono rispettivamente i quadrati di lato $2r$, centrati nell'origine ed ad altezze rispettivamente ε e $-\varepsilon$. Il volume del parallelepipedo è evidentemente $8r^2\varepsilon$ che tende a zero quando ε tende a zero. ii) se D è normale, ad esempio, rispetto all'asse delle x , si ha $\int \int \int_D \frac{\partial V_1}{\partial x} dx dy dz = \int \int_{\partial D} (n_e)_1(\underline{x}) V_1(\underline{x}) d\sigma;$ e se è normale rispetto all'asse delle y si ha $\int \int \int_D \frac{\partial V_2}{\partial y} dx dy dz = \int \int_{\partial D} (n_e)_2(\underline{x}) V_2(\underline{x}) d\sigma.$ Se è normale rispetto a tutti e tre gli assi vale il Teorema 8.7.

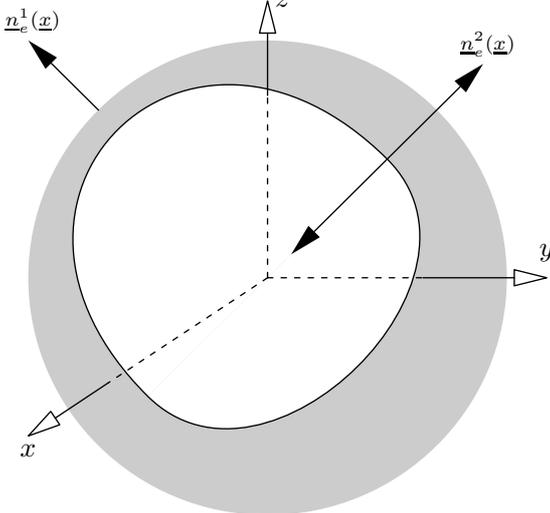
(8.9) Infatti la parametrizzazione della superficie è la seguente $x=u, y=v, z=0$. Sia $\varphi(u,v) \stackrel{\text{def}}{=} (u,v,0)$. Le condizioni della regolarità della superficie sono rispettate.

Corollario 8.1 Siano dati due aperti regolari D_1 e D_2 tali che $\overline{D_2} \subset D_1$. Sia dato il campo vettoriale

$$\underline{V}(\underline{x}) = \sum_{i=1}^3 V_i(\underline{x})\underline{e}_i, \quad \underline{V} \in C^1(\mathbb{R}^3) \text{ tale che } \operatorname{div}\underline{V} \equiv 0. \text{ Siano } \underline{n}_e^1 \text{ e } \underline{n}_e^2 \text{ le normali esterne delle regioni}$$

racchiuse da D_1 e D_2 . Allora abbiamo $\int \int_{\partial D_1} (\underline{V}, \underline{n}_e^1) d\sigma = \int \int_{\partial D_2} (\underline{V}, \underline{n}_e^2) d\sigma$.

Dimostrazione Sia $\underline{\nu}$ la normale esterna della regione compresa fra D_1 e D_2 che chiamiamo D_3 . Dal Teorema di Gauss abbiamo $\int \int_{D_3} \operatorname{div}\underline{V} dx dy dz = 0 = \int \int_{\partial D_3} (\underline{V}, \underline{\nu}) d\sigma$. $\int \int_{\partial D_3} (\underline{V}, \underline{\nu}) d\sigma = \int \int_{\partial D_1} (\underline{V}, \underline{n}_e^1) d\sigma - \int \int_{\partial D_2} (\underline{V}, \underline{n}_e^2) d\sigma = 0$ da cui il risultato. ■



Esempi – Applicazioni

Una applicazione molto significativa la si ha con il campo elettrico e/o gravitazionale.

- Sia data una sfera di raggio R con al centro una carica elettrica $q > 0$. Il campo elettrico in un punto dello spazio $\underline{r} = (x, y, z)$ è dato da $\underline{E} = q \frac{\underline{r}}{\|\underline{r}\|^3}$. \underline{E} è uguale in modulo in tutti i punti della sfera ed è diretto radialmente. Inoltre detta \underline{n} la normale esterna alla sfera si ha $\underline{r} = \|\underline{r}\|\underline{n}$ da cui $\int \int_S \underline{E} \cdot \underline{n} d\sigma = \frac{q}{R^2} 4\pi R^2 = 4\pi q$. Sia ora Σ una qualsiasi superficie chiusa contenente l'origine. Dal Teorema di Gauss sappiamo che il flusso uscente da Σ è $4\pi q$. Infatti sia S_R una sfera contenente Σ . Nella regione fra Σ e S_R si ha $\operatorname{div}\underline{E} = 0$ e quindi il risultato che non dipende dalla forma di Σ .

- Si calcoli il campo elettrico generato da una sfera carica, avente densità superficiale δ costante, in un punto interno

Sia R il raggio della sfera carica S_R . Sia S_r la sfera di raggio $R > r$. Per il Teorema di Gauss e per ragioni di simmetria, il flusso uscente da una superficie di raggio r è pari a $4\pi q$ dove q è la carica contenuta nella sfera S_r , che è nulla. Ne segue che il campo all'interno è nullo

- (1) Si consideri la sfera $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ elettricamente carica in modo omogeneo (densità superficiale costante δ). Si calcoli il potenziale in un punto esterno della sfera ed un punto interno. Successivamente si calcoli il potenziale generato dalla sfera piena $x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2$ e densità di volume costante δ . (2) Si consideri il guscio sferico definito da $r^2 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ e carico con densità volumetrica costante δ . Si calcoli il potenziale in un punto \underline{x} tale che $\|\underline{x}\| \geq R$, $r < \|\underline{x}\| < R$ e $\|\underline{x}\| \leq r$.

Dagli *esercizi in rete*, capitolo 8.1, studiare **4.8.1–7.8.1, 10.8.1, 11.8.1, 13.8.1, 24.8.1, 28.8.1, 29.8.1**,

32.8.1, 34.8.1, 38.8.1, 43.8.1, 53.8.1, 54.8.1

Da [BPS1] studiare gli esempi ed esercizi fra le pagine 485 e 500 oppure da pag. 543–558 di [BPS2].

Potenziale vettore

Sappiamo che se un campo vettoriale ha il rotore nullo è possibile trovarne un potenziale (almeno nelle regioni in cui il campo ammette circuitazione nulla su ogni curva chiusa). Ciò nasce dal fatto che il rotore di un gradiente è sempre uguale a zero. Supponiamo ora di avere un campo vettoriale

$$\underline{V}(\underline{x}) = \sum_{k=1}^3 V_k(\underline{x})\underline{e}_k \text{ tale che } \operatorname{div}\underline{V} \equiv 0. \text{ Essendo } \operatorname{div}\operatorname{rot}\underline{H} = 0, \text{ ci si pone la domanda se per caso sia vera}$$

la relazione $\underline{V} = \operatorname{rot}\underline{H}$ per un qualche campo vettoriale \underline{H} . Sotto opportune condizioni sul dominio la risposta è sì ma la semplice connessione non basta come mostra il caso del campo gravitazionale.

• Sia dato l'insieme semplicemente connesso $A = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\underline{0}\}\}$. $\underline{V}(\underline{x}) = \sum_{k=1}^3 \frac{x_k \underline{e}_k}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{3/2}}$ (si può scrivere anche come $\underline{V}(\underline{x}) = \frac{\underline{x}}{\|\underline{x}\|^3}$). Si può verificare che $\operatorname{div}\underline{V} = 0$. Consideriamo la sfera di equazione

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \text{ e la curva evidenziata che è data da } z = z_0, \text{ e } x = \sqrt{1 - z_0^2} \cos \vartheta, y = \sqrt{1 - z_0^2} \sin \vartheta.$$

Sia S_{z_0} la superficie $x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \leq z_0$, e $\underline{\gamma}(t)$ la parametrizzazione della curva. Se fosse vera

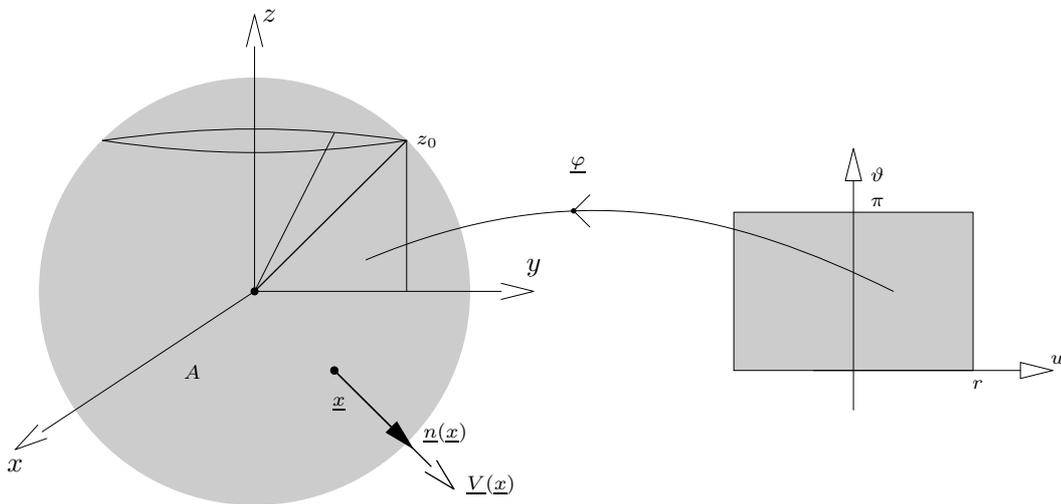
la equazione $\underline{V} = \operatorname{rot}\underline{H}$, per il teorema di Stokes, avremmo che l'integrale curvilineo $\oint_{\underline{\gamma}} \sum_{i=1}^3 H_i(\underline{x}) dx_i$

è uguale a $\int \int_{S_{z_0}} (\underline{V}(\underline{x}), \underline{n}) d\sigma$. Il campo vettoriale $\underline{H}(\underline{x})$ è limitato sulla curva $\underline{\gamma}$ e quindi, per $z_0 \rightarrow 1$

l'integrale curvilineo tende a zero. D'altra parte per $z_0 \rightarrow 1$, la superficie S_{z_0} tende all'intera sfera e

$$\text{quindi } \int \int_{S_{z_0}} (\underline{V}(\underline{x}), \underline{n}) d\sigma \text{ tende a } \int \int_S \frac{\underline{x}}{\|\underline{x}\|^3} \cdot \frac{\underline{x}}{\|\underline{x}\|} d\sigma = \int \int_S \frac{d\sigma}{\|\underline{x}\|^2} = \frac{1}{r^2} \int \int_S d\sigma = 4\pi \frac{r^2}{r^2} = 4\pi, \text{ una}$$

palese contraddizione. L'unico modo per evitare la contraddizione è dire che non si ha $\underline{V} = \operatorname{rot}\underline{H}$.



La condizione sufficiente perché dalla relazione $\operatorname{div}\underline{V} \equiv 0$ si possa dire che $\underline{V} = \operatorname{rot}\underline{H}$ è che l'insieme su cui si vuole vera la relazione sia *fortemente connesso*. Un insieme connesso $A \subset \mathbb{R}^3$ si dice *fortemente connesso* se qualunque superficie chiusa regolare $\Sigma \subset A$ è frontiera di un insieme limitato D contenuto

in A .

Da un punto di vista figurativo un insieme è fortemente connesso se qualsiasi superficie chiusa regolare contenuta in esso è frontiera di un insieme contraibile con continuità fino a ridurlo ad un punto senza mai uscire dall'insieme.

È evidente che $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ non è fortemente connesso.

Supponiamo ora di avere un campo vettoriale $\underline{V}(\underline{x})$ in un insieme fortemente connesso e $\text{div}\underline{V}(\underline{x}) \equiv 0$. Vogliamo trovare un campo vettoriale $\underline{H}(\underline{x})$ tale che $\underline{V} = \text{rot}\underline{H}$. Sia $\underline{V}(\underline{x}) = (V_1(\underline{x}), V_2(\underline{x}), V_3(\underline{x}))$.

Se esiste $\underline{H}(\underline{x}) = (H_1, H_2, H_3)$ tale che $\text{rot}\underline{H} = \underline{V}$ allora, per qualsiasi funzione $r(\underline{x})$ si ha $\text{rot}(\underline{H} + \partial r) = \underline{V}$. Se si sceglie $r(\underline{x})$ in modo tale che $r_x + H_1 \equiv 0$ allora si può supporre che la prima componente del vettore \underline{H} sia nulla e quindi si parte prendendo $\underline{H} = (0, H_2, H_3)$.

Dobbiamo risolvere l'equazione

$$\text{rot}\underline{H} = ((H_3)_y - (H_2)_z, -(H_3)_x, (H_2)_x) = (V_1, V_2, V_3)$$

da cui

$$H_3 = - \int_{x_0}^x dt V_2(t, y, z) + q(y, z), \quad H_2 = \int_{x_0}^x dt V_3(t, y, z) + p(y, z).$$

$$(H_3)_y - (H_2)_z = - \int_{x_0}^x dt (V_2)_y(t, y, z) + q_y(y, z) - \int_{x_0}^x dt (V_3)_z(t, y, z) - p_z(y, z)$$

Usando $\text{div}\underline{V}(\underline{x}) = 0$ abbiamo

$$(H_3)_y - (H_2)_z = q_y(y, z) - p_z(y, z) + \int_{x_0}^x dt (V_1)_x(t, y, z)$$

da cui

$$q_y(y, z) - p_z(y, z) + V_1(x, y, z) - V_1(x_0, y, z) = V_1(x, y, z)$$

e quindi $q_y(y, z) - p_z(y, z) - V_1(x_0, y, z) = 0$

Prendiamo $p \equiv 0$ e otteniamo $q(y, z) = \int_{y_0}^y ds V_1(x_0, s, z)$. Alla fine il risultato è $H_1 \equiv 0$, $H_2(\underline{x}) =$

$$\int_{x_0}^x dt V_3(t, y, z), \quad H_3(\underline{x}) = - \int_{x_0}^x dt V_2(t, y, z) + \int_{y_0}^y ds V_1(x_0, s, z).$$

Il campo $\underline{H}(\underline{x})$ trovato non è certo l'unico possibile. *Tutti gli altri differiscono dal precedente per un gradiente.*

Esercizi

• Si valuti l'integrale $\oint_{\gamma} \omega$ dove $\omega = \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2} + \frac{ydz-zdy}{y^2+z^2} + \frac{zdx-xdz}{z^2+x^2}$ e la curva γ è data dall'intersezione fra la sfera $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ e il piano $x + y + z = 0$ percorsa in senso antiorario.

• Sia data la forma differenziale

$$\omega = \frac{-xy^2 - x^3 - 2x^2 - x + yx^2 + y^3}{(x^2 + y^2)(x^2 + (y+1)^2)} dx + \frac{y^3 + yx^2 + 2xy + y + x^3 + xy^2 + x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)(x^2 + (y+1)^2)} dy. \text{ Si calcoli } \oint_{\gamma_+} \omega \text{ dove } \gamma_1 = \{x^2 + y^2 = 1/4\}, \gamma_2 = \{x^2 + (y+1)^2 = 1/4\}, \gamma_3 = \{x^2 + y^2 = 9\}.$$

• Sia data la forma differenziale

$$\omega = \frac{2x(4x^2 + 4y^2 - 3z)}{(-z + x^2 + y^2)(2x^2 + 2y^2 - z)} dx + \frac{2y(4x^2 + 4y^2 - 3z)}{(-z + x^2 + y^2)(2x^2 + 2y^2 - z)} dy + \frac{3x^2 + 3y^2 - 2z}{(z - x^2 - y^2)(2x^2 + 2y^2 - z)} dz$$

definita nell'insieme $x^2 + y^2 < z < 2(x^2 + y^2)$. Dire se è esatta.

9 Integrali impropri multidimensionali

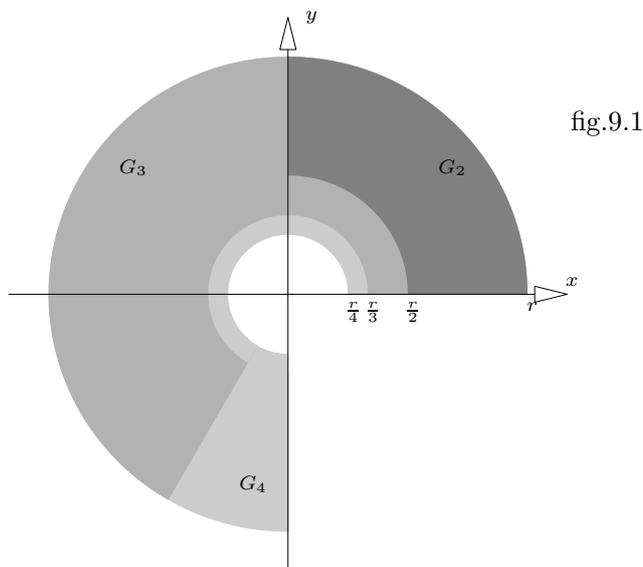
Così come per funzioni di una variabile, per funzioni di più variabili si possono definire degli integrali di funzioni illimitate e/o il cui dominio di integrazione è illimitato. Facciamo alcuni esempi. Supponiamo di voler calcolare l'integrale $\int \int_{0 < x^2 + y^2 \leq 1} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy$ laddove si vede chiaramente che la funzione è illimitata nel dominio di integrazione. Come vedremo, l'integrale si calcola eseguendo $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int \int_{\varepsilon \leq x^2 + y^2 \leq 1} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy$. A parte problemi nella legittimità della scelta nella modalità di "invasione" del cerchio di raggio 1, sappiamo benissimo che $\int \int_{\varepsilon \leq x^2 + y^2 \leq 1} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy = \int_{\varepsilon}^1 dr \int_0^{2\pi} d\vartheta \frac{r}{r} = 2\pi(1 - \varepsilon) \rightarrow 2\pi$. Se con le stesse modalità calcolassimo l'integrale $\int \int_{0 < x^2 + y^2 \leq 1} \frac{1}{x^2 + y^2} dx dy$, otterremmo $+\infty$. Nei casi precedenti abbiamo una funzione illimitata su un dominio limitato. Nel prossimo caso abbiamo una funzione limitata su di un dominio illimitato $\int \int_{x^2 + y^2 \geq 1} \frac{1}{(x^2 + y^2)^2} dx dy$. L'integrale è $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_1^R \frac{r dr}{r^4} \int_0^{2\pi} d\vartheta = \lim_{R \rightarrow +\infty} 2\pi \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{R^2}\right) = \pi$ ed invece $\int \int_{x^2 + y^2 \geq 1} \frac{1}{x^2 + y^2} dx dy = +\infty$.

Sia dato l'integrale $\int \int_{0 < x^2 + y^2 \leq 1} \frac{x}{(x^2 + y^2)^{3/2}} dx dy$ e consideriamo i seguenti insiemi $G_k = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^2: 1/k \leq \|\underline{x}\| \leq 1\}$. Osserviamo che $\int \int_{G_k} \frac{x}{x^2 + y^2} dx dy = \int_{1/k}^1 r dr \int_0^{2\pi} d\vartheta \frac{r \cos \vartheta}{r^2} = 0$ e quindi $\lim_{k \rightarrow +\infty} \int \int_{G_k} \frac{x}{(x^2 + y^2)^{3/2}} dx dy = 0$

Definiamo ora i seguenti insiemi $G_k = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^2: 0 \leq \vartheta \leq 2\pi(1 - 1/k), 1/k < r < 1\}$
 $\int \int_{G_k} \frac{x}{(x^2 + y^2)^{3/2}} dx dy = \int_{1/k}^1 dr r \int_0^{2\pi(1 - \frac{1}{k})} \frac{r \cos \vartheta}{r^3} d\vartheta = \ln k \sin \frac{2\pi}{k} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$ (vedi fig.9.1)

Se invece definiamo $G_k = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^2: 0 \leq \vartheta \leq 2\pi(1 - 1/k), e^{-k} < r < 1\}$
 $\int \int_{G_k} \frac{x}{(x^2 + y^2)^{3/2}} dx dy = \int_{e^{-k}}^1 dr r \int_0^{2\pi(1 - \frac{1}{k})} \frac{r \cos \vartheta}{r^3} d\vartheta = k \sin \frac{2\pi}{k} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 2\pi$

Si può certamente dire che l'integrale improprio $\int \int_{0 < x^2 + y^2 \leq 1} \frac{x}{(x^2 + y^2)^{3/2}} dx dy$ non esiste in quanto, a seconda di come "si invade" lo spazio, il valore del limite può cambiare.



Chiamiamo *dominio chiuso* un insieme chiuso con l'insieme dei punti interni denso.

Integrale improprio $\int_G f(\underline{x})d\underline{x}$, $G \subset \mathbb{R}^n$

Esistono tre tipi di integrali impropri.

(a) Integrale di prima specie. Sia data una funzione f *localmente limitata* in un dominio chiuso illimitato. Localmente limitata vuol dire che per ogni punto del dominio esiste un intorno nel quale la funzione è limitata. Supponiamo pure che la funzione sia *ammissibile* ossia limitata e continua a tratti su ogni insieme limitato.

Consideriamo una successione qualsiasi di domini chiusi limitati $G_1 \subset G_2 \subset G_3 \subset \dots \subset G$ che verifica la seguente condizione: per ogni sfera $B_r = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n : \|\underline{x}\| \leq r\}$, esiste un m tale che il dominio G_m (e quindi tutti i successivi) contiene l'insieme $B_r \cap G$. Una tale successione di domini si dice *esaustiva*. Gli integrali $I_m(f) \doteq \int_{G_m} f(\underline{x})d\underline{x}$ esistono essendo f ammissibile. Se per $m \rightarrow +\infty$ la successione $I_m(f)$ ha un limite finito *indipendente* dalla successione esaustiva G_m , si dice allora che l'integrale esiste (o è convergente) e per definizione si scrive $I(f) = \int_G f(\underline{x})d\underline{x} = \lim_{m \rightarrow +\infty} \int_{G_m} f(\underline{x})d\underline{x}$. Se per $m \rightarrow \infty$ gli integrali $I_m(f)$ hanno limite $\pm\infty$, si dice che l'integrale è divergente. Se gli integrali $I_m(f)$ non hanno limite oppure dipende dalla successione $\{G_k\}$ si dice che l'integrale è non-convergente.

(b) Integrale di seconda specie. Sia data una funzione illimitata in un dominio chiuso limitato (compatto) G . Supponiamo poi che la funzione sia ammissibile: esiste un insieme nullo $Z \subset G$ tale che all'esterno di ogni suo intorno la funzione è limitata e continua a tratti. Consideriamo una successione di insiemi chiusi la cui frontiera è nulla $G_1 \subset G_2 \subset \dots \subset G$. Gli insiemi sono tali che $G \setminus G_k$ contiene Z rigorosamente al suo interno e sia contenuto in un ε_k intorno dell'insieme Z ^(9.1) ed inoltre $\varepsilon_k \rightarrow 0$ per $k \rightarrow +\infty$. Una tale successione di insiemi si dice *esaustiva*. Se per $k \rightarrow +\infty$ l'integrale

(9.1) Dato un insieme $A \subset \mathbb{R}^n$, un r intorno di A è $U_r(A) = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n : \text{dist}(\underline{x}, A) < r\}$ e $\text{dist}(A) = \inf_{\underline{y} \in A} \text{dist}(\underline{x}, \underline{y})$

$I_k(f) = \int_{G_k} f(\underline{x})d\underline{x}$ ha un limite indipendente dalla successione di insiemi G_k si dice che l'integrale $I_k(f)$ converge e si indica

$$I(f) = \int_G f(\underline{x})d\underline{x} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{G_k} f(\underline{x})d\underline{x}$$

Se invece $\lim_{k \rightarrow +\infty} I_k(f) = \pm\infty$ diciamo che l'integrale è divergente. Se il limite non esiste oppure il limite dipende dalla successione $\{G_k\}$ allora l'integrale si dice non convergente.

(c) **Integrale di terza specie.** Sa data una funzione $f(\underline{x})$ in un dominio illimitato $G \subset \mathbb{R}^n$. Supponiamo che per ogni sfera B_r esista un insieme nullo Z_r tale che la funzione sia limitata e continua a tratti sulla differenza fra B_r ed un qualsiasi intorno di Z_r . Chiamiamo ammissibili tali funzioni. La definizione di integrale improprio di terza specie $I(f) = \int_G f(\underline{x})d\underline{x}$ si costruisce nel seguente modo. Definiamo *esaustiva* ogni successione $G_1 \subset G_2 \subset \dots \subset G$ di domini aventi frontiera nulla e limitati se per ogni r ed ogni $\varepsilon > 0$ esiste un k tale che il dominio G_k e quindi tutti i successivi, contiene l'insieme $B_r \cap G$ ad eccezione dell' ε -intorno dell'insieme Z_r e che se per un $r_1 > r$ tale dominio G_k è contenuto nella sfera B_{r_1} , esso non contiene né l' ε -intorno né l'insieme Z_{r_1} . Allora gli integrali $I_k(f) = \int_{G_k} f(\underline{x})d\underline{x}$ sono definiti. Se per $k \rightarrow +\infty$ questi integrali tendono ad un limite $I(f)$ indipendente dalla successione esaustiva $\{G_k\}$, si dice che l'integrale esiste (o è convergente). Se invece il limite è $\pm\infty$ allora è divergente mentre se il limite non esiste oppure dipende dalla successione $\{G_k\}$ allora l'integrale non esiste.

Nelle definizioni (a)–(c), uno dei punti basilari, è dimostrare che il valore del limite $\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{G_k} f(\underline{x})d\underline{x}$ non dipende dalla particolare successione $\{G_k\}$. Nel caso di funzioni nonnegative possiamo usare il teorema 9.1 ma prima abbiamo bisogno di un Lemma

Lemma 9.1 *Siano date due successioni $\{G_k\}$ e $\{G'_k\}$. Allora esiste una successione di indici $\{i_k\}$ tale che*

$$G_1 \subset G'_{i_1} \subset G_2 \subset G'_{i_2} \subset G_3 \subset G'_{i_3} \subset \dots \subset$$

Dimostrazione Caso (a): integrale di prima specie – funzione localmente limitata in un dominio illimitato. Evidentemente si ha $G_1 = \bigcup_{k=1}^{+\infty} G_1 \cap B_k$. Siccome G_1 è limitato, l'unione precedente è finita ossia

$$G_1 = \bigcup_{k=1}^{K_1} G_1 \cap B_k. \text{ D'altra parte } G_1 \cap B_k \subset G \cap B_k \subset G'_{j_k} \text{ per un opportuno } j_k \text{ e questo discende}$$

dalla definizione di successione esaustiva. Ne deriva $G_1 = \bigcup_{k=1}^{K_1} G_1 \cap B_k \subset \bigcup_{k=1}^{K_1} G'_{j_k}$ e quindi $G_1 \subset G'_{j_{K_1}}$

in quanto le successioni esaustive sono crescenti. Per il secondo passo scriviamo $G_2 = \bigcup_{k=1}^{K_2} G_2 \cap B_k$

ed e quindi $G_2 \subset G'_{j_{\max\{K_1, K_2\}}}$. Per concludere la dimostrazione si procede per induzione arrivando a $G_n \subset G'_{j_{\max\{K_1, K_2, K_3, \dots, K_n\}}}$. Dopo definiamo $j_n = \max\{K_1, K_2, K_3, \dots, K_n\}$ ed otteniamo la successione $\{G'_{j_k}\}$ del testo.

Caso (b). integrale di seconda specie – funzione illimitata in un dominio chiuso limitato. $G \setminus G_k \subset U_{\varepsilon_k}$ e $G \setminus G'_k \subset U_{\tilde{\varepsilon}_k}$. U_{ε_k} e $U_{\tilde{\varepsilon}_k}$ sono rispettivamente ε_1 e $\tilde{\varepsilon}_k$ intorno di Z . Sia $j_1 = \min_{k \geq 1} \{\tilde{\varepsilon}_k \leq \varepsilon_1\}$. Ne segue $G_1 \subset G'_{j_1}$. Allo stesso modo otteniamo $G_2 \subset G'_{\tilde{j}_2}$ per cui $G_2 \subset G'_{\max\{j_1, \tilde{j}_2\}} \doteq G'_{\tilde{j}_2}$. Proseguendo si arriva $G_k \subset G'_{\max\{j_1, j_2, \dots, \tilde{j}_k\}} \doteq G'_{j_k}$.

Caso (c). integrale di terza specie – funzione illimitata in un dominio chiuso illimitato. Sappiamo che per ogni r , esiste $\varepsilon > 0$ e k tale che $G_k \supset (B_r \setminus (U_\varepsilon(Z_r))) \cap G$, e che se per un $r_1 > r$, si ha $G_k \subset B_{r_1}$, esso non contiene né l' ε -intorno né l'insieme Z_{r_1} . Sappiamo poi che per ogni sfera B_r esista un insieme nullo Z_r tale che la funzione sia limitata e continua a tratti sulla differenza fra B_r ed un qualsiasi intorno di Z_r . Sia quindi $\{\varepsilon_k\}$ una successione tale che $f(\underline{x})$ è limitata e continua su $B_r \setminus U_{\varepsilon_k}(Z_k)$. Siccome

$B_1 \subset G$, ed è limitato, si ha $G_1 = \bigcup_{k=1}^{K_1} G_1 \cap B_k \setminus U_{\varepsilon_k}(Z_k) \subset \bigcup_{k=1}^{K_1} G \cap B_k \setminus U_{\varepsilon_k}(Z_k)$. Ma dalla definizione di

successione esaustiva sappiamo che $G \cap B_k \setminus U_{\varepsilon_k}(Z_k) \subset G'_{j_k}$ e quindi data la crescita della successione esaustiva, si ha $G_1 \subset G'_{j_{K_1}}$. Ripetiamo per induzione il ragionamento ed otteniamo il risultato.

Abbiamo il Teorema

Teorema 9.1 *Se la funzione in (a)–(c) è pure nonnegativa $f \geq 0$, allora l'esistenza del limite*

$\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{G_k} f(\underline{x}) d\underline{x}$ *per una particolare successione, implica l'esistenza del limite per ogni successione ed i limiti sono uguali*

Dimostrazione Per ipotesi sappiamo che $\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{G_k} f(\underline{x}) d\underline{x} = L < +\infty$. Dal Lemma 9.1 abbiamo

$\int_{G_k} f \leq \int_{G_{i_k}} f \leq \int_{g_{k+1}} f$ e quindi, dal teorema del confronto, $\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{G'_{i_k}} f(\underline{x}) d\underline{x} = L$. Ora la successione $\{I_{G'_k} f\}$ è non decrescente essendo $f \geq 0$ e $\{G'_k\}$ una successione esaustiva. È quindi convergente.

Essendo la sottosuccessione $\int_{G_{i_k}} f$ convergente ad L , anche $\int_{G'_k} f$ converge ad L .

Corollario 9.1 *Se f e g sono due funzioni ammissibili sul dominio G e se $f(\underline{x}) \leq g(\underline{x})$ allora se esiste l'integrale g esiste pure l'integrale di f ed inoltre $I(f) \leq I(g)$. Inoltre se $I(f) = +\infty$ allora $I(g) = +\infty$.*

Dimostrazione Ovvvia.

Corollario 9.2 *Se $f(\underline{x})$ è una funzione ammissibile non negativa e se $I(f) = I_G(f)$ è convergente, allora l'integrale $I_Q f$ su ogni dominio $Q \subset G$ è convergente anche esso e si ha $I_Q(f) \leq I_G(f)$.*

Dimostrazione Detta χ_Q la funzione caratteristica del dominio Q , allora la funzione $f(\underline{x})\chi_Q$ è ammissibile e soddisfa la disuguaglianza $0 \leq f(\underline{x})\chi_Q \leq f(\underline{x})$ e quindi $I_G(f\chi_Q) = I_Q(f) \leq I_G(f)$

Corollario 9.3 *Se $f(\underline{x})$ è una funzione ammissibile non negativa e se $I(f) = I_Q f = +\infty$ allora $I_G(f) = +\infty$ per ogni dominio $G \supset Q$.*

Dimostrazione Ovvvia.

Corollario 9.4 *Se per una funzione $f(\underline{x}) \geq 0$ ammissibile gli integrali $I_{G'}(f)$ e $I_{G''}(f)$ esistono, allora esiste pure l'integrale $I_{G' \cup G''}(f)$*

Dimostrazione Se prendiamo $G'' \setminus G'$ allora possiamo supporre $G' \cap G'' = \emptyset$. Sia $\{G'_m\}$ e $\{G''_m\}$ due successioni esaustive rispettivamente di G' e G'' . Sappiamo che esistono $\lim_{m \rightarrow +\infty} \int_{G'_m} f(\underline{x}) d\underline{x}$ e $\lim_{m \rightarrow +\infty} \int_{G''_m} f(\underline{x}) d\underline{x}$ e che essendo G' e G'' disgiunti, $\int_{G''_m} f(\underline{x}) d\underline{x} + \int_{G'_m} f(\underline{x}) d\underline{x} = \int_{G''_m \cup G'_m} f(\underline{x}) d\underline{x}$. Ne segue che esiste pure il limite $\lim_{m \rightarrow +\infty} \int_{G''_m \cup G'_m} f(\underline{x}) d\underline{x}$ ed essendo $\{G'_m \cup G''_m\}$ una successione esaustiva di $G' \cup G''$, se ne conclude che esiste anche $\int_{G' \cup G''} f(\underline{x}) d\underline{x}$.

Corollario 9.5; principio di localizzazione Sia data una funzione $f(\underline{x}) \geq 0$ ammissibile ed illimitata nel dominio chiuso e limitato $G \subset \mathbb{R}^n$. Se per ogni punto $p \in G$ esiste un intorno $B_r(p)$ in cui $I_{B_r(p)}(f)$ è convergente, allora $I_G(f)$ è convergente. Se invece esiste un punto ed un intorno $B_r(p)$ tale che $I_{B_r(p)}(f)$ non esiste (nel senso che vale $+\infty$), allora non esiste neppure $I_G(f)$.

Dimostrazione Supponiamo che per ogni punto p esiste una sfera $B_r(p)$ tale che $I_{B_r(p)}(f)$ esiste. Siccome G è compatto, esiste un numero finito di punti p_1, \dots, p_m ed aperti $B_{r_1}(p_1), \dots, B_{r_m}(p_m)$ tali che $G \subset B_{r_1}(p_1) \cup \dots \cup B_{r_m}(p_m)$. Dal corollario 9.4 concludiamo che esiste pure l'integrale $I_{\cup_{k=1}^m B_{r_k}(p_k)}(f)$ e quindi l'integrale $I_G(f)$. Viceversa supponiamo che $\int_{B_{r_k}(p_k)}(f)$ non esista, allora dal Corollario 9.2 non esiste neppure l'integrale $\int_G(f)$.

Teorema 9.2 Sia $f(\underline{x})$ una funzione ammissibile data su di un dominio $G \subset \mathbb{R}^n$. Supponiamo che esista una funzione $g(\underline{x}) \geq 0$ il cui integrale $I_G(g)$ è convergente e tale che $0 \leq |f(\underline{x})| \leq g(\underline{x})$. Allora le funzioni $f(\underline{x})$ e $|f(\underline{x})|$ sono pure integrabili e $\left| \int_G f(\underline{x}) d\underline{x} \right| \leq \int_G |f(\underline{x})| d\underline{x} \leq \int_G g(\underline{x}) d\underline{x}$

Dimostrazione Sia $f_+ = \frac{1}{2}(f + |f|)$, $f_- = \frac{1}{2}(f - |f|)$. The function f_+ is nonnegative and $|f_+| \leq |f| \leq g$ and also the function $-f_-$ is nonnegative with the same upper bound. It follows by Corollary 9.1 that they are both integrable. Moreover $\left| \int_G f(\underline{x}) d\underline{x} \right| = \frac{1}{2} \left| \int_G (f_+(\underline{x}) + f_-(\underline{x})) d\underline{x} \right| = \frac{1}{4} \left| \int_G (f(\underline{x}) + |f(\underline{x})| + |f(\underline{x})| - f(\underline{x})) d\underline{x} \right| \leq \frac{1}{4} \int_G 4|f(\underline{x})| d\underline{x} = \int_G |f(\underline{x})| d\underline{x} \leq \int_G g(\underline{x}) d\underline{x}$ ■

Tutti sanno che $\int_0^1 \frac{1}{t} \sin \frac{1}{t} dt$ è un integrale improprio convergente e che $\int_0^1 \frac{1}{t} |\sin \frac{1}{t}| dt = +\infty$. Se ne deduce che in una dimensione, la convergenza semplice non implica la convergenza assoluta. Tale possibilità è preclusa in due o più dimensioni. Precisamente abbiamo il teorema

Teorema 9.3 Per funzioni di tipo **b)**, se un integrale converge semplicemente, converge assolutamente.

Dimostrazione Ragioniamo per assurdo supponendo che $\int \int_G f(\underline{x}) d\underline{x}$ sia convergente e $\int \int_G |f(\underline{x})| d\underline{x}$ divergente. Sia $\{S_n\}$ una successione di insiemi tali che $S_1 \supset S_2 \supset S_3 \supset \dots$ e $dist(S_n, Z) \rightarrow 0$ per $n \rightarrow \infty$. Inoltre supponiamo che $S_n \supset Z$ per ogni n . Chiaramente $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int \int_{G \setminus S_n} |f(\underline{x})| d\underline{x} = +\infty$ e $\int \int_{G \setminus S_{n+1}} |f(\underline{x})| d\underline{x} = \int \int_{G \setminus S_n} |f(\underline{x})| d\underline{x} + \int \int_{S_n \setminus S_{n+1}} |f(\underline{x})| d\underline{x}$. La successione $\{S_n\}$ può essere

scelta in modo che $\int \int_{S_n \setminus S_{n+1}} |f(\underline{x})| d\underline{x} \geq 2 \int \int_{G \setminus S_n} |f(\underline{x})| d\underline{x} + 2n$, $n = 1, 2, \dots$. Siano come al solito $f_+ = \frac{1}{2}(|f(\underline{x})| + f(\underline{x}))$, e $f_- = \frac{1}{2}(|f(\underline{x})| - f(\underline{x}))$, da cui $f = f_+ - f_-$ e $|f| = f_+ + f_-$. $\int \int_{S_n \setminus S_{n+1}} |f(\underline{x})| d\underline{x} = \int \int_{S_n \setminus S_{n+1}} f_+(\underline{x}) d\underline{x} + \int \int_{S_n \setminus S_{n+1}} f_-(\underline{x}) d\underline{x}$. La successione $\{S_n\}$ si può scegliere in modo che $\int \int_{S_n \setminus S_{n+1}} f_+(\underline{x}) d\underline{x} \geq \int \int_{S_n \setminus S_{n+1}} f_-(\underline{x}) d\underline{x}$. Eventualmente si passa ad una sottosuccessione di $\{S_n\}$ oppure a $-f(\underline{x})$ al posto di $f(\underline{x})$. Ne segue che

$$\begin{aligned} 2 \int \int_{S_n \setminus S_{n+1}} f_+(\underline{x}) d\underline{x} &\geq \int \int_{S_n \setminus S_{n+1}} f_+(\underline{x}) d\underline{x} + \int \int_{S_n \setminus S_{n+1}} f_-(\underline{x}) d\underline{x} = \int \int_{S_n \setminus S_{n+1}} |f(\underline{x})| d\underline{x} \geq \\ &\geq 2 \int \int_{G \setminus S_n} |f(\underline{x})| d\underline{x} + 2n \end{aligned}$$

e quindi

$$\int \int_{S_n \setminus S_{n+1}} f_+(\underline{x}) d\underline{x} \geq \int \int_{G \setminus S_n} |f(\underline{x})| d\underline{x} + n$$

Ora suddividiamo l'insieme $S_n \setminus S_{n+1}$ in celle $\{Q_i\}_{i=1, \dots, r}$ e formiamo la somma integrale inferiore

$\sum_{Q_i \in S_n \setminus S_{n+1}} m_i^{f_+} |Q_i|$ e togliamo dalla somma quei termini per cui $m_i^{f_+} = 0$. Sia Ω_n ciò che rimane

di $S_n \setminus S_{n+1}$ dopo l'eliminazione. Per definizione di f_+ , in Ω_n si ha $f(\underline{x}) = |f(\underline{x})|$ ossia $f(\underline{x}) \geq 0$. Ne segue

$$\int \int_{\Omega_n} f(\underline{x}) d\underline{x} = \int \int_{\Omega_n} f_+(\underline{x}) d\underline{x} \geq \sum_{Q_i \in S_n \setminus S_{n+1}} m_i^{f_+} |Q_i| > \int \int_{G \setminus S_n} f(\underline{x}) d\underline{x} + n$$

Inoltre è evidente che

$$\int \int_{G \setminus S_n} f(\underline{x}) d\underline{x} \geq - \int \int_{G \setminus S_n} |f(\underline{x})| d\underline{x}$$

Sommando si ha

$$\int \int_{\Omega_n} f(\underline{x}) d\underline{x} + \int \int_{G \setminus S_n} f(\underline{x}) d\underline{x} = \int \int_{(G \setminus S_n) \cup \Omega_n} f(\underline{x}) d\underline{x} > n$$

Siccome $(G \setminus S_n) \cup \Omega_n$ si stringe all'insieme Z quando n tende a infinito, ne seguirebbe che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int \int_{(G \setminus S_n) \cup \Omega_n} f(\underline{x}) d\underline{x} = +\infty$$

ossia $f(\underline{x})$ non è integrabile in senso improprio e questo contraddice l'ipotesi \blacksquare

Una conseguenza importante del teorema è che se abbiamo una funzione che nel dominio di integrazione non ha segno definito, possiamo passare al suo modulo e studiarne l'integrabilità impropria. Grazie ai teoremi 9.2 e 9.3, il risultato che si ottiene si applica anche alla funzione senza modulo.

Esempi Sia data la funzione $f(r): [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $a > 0$, continua a tratti su ogni intervallo $a \leq$

$r \leq b$. Poniamo $r = \|\underline{x}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$ ed otteniamo una funzione su \mathbb{R}^n con $\|\underline{x}\| \geq a$ che definiamo

$F(\underline{x}) \doteq f(r)\Big|_{r=\|\underline{x}\|}$. Sia $G = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n: \|\underline{x}\| \geq a, \frac{\underline{x}}{\|\underline{x}\|} \in \Sigma\}$ dove Σ è un dato insieme di area positiva

sulla sfera unitaria n -dimensionale. Vogliamo calcolare $\int_G F(\underline{x})d\underline{x}$. Definiamo $G_m = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n: m \geq$

$\|\underline{x}\| \geq a, \frac{\underline{x}}{\|\underline{x}\|} \in \Sigma\}$ e calcoliamo $\int_{G_m} F(\underline{x})d\underline{x}$ che è un integrale di prima specie. Fissiamo il valore

della variabile $x_n \in [a, m]$ ed integriamo per “gusci” $\int_{G_m} F(\underline{x})d\underline{x} = \int_a^m dr f(r) S_r^{(n)}(\Sigma)$ dove $S_r^{(n)}(\Sigma)$

è l’area della porzione di superficie che giace sulla sfera $n - 1$ -dimensionale di raggio r . Chiaramente

$S_r^{(n)}(\Sigma) = r^{n-1}|\Sigma|$ e quindi l’integrale è $\int_a^m dr f(r) S_r^{(n)}(\Sigma) = |\Sigma| \int_a^m dr f(r) r^{n-1}$ da cui si vede che

esso si riduce alla convergenza del limite $\lim_{m \rightarrow +\infty} \int_a^m dr f(r) r^{n-1}$.

(a). Tipico è il caso $f(r) = r^{-c}$. Se $c > n$ l’integrale converge ma se $c \leq n$ diverge.

(b). Se $f(r): (0, b] \rightarrow \mathbb{R}$, continua a tratti su ogni intervallo $0 < r \leq b$ definiamo $G_m = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n: 1/m \leq$

$\|\underline{x}\| \leq b, \frac{\underline{x}}{\|\underline{x}\|} \in \Sigma\}$ ed abbiamo un integrale di seconda specie. Rifacendo gli stessi calcoli arriviamo a

$|\Sigma| \lim_{m \rightarrow +\infty} \int_{1/m}^b dr f(r) r^{n-1}$. Se $f(r) = r^{-c}$ allora diverge per $c \geq n$ e converge se $c < n$.

(c). Se $f(r) = r^{-c}$ e consideriamo la funzione per $r > 0$, l’intergrale di terza specie $\int_G F(\underline{x})d\underline{x}$ con

• Sia dato l’integrale $\int \int_G \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx dy$ dove $G = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^2: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x$. Passiamo a coordinate polari $x = r \cos t, y = r \sin t$ con $0 \leq t \leq \pi/4$, e $0 \leq r \leq 1/\cos t$. In-

oltre prendiamo $G_m = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^2: \underline{x} \in G, r \geq 1/m\}$ ed otteniamo $\int \int_{G_m} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx dy =$

$\int_0^{\pi/4} \int_{1/m}^{1/\cos t} \frac{\cos(2t)}{r} dr = \int_0^{\pi/4} \cos(2t)(-\ln \cos t + \ln m) dt$. L’integrale $\int_0^{\pi/4} \cos(2t) \ln \cos t dt$ è con-

vergente mentre $\lim_{m \rightarrow +\infty} \int_0^{\pi/4} \cos(2t) \ln m dt = \infty$.

• Sia dato l’integrale $\int \int_G \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx dy$ dove $G = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^2: x \geq 1, 1 \leq y \leq x$. Passiamo a coordi-

nate polari $x = 1 + r \cos t, y = 1 + r \sin t$ con $0 \leq t \leq \pi/4$, e $r \geq 0$. Inoltre prendiamo $G_m = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^2: \underline{x} \in$

$G, r \leq m\}$ ed otteniamo $\int \int_{G_m} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx dy = \int_0^{\pi/4} \int_0^m r \frac{r^2 \cos(2t) + 2r(\cos t - \sin t)}{(3 + 2r^2(\sin t + \cos t))^2} dr \geq$

$$\int_0^{\pi/4} \int_0^m r^3 \frac{\cos(2t) + \frac{2}{r}(\cos t - \sin t)}{(3 + 4r^2)^2} dr \quad (\text{si è usato il fatto che se } 0 \leq t \leq \pi/4 \text{ allora } \cos t - \sin t \geq 0).$$

Siccome $\lim_{m \rightarrow +\infty} \int_0^{\pi/4} \int_0^m r^3 \frac{\cos(2t)}{(3 + 4r^2)^2} dr = +\infty$ e l'altro integrale non può modificare tale fatto essendo depresso di un fattore pari a r .

• Sia dato l'integrale $\int \int_G \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx dy$ dove $G = \{x \in \mathbb{R}^2 : x \geq 1, 0 \leq y \leq 1\}$. Scriviamo l'integrale

come $\int \int_G \left(\frac{1}{x^2 + y^2} - \frac{2y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right) dx dy$. Definiamo $G_m = \{x \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq m, 0 \leq y \leq 1\}$

ed otteniamo $\int \int_{G_m} \left(\frac{1}{x^2 + y^2} - \frac{2y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right) dx dy = \int \int_{G_m} \frac{1}{x^2 + y^2} dx dy - \int \int_{G_m} \frac{2y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx dy$.

$$\int \int_{G_m} \frac{1}{x^2 + y^2} dx dy = \int_1^m dx \int_0^1 dy \frac{1}{x^2 + y^2} dx dy = \int_1^m dx \frac{1}{x} \arctan \frac{y}{x} \Big|_{y=0}^{y=1} = \int_1^m \frac{1}{x} \arctan \frac{1}{x} dx \doteq I_m.$$

La successione $\{I_m\}$ è positiva crescente limitata in quanto $I_m \leq \int_1^m \frac{1}{x} \frac{1}{x} dx = 1 - \frac{1}{m} < 1$. Ne

segue che esiste il limite $m \rightarrow +\infty$. Non essendo interessati al valore specifico ma solo alla convergenza dell'integrale si poteva pure maggiorare

$$\int_1^m dx \int_0^1 dy \frac{1}{x^2 + y^2} \leq \int_1^m dx \int_0^1 dy \frac{1}{x^2} = 1 - \frac{1}{m}.$$

Nell'integrale $\int \int_{G_m} \frac{2y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx dy$ maggioriamo con $\int_0^1 dy \int_1^m dx \frac{2}{x^4}$ ed abbiamo pure qui la convergenza.

Osservazione Come si può notare, il precedente integrale converge ma quello prima diverge sebbene ambedue vengano calcolati su di un dominio infinito (nell'ultimo caso solo per $x \rightarrow +\infty$). Si cerchi di spiegare tale apparente contraddizione.

Impostiamo in coordinate polari $x = r \cos t, y = r \sin t$ $\int \int_G \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx dy$ dove $G = \{x \in \mathbb{R}^2 : x \geq 1, 0 \leq y \leq 1\}$. Sia $G_1 = G \cap \{x \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq \sqrt{2}, x^2 + y^2 \leq 1\}$ e $G_2 = G \setminus G_1$. L'integrale su

G_1 è chiaramente finito e quello su G_2 è $\int_{\sqrt{2}}^{+\infty} dr \int_0^{\arcsin \frac{1}{r}} \frac{r^2 \cos(2t)}{r^4} r dt = \frac{1}{2} \int_{\sqrt{2}}^{+\infty} \frac{dr}{r} \frac{2}{r} \sqrt{1 - \frac{1}{r^2}}$ e

chiaramente converge. La differenza con l'integrale su $G = \{x \in \mathbb{R}^2 : x \geq 1, 1 \leq y \leq x\}$ consiste nel fatto che se $r \rightarrow +\infty$, in questo caso $\arcsin(1/r)$ tende a zero mentre prima si aveva $0 \leq t \leq \pi/4$.

• Dire se sono integrabili le funzioni $f(x, y) = 1/(x + y)$ e $f(x, y) = y/(x + y)$ nell'insieme $\{x \in \mathbb{R}^2 : x \geq 1, y \leq 1/x^2\}$ ed eventualmente calcolare l'integrale.

$$\int \int_D \frac{1}{x + y} dx dy = \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_1^a dx \int_0^{\frac{1}{x^2}} \frac{dy}{x + y} = \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_1^a dx \left(\ln(x + \frac{1}{x^2}) - \ln x \right) = \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_1^a dx \ln(1 + \frac{1}{x^3}) = \int_1^{+\infty} dx \ln(1 + \frac{1}{x^3})$$

e tale integrale improprio è convergente. Si può anche calcolare integrando per parti ed ottenere $2\pi/\sqrt{3}$

$$\int \int_D \frac{y}{x+y} dx dy = \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_1^a dx \int_0^{\frac{1}{x^2}} \frac{y}{x+y} dy = \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_1^a dx \int_0^{\frac{1}{x^2}} \left(1 - \frac{1}{x+y}\right) dy =$$

$$= \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_1^a dx \left(\frac{1}{x^2} - \ln\left(x + \frac{1}{x^2}\right) + \ln x \right)$$

e chiaramente converge.

- Dire se converge l'integrale $\int \int_D \frac{1}{x+y} dx dy$ dove $\{\underline{x} \in \mathbb{R}^2: x \leq 0, y \geq -x, (x^2 + y^2)^{\frac{5}{2}} \leq (x^2 - y^2)^2\}$. In coordinate polari l'integrale diventa $\int_{\pi/2}^{3\pi/4} dt \int_0^{\cos^2(2t)} \frac{r}{r(\cos t + \sin t)} dr = \int_{\pi/2}^{3\pi/4} dt (\cos t - \sin t)^2 (\cos t + \sin t) = \frac{2}{3}\sqrt{2} - \frac{1}{3}$

- Dire se la funzione e^{-xy^2} è integrabile nel semipiano $x \geq 0$. Prendiamo la successione $\{D_k\}$ dove $D_k = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^2: 0 \leq x \leq k, -k \leq y \leq k\}$. Chiaramente $\{D_k\}$ invade l'insieme di definizione.

$$\int \int_{D_k} e^{-xy^2} dx dy = \int_{-k}^k dy \int_0^k dx e^{-xy^2} = \int_{-k}^k dy \frac{1 - e^{-ky^2}}{y^2}$$

Poi poniamo $\sqrt{ky} = t$ e l'integrale diventa $\int_{-k^{3/2}}^{k^{3/2}} \frac{1 - e^{-t^2}}{t^2} \sqrt{k} dt \rightarrow +\infty$ per $k \rightarrow +\infty$. Infatti l'integrale è $\int_{-1}^1 \frac{1 - e^{-t^2}}{t^2} \sqrt{k} dt + \int_{1 \leq |x| \leq k^{3/2}} \frac{1 - e^{-t^2}}{t^2} \sqrt{k} dt \doteq \sqrt{k} I_1 + \sqrt{k} I_2$. Sia I_1 che I_2 sono integrali, positivi, convergenti e limitati e quindi $\sqrt{k} I_1 + \sqrt{k} I_2 \rightarrow +\infty$.

- Dire se la funzione e^{-xy^2} è integrabile nell'insieme $D = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^2: x \geq a > 0\}$. Prendiamo la successione $\{D_k\}$ dove $D_k = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^2: 0 < a \leq x \leq a+k, -k \leq y \leq k\}$. Chiaramente $\{D_k\}$ invade l'insieme di definizione.

$$\int \int_{D_k} e^{-xy^2} dx dy = \int_{-k}^k dy \int_a^{a+k} dx e^{-xy^2} = \int_{-k}^k dy \frac{e^{-ay^2} - e^{-(a+k)y^2}}{y^2} \geq \int_{-k^{-3/4}}^{k^{-3/4}} e^{-ay^2} \frac{1 - e^{-ky^2}}{y^2}$$

Per k grande abbastanza e $|y| \leq k^{-3/4}$, si ha $e^{-ky^2} \geq 1 - c(k)ky^2$ con $0 < c(k) < 1$ da cui

$$\int_{-k^{-3/4}}^{k^{-3/4}} e^{-ay^2} \frac{1 - e^{-ky^2}}{y^2} dy \geq \int_{-k^{-3/4}}^{k^{-3/4}} e^{-ay^2} \frac{c(k)ky^2}{y^2} dy \geq 2e^{-ak^{-3/4}} c(k)k k^{-3/4} = 2e^{-ak^{-3/4}} c(k)k^{1/4}$$

- Dire se la funzione e^{-xy^2} è integrabile nell'insieme $D = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^2: x \geq 0, y \geq a > 0\}$. Prendiamo la successione $\{D_k\}$ dove $D_k = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^2: 0 \leq x \leq k, a \leq y \leq a+k\}$. Chiaramente $\{D_k\}$ invade l'insieme di definizione.

$$\int \int_{D_k} e^{-xy^2} dx dy = \int_a^{a+k} dy \int_0^k dx e^{-xy^2} = \int_a^{a+k} dy \frac{1 - e^{-ky^2}}{y^2} = \sqrt{k} \int_{a\sqrt{k}}^{a\sqrt{k}+k^{3/2}} \frac{1 - e^{-t^2}}{t^2}$$

e per k grande abbastanza possiamo maggiorare ($C > 0$ grande a sufficienza)

$$\sqrt{k} \int_{a\sqrt{k}}^{a\sqrt{k}+k^{3/2}} \frac{1 - e^{-t^2}}{t^2} \leq C\sqrt{k} \int_{a\sqrt{k}}^{k^{3/2}} \frac{dt}{t^2} < +\infty$$

- Si studi l'integrabilità della funzione $\frac{1}{|x|\sqrt{|y-x|}}$ nel dominio di definizione. Questa è una funzione di tipo (c). Il dominio è $\{\underline{x} \in \mathbb{R}^3: x \neq 0, y \neq x\}$. Restringiamo il dominio alla seconda metà del primo quadrante. Se dimostriamo che non è ivi integrabile, allora non lo è in tutto il suo dominio. Sia $G_k = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^2: x = \varepsilon_k + r \cos \vartheta, y = 2\varepsilon_k + r \sin \vartheta, 0 \leq r \leq R_k, \pi/4 \leq \vartheta \leq \pi/2\}$ e $\varepsilon_k \rightarrow 0, R_k \rightarrow +\infty$. L'integrale è

$$\int_0^{R_k} dr \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{d\vartheta}{(\varepsilon_k + r \cos \vartheta)\sqrt{\varepsilon_k + r(\sin \vartheta - \cos \vartheta)}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_k}} \int_0^{R_k/\varepsilon_k} dt \int_{\pi/4}^{\pi/2} d\vartheta \frac{1}{1 + t \cos \vartheta} \frac{1}{\sqrt{1 + t(\sin \vartheta - \cos \vartheta)}} \geq$$

$$\geq \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_k}} \int_0^{1/2} dt \int_{\pi/4}^{\pi/2} d\vartheta \frac{1}{1 + \frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1 + 2t}} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} +\infty$$

- Si studi l'integrabilità della funzione $\frac{1}{|x|\sqrt{|y-x|}}, x^2 + y^2 \geq 1$, nel dominio di definizione. Stavolta prendiamo come sottoinsieme del dominio l'insieme $E = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^2: x \geq 1, y \leq x + 1/\ln x\}$. Detto $q(x) = 1/\ln x$, l'integrale su E e $X_k \rightarrow \infty$, si ha

$$\int_1^{X_k} dx \int_x^{x+q(x)} \frac{dy}{x\sqrt{y-x}} \geq \int_1^{X_k} dx \int_x^{x+q(x)} \frac{dy}{x\sqrt{q(x)}} = \int_1^{X_k} dx \frac{\sqrt{q(x)}}{x} = \int_1^{X_k} \frac{dx}{\sqrt{\ln xx}} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} +\infty$$

- Si studi l'integrabilità della funzione $\frac{1}{(x^2 + y^2)^2 \sqrt{|y-x|}}, x^2 + y^2 \geq 1$, nel dominio di definizione. Il dominio è $D = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^2: x^2 + y^2 \geq 1, y \neq x\}$ e siccome la funzione è simmetrica rispetto allo scambio fra x e y , ci basta prendere quella parte di D in cui $y > x$. Studiamo

$$\int_1^{R_k} dr \int_{-\frac{3\pi}{4} + \varepsilon_k}^{\frac{\pi}{4} - \varepsilon_k} \frac{r dr}{r^4 \sqrt{r(\sin \vartheta - \cos \vartheta)}} d\vartheta$$

Siccome l'integrale improprio $\int_{-\frac{3\pi}{4} + \varepsilon_k}^{\frac{\pi}{4} - \varepsilon_k} \frac{d\vartheta}{\sqrt{\sin \vartheta - \cos \vartheta}}$ converge, converge pure l'integrale multidimensionale.

- Sappiamo che $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$. Si dimostri se esiste o meno l'integrale $\int \int_{[0, +\infty)^2} \frac{\sin x \sin y}{x y} dx dy$

L'integrale non esiste. Definiamo $D_{k,q} = [2k\pi, 2\pi(k+1)] \times [2q\pi, 2\pi(q+1)]$. Scriviamo l'integrale come $\sum_{k,q=0}^{+\infty} \int \int_{D_{k,q}} \frac{\sin x \sin y}{x y} dx dy$. Ciascun quadrato $D_{k,q}$ si scompone in quattro quadrati $D_{k,q}^1 = [2k\pi, 2k\pi + \pi] \times [2q\pi, 2q\pi + \pi], D_{k,q}^2 = [2k\pi + \pi, 2(k+1)\pi] \times [2q\pi, 2q\pi + \pi], D_{k,q}^3 = [2k\pi, 2k\pi + \pi] \times [2q\pi + \pi, 2(q+1)\pi], D_{k,q}^4 = [2k\pi + \pi, 2(k+1)\pi] \times [2q\pi + \pi, 2(q+1)\pi]$. L'integrale diventa

$$\sum_{k,q=0}^{+\infty} \sum_{j=1}^4 \int \int_{D_{k,q}^j} \frac{\sin x}{x} \frac{\sin y}{y} dx dy. \text{ Inoltre}$$

$$\int \int_{D_{k,q}^1} \frac{\sin x}{x} \frac{\sin y}{y} dx dy \leq \frac{1}{2k\pi} \frac{1}{2q\pi} \left(\int_{2k\pi}^{\pi(2k+1)} \sin x dx \right) \left(\int_{2q\pi}^{\pi(2q+1)} \sin y dy \right) =$$

$$= \frac{4}{\pi^2} \frac{1}{4kq} = \frac{1}{kq\pi^2}$$

$$\int \int_{D_{k,q}^4} \frac{\sin x}{x} \frac{\sin y}{y} dx dy \leq \frac{4}{\pi^2} \frac{1}{(2k+1)(2q+1)}$$

$$\int \int_{D_{k,q}^2} \frac{\sin x}{x} \frac{\sin y}{y} dx dy \leq \frac{1}{2k\pi} \frac{1}{2q\pi} \left(\int_{2k\pi+\pi}^{2\pi(k+1)} \sin x dx \right) \left(\int_{2q\pi+\pi}^{2\pi(q+1)} \sin y dy \right) =$$

$$= \frac{-1}{\pi^2 kq}$$

$$\int \int_{D_{k,q}^3} \frac{\sin x}{x} \frac{\sin y}{y} dx dy \leq \frac{1}{2k\pi} \frac{1}{2q\pi} \left(\int_{2q\pi+\pi}^{2\pi(q+1)} \sin x dx \right) \left(\int_{2k\pi}^{2\pi k+\pi} \sin y dy \right) =$$

$$= \frac{-1}{kq\pi^2}$$

Sommando i quattro contributi si ottiene $-\frac{1}{4} \frac{2k+2q+1}{kq(2k+1)(2q+1)} \leq C \frac{k+q}{(k+1)^2(q+1)^2}$ per una opportuna costante C negativa. Dunque

$$\sum_{k,q=0}^{+\infty} \int \int_{D_{k,q}} \frac{\sin x}{x} \frac{\sin y}{y} dx dy \leq C \sum_{k,q=0}^{+\infty} \frac{k+q}{(k+1)^2(q+1)^2} = -\infty$$

da cui la divergenza dell'integrale. Evidentemente in questo caso si ha $\int \int_{[0,+\infty)^2} \frac{\sin x}{x} \frac{\sin y}{y} dx dy \neq$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx \int_0^{+\infty} \frac{\sin y}{y} dy = \frac{\pi^2}{4}$$

• Sia data la funzione $f(x, y) = \frac{1}{(x^2+y^2)^a}$ definita nell'insieme $H \cup K$ dove $H = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^2: x^2 + y^2 \leq 2\}$
 $K = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^2: x \geq 1, |y| \leq 1/x^2\}$. Stabilire se è convergente l'integrale su $H \cup K$.

Svolgimento Esaminiamo l'integrale su H . $\int \int_H f(x, y) dx; dy = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int \int_{\varepsilon \leq x^2+y^2 \leq 2} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_{\varepsilon}^1 \frac{r}{r^{2a}} dr =$

$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} 2\pi \frac{1}{2-2a} (2^{2-2a} - \varepsilon^{2-2a})$ e vogliamo che per $\varepsilon \rightarrow 0$ il limite sia finito da cui $a < 1$. L'integrale su K è due volte l'integrale sulla parte superiore ossia

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{\pi/4} d\vartheta \int_2^{\sqrt{\frac{2}{\sin 2\vartheta}}} \frac{r}{r^{2a}} dr = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{\pi/4} d\vartheta \frac{1}{2-2a} (2^{1-a} (\sin 2\vartheta)^{-1+a} - 2^{2-2a})$$

e l'integrale converge se $-1+a > -1$ ossia $a > 0$ da cui $0 < a < 1$.

♠ Sia data la funzione $f(x, y) = \frac{xy}{(x^2 + y^2)^a}$ definita nell'insieme $H \cup K$ dove $H = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^2: x^2 + y^2 \leq 2\}$
 $K = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^2: x \geq 1, |y| \leq 1/x^2\}$. Stabilire se è convergente l'integrale su $H \cup K$.

Svolgimento Sulla base del Teorema 9.3, l'integrale converge se e solo se converge l'integrale del modulo.

Esaminiamo l'integrale su H . $\int \int_H f(x, y) dx dy = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int \int_{\varepsilon \leq x^2 + y^2 \leq 2} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_{\varepsilon}^1 \frac{rr^2 |\cos \vartheta| |\sin \vartheta|}{r^{2a}} dr$
 e vogliamo che $2a - 3 < 1$ ossia $a < 2$.

L'integrale su K è due volte l'integrale sulla parte superiore ossia

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{\pi/4} d\vartheta \int_2^{\sqrt{\frac{2}{\sin 2\vartheta}}} \frac{r^3 |\sin \vartheta \cos \vartheta|}{r^{2a}} dr$$

e l'integrale converge se $a - 1 > -1 > 0$ ossia $a > 0$ per cui l'integrale esteso ad $H \cup K$ converge per $0 < a < 2$.

• Si dimostri che $\int \int_D \frac{y-x}{(x+y)^3} dx dy$, $D = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^2: x \in [1, +\infty), y \in [0, 1]\}$ esiste. Poi si verifichi che
 $\int_0^1 dy \int_1^{+\infty} \frac{y-x}{(x+y)^3} dx = -\frac{1}{2}$ e $\int_1^{+\infty} dx \int_0^1 \frac{y-x}{(x+y)^3} dy = -1$.

Svolgimento

$\int \int_D \frac{x-y}{(x+y)^3} dx dy = \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_1^k dr \int_0^{\arcsin \frac{1}{r}} \frac{r(\cos t - \sin t)}{r^3(\cos t + \sin t)^3} dt \leq \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_1^k dr \int_0^{\arcsin \frac{1}{r}} \frac{r \cos t}{r^3} dt =$
 $\lim_{k \rightarrow +\infty} C \int_1^k dr \frac{1}{r} \cdot \frac{1}{r} < +\infty$. Si è usato $\cos t + \sin t \geq 1$ nel primo quadrante.

Commento L'integrale doppio improprio $\int \int_{[1, +\infty) \times [0, 1]} f(x, y) dx dy$ è pari a $\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_1^k dx \int_0^1 f(x, y) dy$

dove la successione $\{G_k\}$, $\{G_k = [1, k] \times [0, 1]\}$ è esaustiva ai sensi della definizione **b)** data prima. La

funzione integranda è negativa per cui l'integrale improprio esiste. Inoltre $\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_1^k dx \int_0^1 f(x, y) dy =$

$$\int_1^{+\infty} dx \int_0^1 f(x, y) dy = -1$$

D'altra parte $\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_1^k dx \int_0^1 f(x, y) dy = \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_0^1 dy \int_1^k dx f(x, y) dx$ mentre $\int_0^1 dy \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_1^k dx f(x, y) dx =$

$$\int_0^1 dy \int_1^{+\infty} \frac{y-x}{(x+y)^3} dx = -\frac{1}{2}$$
. Questo dimostra che $\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_0^1 dy \int_1^k dx f(x, y) dx \neq \int_0^1 dy \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_1^k dx f(x, y)$

e quindi la sola esistenza di un integrale improprio di funzioni ammissibili non è condizione sufficiente per poter scambiare l'ordine di integrazione qualora si effettui prima l'integrazione rispetto ad una variabile e dopo rispetto ad un'altra.

Appendice A-1: Rudimenti di spazio vettoriale metrico, normato, completo

In \mathbb{R}^n fondamentale è il concetto di distanza. Una distanza $\rho(\underline{x}, \underline{y})$ è una applicazione da $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ in $[0, +\infty)$ che soddisfa la seguenti proprietà : 1) $\rho(\underline{x}, \underline{y}) \geq 0$ e $\rho(\underline{x}, \underline{y}) = 0$ se e solo se $\underline{x} = \underline{y}$ 2) $\rho(\underline{x}, \underline{y}) = \rho(\underline{y}, \underline{x})$ (simmetria) 3) $\rho(\underline{x}, \underline{y}) \leq \rho(\underline{x}, \underline{z}) + \rho(\underline{z}, \underline{y})$ (disuguaglianza triangolare). Si possono

dare infinite distanze. Ad esempio la “distanza-r” $\|\underline{x} - \underline{y}\|_r \stackrel{\text{def}}{=} \left(\sum_{k=1}^n |x_k - y_k|^r\right)^{1/r}$ dove $\underline{x} \in \mathbb{R}^n, \underline{y} \in \mathbb{R}^n$ e r è un numero positivo. Un altro esempio è $\max_{1 \leq k \leq n} |x_k - y_k|$ (già vista).

La definizione di distanza spesso corrisponde a precise nozioni geometriche. Ad esempio $\|\underline{x} - \underline{y}\|_2$ è esattamente la distanza euclidea. La distanza $\|\underline{x} - \underline{y}\|_\infty$ corrisponde alla cosiddetta “metrica del tassista”. Infatti se immaginiamo di stare in \mathbb{R}^2 abbiamo $\|\underline{x}\|_1 = |x_1| + |x_2|$. Se ad esempio mi trovo nel punto $(1, 1)$, per andare fino all’origine percorrerò prima il tratto verticale fino a $(1, 0)$ e poi il tratto orizzontale fino a $(0, 0)$; proprio come farebbe un tassista “opportunist”. Il tassista “onesto” invece andrebbe dritto verso l’origine percorrendo una distanza euclidea.

Tali distanze provengono da norme. Una norma in \mathbb{R}^n è una applicazione $A(\underline{x}): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ che soddisfa la tre seguenti proprietà : 1) $A(\underline{x}) \geq 0$ e $A(\underline{x}) = 0$ se e solo se $\underline{x} = \underline{0}$ 2) $A(\underline{x} + \underline{y}) \leq A(\underline{x}) + A(\underline{y})$, 3) $A(\lambda \underline{x}) = |\lambda|A(\underline{x})$.

Proposizione A-1 La quantità $A(\underline{x} - \underline{y})$ definisce una distanza.

Dimostrazione Definiamo quindi $\rho(\underline{x}, \underline{y}) \stackrel{\text{def}}{=} A(\underline{x} - \underline{y})$. Dalla proprietà 1) segue che se $A(\underline{x} - \underline{y}) = 0$ allora $\underline{x} = \underline{y}$ ossia $\rho(\underline{x}, \underline{y}) = 0$ implica $\underline{x} = \underline{y}$. Viceversa se $\underline{x} = \underline{y}$ allora $A(\underline{x} - \underline{y}) = 0$ e quindi $\rho(\underline{x}, \underline{y}) = 0$. La proprietà 2) si dimostra osservando che $\rho(\underline{x}, \underline{y}) = A(\underline{x} - \underline{y}) = A(-(\underline{y} - \underline{x})) = |-1|A(\underline{y} - \underline{x}) = A(\underline{y} - \underline{x}) = \rho(\underline{y}, \underline{x})$. Per quanto riguarda la 3) abbiamo $\rho(\underline{x}, \underline{y}) = A(\underline{x} - \underline{y}) = A(\underline{x} - \underline{z} + \underline{z} - \underline{y}) \leq A(\underline{x} - \underline{z}) + A(\underline{z} - \underline{y}) = \rho(\underline{x}, \underline{z}) + \rho(\underline{z}, \underline{y})$ ■

Definizione Due norme $A(\underline{x})$ e $B(\underline{x})$ si dicono equivalenti se esistono due costanti c e c' tali che $A(\underline{x}) \leq cB(\underline{x}) \leq c'A(\underline{x})$

Esercizio*** Provare a dimostrare che in \mathbb{R}^n tutte le norme sono equivalenti.

Dimostrazione Consideriamo lo spazio vettoriale \mathbb{R}^n equipaggiato con le metriche rispettivamente $A(\underline{x} - \underline{y})$ e $\|\underline{x} - \underline{y}\|_1$ e chiamiamoli (\mathbb{R}^n, A) e $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1)$. Per comodità scriviamo $A(\underline{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \|\underline{x}\|_A$.

Sia $\underline{x} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^n \underline{e}^{(k)} x_k$. Abbiamo $\|\underline{x}\|_A \leq \sum_{k=1}^n |x_k| \cdot \|\underline{e}^{(k)}\|_A \leq \max_{1 \leq k \leq n} \{\|\underline{e}^{(k)}\|_A\} \sum_{k=1}^n |x_k| \stackrel{\text{def}}{=} c \|\underline{x}\|_1$. Questo implica che $\|\underline{x}\|_A \leq c \|\underline{x}\|_1$. Per dimostrare $\|\underline{x}\|_1 \leq c' \|\underline{x}\|_A$ per ogni $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ ci basta farlo vedere sotto la condizione $\|\underline{x}\|_A \leq 1$ data la condizione $\|\lambda \underline{x}\|_A = |\lambda| \cdot \|\underline{x}\|_A$ e $\|\lambda \underline{x}\|_1 = |\lambda| \cdot \|\underline{x}\|_1$. Definiamo ora la funzione $f: (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1) \rightarrow \mathbb{R}, f(\underline{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \|\underline{x}\|_A$ sull’insieme $\|\underline{x}\|_1 = 1$ che è compatto. Dal teorema di Weierstrass segue che f ammette minimo m per cui $f(\underline{x}) = \|\underline{x}\|_A \geq m$. Inoltre $m \neq 0$. Se fosse zero allora esisterebbe \underline{x} tale che $\|\underline{x}\|_A = 0$ ossia $\underline{x} = \underline{0}$ e quindi $\|\underline{x}\|_1 = 0$ ma questo è impossibile in quanto la funzione è definita su $\|\underline{x}\|_1 = 1$. Ne segue $\|\underline{x}\|_A \geq m = m \|\underline{x}\|_1$ ossia al tesi ■

Se stessimo in un ambiente ad infinite dimensioni, non sarebbe più vero che $\|\underline{x}\|_1 = 1$ è compatto ed infatti in generale le norme non sono equivalenti.

Esercizio Dimostrare che $\|\underline{x} - \underline{y}\|_r \leq \|\underline{x} - \underline{y}\|_s$ se $s > r$.

Appendice A-5: Dimostrazione che se una matrice $M_{(2 \times 3)}$ ha rango 1 manda due vettori

linearmente indipendenti di \mathbb{R}^2 in due vettori linearmente dipendenti di \mathbb{R}^3 e viceversa

Sia data la matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix}$ avente rango 1 e siano $\underline{v} = (v_1, v_2)$ e $\underline{w} = (w_1, w_2)$ due vettori linearmente indipendenti di \mathbb{R}^2 ossia $\begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{vmatrix} = v_1 w_2 - v_2 w_1 \neq 0$. Vogliamo far vedere che esiste una costante $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che $M\underline{v} + \lambda M\underline{w} = \underline{0}$.

Il fatto che M ha rango 1 implica che si può scrivere come $M = \begin{pmatrix} a & b \\ \alpha a & \alpha b \\ \beta a & \beta b \end{pmatrix}$. Consideriamo infatti il

minore $M_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ e supponiamo che $ad - bc = 0$. Si hanno diversi sottocasi che ora elenchiamo

1) $a = b = c = d = 0 \Rightarrow \alpha = 0$ 2) $a \neq 0, e b = c = d = 0 \Rightarrow \alpha = 0,$ 3) $a \neq 0, b \neq 0, c = 0, d = 0 \Rightarrow \alpha = 0,$ 4) $a \neq 0, b = 0, c \neq 0, d = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{a}{c}.$ 5) $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0, d \neq 0$. In tal caso abbiamo $c = \frac{ad}{b}$ e $d = \frac{bc}{a}$ da cui $\alpha = \frac{d}{c} = \frac{c}{a}$.

L'applicazione dunque di M a due qualsiasi vettori $\underline{v} = (v_1, v_2)$ e $\underline{w} = (w_1, w_2)$ di \mathbb{R}^2 e la trasposizione dà quindi $(M\underline{v})^T = (\xi, \alpha\xi, \beta\xi)$ dove $\xi = av_1 + bv_2$, $(M\underline{w})^T = (\eta, \alpha\eta, \beta\eta)$ dove $\eta = aw_1 + bw_2$. È chiaro che $M\underline{v} + \frac{\xi}{\eta} M\underline{w} = \underline{0}$. Due vettori qualsiasi, linearmente indipendenti o meno, vengono mandati in due vettori linearmente dipendenti.

Ora dobbiamo far vedere il contrario ossia che se la matrice M manda due qualsiasi vettori linearmente indipendenti in due vettori linearmente dipendenti, allora la matrice ha rango 1. L'ipotesi è quindi che \underline{v} e \underline{w} sono linearmente indipendenti e quindi *non esiste nessuna costante* λ tale che $\underline{v} + \lambda\underline{w} = \underline{0}$. Per ipotesi abbiamo $M\underline{v} = \mu M\underline{w}$. Se scriviamo tale condizione per il minore M_1 otteniamo $M_1(\underline{v} - \lambda\underline{w}) = \underline{0}$

dove $M_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. L'algebra lineare ci dice che l'equazione precedente si risolve solo se $\det M_1 = 0$ e

quindi $M_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ \alpha a & \alpha b \end{pmatrix}$. Identica procedura si applica agli altri due minori

Appendice A-7: Formula sul cambio di variabile

Dati n vettori in \mathbb{R}^n $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$, consideriamo l'insieme (detto *blocco*) $B = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n : \underline{x} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \underline{v}_i, 0 \leq \lambda_i \leq 1\}$. Il blocco è detto *degenere* se gli n vettori sono linearmente dipendenti. Altrimenti il blocco è detto *non-degenere*. Ad esempio nel caso $n = 2$ un blocco è un parallelogramma se i due vettori non sono allineati. Con $n = 3$ si ha un parallelepipedo se i tre vettori sono linearmente indipendenti.

Definizione A-7.1 Si definisce $V(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n)$ il volume del blocco B mentre si definisce volume orientato la quantità $V^0(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n) = \pm V(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n)$ dove c 'è il segno più se $\text{Det}(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n) > 0$ e il segno meno se $\text{Det}(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n) < 0$

Prima di dimostrare l'importante teorema che segue, il cuore della formula sul cambio di variabili negli integrali, facciamo una breve digressione sui determinanti

Supponiamo di avere una funzione $f: \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ che ad n vettori ciascuno di \mathbb{R}^n associa un numero $f(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n)$ con le seguenti proprietà :

- 1) $f(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_i, \dots, \underline{v}_j, \dots, \underline{v}_n) = -f(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_j, \dots, \underline{v}_i, \dots, \underline{v}_n)$ detta *alternante* (nel senso che se si scambiano 2 vettori si cambia segno)
- 2) $f(\lambda \underline{v}_1 + \mu \underline{w}_1, \dots, \underline{v}_i, \dots, \underline{v}_j, \dots, \underline{v}_n) = \lambda f(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_i, \dots, \underline{v}_j, \dots, \underline{v}_n) + \mu f(\underline{w}_1, \dots, \underline{v}_i, \dots, \underline{v}_j, \dots, \underline{v}_n)$ (lineare rispetto a \underline{v}_1 e quindi rispetto agli altri vettori grazie alla 1)
- 3) $f(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n) = 1$ con $\underline{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)$ e via dicendo.

Notare che dalla 1) segue la proprietà secondo cui se $\underline{v}_i = \underline{v}_j$ per $i \neq j$ allora $f(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_i, \dots, \underline{v}_i, \dots, \underline{v}_n) = 0$

Abbiamo il seguente

Teorema A-7.1 $f(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n) = Det(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n)$.

Dimostrazione Con la scrittura $Det(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n)$ si intende il determinante della matrice che ha per prima colonna le coordinate del vettore \underline{v}_1 , per seconda colonna le coordinate del vettore \underline{v}_2 e via dicendo.

Indichiamo con $f(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n) \stackrel{\text{def}}{=} \underline{v}_1 \wedge \dots \wedge \underline{v}_n$. Sia $\underline{v}_i = \sum_{k_i=1}^n a_{ik_i} \underline{e}_{k_i}$ da cui $f(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n) = \sum_{k_1=1}^n a_{1k_1} \underline{e}_{k_1} \wedge$

$$\sum_{k_2=1}^n a_{2k_2} \underline{e}_{k_2} \wedge \dots \wedge \sum_{k_n=1}^n a_{nk_n} \underline{e}_{k_n} = \sum_{k_1=1}^n \sum_{k_2=1}^n \dots \sum_{k_n=1}^n a_{1k_1} a_{2k_2} \dots a_{nk_n} \underline{e}_{k_1} \wedge \underline{e}_{k_2} \wedge \dots \wedge \underline{e}_{k_n}.$$

Per la proprietà 1), dalle somme vengono eliminate tutte le n -uple k_1, \dots, k_n nelle quali almeno due valori siano uguali. Dunque rimangono solo le n -uple in cui ciascun intero k_i è diverso da k_j per $i \neq j$ ossia le permutazioni degli n interi $\{1, \dots, n\}$. Sia $\{j_1, j_2, \dots, j_n\}$ una permutazione, detta P , di $\{1, \dots, n\}$. Sia N_P il numero di scambi che bisogna effettuare per riportare la n -pla $\{j_1, j_2, \dots, j_n\}$ alla n -pla $\{1, \dots, n\}$ (ad esempio la terna $\{3, 1, 2, 4\}$ necessita di 2 scambi. Infatti per scrivere $\{1, 2, 3, 4\}$ il numero tre ha saltato due posti (due scambi)). $\{4, 3, 2, 1\}$ necessita di 4 scambi. Infatti si passa dapprima a $\{1, 3, 2, 4\}$ (3 scambi) e poi si passa a $\{1, 2, 3, 4\}$. Sia per definizione $\sigma_P = +1$ se N_P è pari e $\sigma_P = -1$ se N_P è dispari.

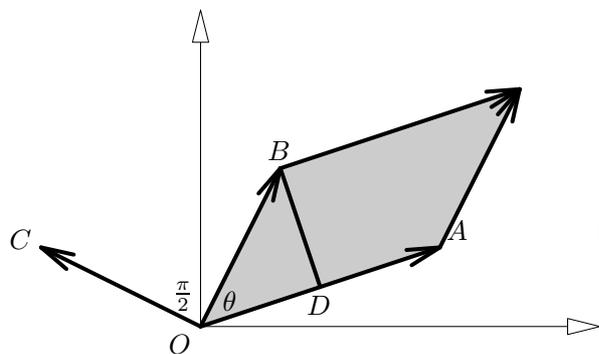
Ebbene abbiamo $\underline{e}_{k_1} \wedge \underline{e}_{k_2} \wedge \dots \wedge \underline{e}_{k_n} = (-1)^{\sigma_P} \underline{e}_1 \wedge \underline{e}_2 \wedge \dots \wedge \underline{e}_n = (-1)^{\sigma_P}$ per la 3). Dunque si ha

$$f(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n) = \sum_{P \text{ di } \{1, \dots, n\}} (-1)^{\sigma_P} a_{1k_1} a_{2k_2} \dots a_{nk_n} \text{ ossia } Det(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n)$$

Si ha l'importante

Teorema A-7.2 $V^0(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n) = Det(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n)$ e quindi $V(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n) = |Det(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n)|$

Osservazione in \mathbb{R}^2 il seguente disegno aiuta.



$$\vec{OA} = (u_1, u_2), \vec{OB} = (v_1, v_2), \vec{OC} = (-v_2, v_1),$$

L'area è data da $|\vec{OA}| \cdot |\vec{BD}| = |\vec{OA}||\vec{OB}| \sin \theta = |\vec{OA}||\vec{OB}| \cos(\theta + \frac{\pi}{2}) = |(\vec{OA}, \vec{OC})| = |(-u_1 v_2 + u_2 v_1)| = |\text{Det}(M)|$ dove $M = \begin{pmatrix} v_1 & u_1 \\ v_2 & u_2 \end{pmatrix}$

Dimostrazione Per dimostrare $V^0(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n) = \text{Det}(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n)$ dobbiamo far evdere che $V^0(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n)$ soddisfa le proprietà 1), 2) e 3) scritte poc'anzi. Se $(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n)$ sono linearmente dipendenti la relazione è verificata. Infatti a destra il determinante è nullo per la proprietà alternante. A sinistra si ha il volume orientato di un blocco che è sottoinsieme di \mathbb{R}^{n-1} e quindi il volume è zero.

Supponiamo quindi che i vettori $(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n)$ siano linearmente indipendenti. La 1) è immediata non appena si nota che $V(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n)$ non cambia se scambio due vettori mentre il determinante cambia segno. La 3) deriva dal fatto che $V(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$ è il volume dell'ipercubo di lato 1 e il suo volume è uno. La meno facile da dimostrare è la 2). Dobbiamo far vedere

- 1) $V^0(c\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n) = cV^0(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n) \quad c \in \mathbb{R}$
- 2) $V^0(\underline{v} + \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n) = V^0(\underline{v}, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n) + V^0(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n)$

Cominciamo da 1). Sia c intero. $V^0(c\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n)$ è il volume dell'insieme $B_c = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n : \underline{x} = c\lambda_1 \underline{v}_1 + \sum_{i=2}^n \lambda_i \underline{v}_i, 0 \leq \lambda_i \leq 1\}$. $c\lambda_1 \underline{v}_1 + \sum_{i=2}^n \lambda_i \underline{v}_i = \lambda_1 \underline{v}_1 + \sum_{i=2}^n \lambda_i \underline{v}_i + (c-1)\lambda_1 \underline{v}_1$ e quindi $B_c = B_1 \cup B_{c-1}$ con

$$B_1 \cap B_{c-1} \subset \mathbb{R}^{n-1}. \text{ Proseguendo si ottiene } B_c = \cup_{k=1}^c B_1^{(k)} \text{ dove } B_1^{(k)} = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n : \underline{x} = \mu \underline{v}_1 + \sum_{i=2}^n \lambda_i \underline{v}_i, 0 \leq$$

$\lambda_i \leq 1, (k-1) \leq \mu \leq k\}$. Inoltre si ha $B_1^{(k-1)} \cap B_1^{(k)} \subset \mathbb{R}^{n-1}$. Poiché il volume n -dimensionale di un sottoinsieme $n-1$ -dimensionale è nullo, segue che $V^0(c\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n) = cV^0(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n)$

Sia ora $c = \frac{p}{q} > 0$ con $0 < p < q$ (altrimenti ci si riporta al caso precedente dopo avere usato il calcolo appena eseguito). Si usa il fatto che $B_{\frac{p}{q}} \cup B_{\frac{q-p}{q}} = B_1$ con $B_{\frac{p}{q}} \cup B_{\frac{q-p}{q}} \subset \mathbb{R}^{n-1}$ e quindi $V^0(\frac{p}{q}\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n) + V^0(\frac{q-p}{q}\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n) = V^0(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n)$. Usando il precedente calcolo otteniamo $pV^0(\frac{1}{q}\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n) + (q-p)V^0(\frac{1}{q}\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n) = V^0(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n)$ da cui $V^0(\frac{1}{q}\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n) = \frac{1}{q}V^0(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n)$.

L'ultimo caso è quello in cui c è irrazionale positivo. Siano r e r' razionali per cui $r \leq c \leq r'$. Si hanno le relazioni $B(r\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n) \subseteq B(c\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n) \subseteq B(r'\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n)$ e quindi $V^0(r\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n) \leq V^0(c\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n) \leq V^0(r'\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n)$. Passando al limite $r \rightarrow c^-$ e $r' \rightarrow c^+$ si ottiene il risultato.

Il caso in cui c è negativo (sia esso intero, razionale oppure irrazionale) si riduce ai prece-

denti osservando che $B(c\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n) = B(-|c|\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n) = B(|c|(-\underline{v}_1), \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n)$ da cui $V^0(|c|(-\underline{v}_1), \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n) = |c|V^0(-\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n) = |c|V^0(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n) \frac{Det(-\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n)}{|Det(-\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n)|} = |c|V^0(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n) \frac{-Det(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n)}{|Det(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n)|} = -|c|V^0(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n)$.

L'ultima proprietà da dimostrare è la 2). Mostreremo che $V^0(c_1\underline{v}_1 + c_2\underline{v}_2 + \dots + c_n\underline{v}_n, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n) = c_1V^0(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n)$. Da essa segue la 2). Sia infatti $\underline{v} + \underline{w} = \sum_{i=1}^n (\alpha_i + \beta_i)\underline{v}_i$ (che è possibile poiché i vettori $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ sono linearmente indipendenti). Si ha $V^0(\sum_{i=1}^n (\alpha_i + \beta_i)\underline{v}_i, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n) = (\alpha_1 + \beta_1)V^0(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n) = V^0(\underline{v}, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n) + V^0(\underline{w}, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n)$

Dimostriamo ora la proprietà $V^0(c_1\underline{v}_1 + c_2\underline{v}_2 + \dots + c_n\underline{v}_n, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n) = c_1V^0(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n)$. Siano dati i blocchi $B(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n)$ e $B(\underline{v}_1 + \underline{v}_2, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n)$. Quest'ultimo si ottiene dal primo traslando del vettore \underline{v}_2 ossia $B(\underline{v}_1 + \underline{v}_2, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n) = B(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n) + \underline{v}_2$. Dunque il volume orientato dei due blocchi è lo stesso ossia $V^0(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n) = V^0(\underline{v}_1 + \underline{v}_2, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n)$. Da ciò segue che $V^0(\underline{v}_1 + c\underline{v}_2, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n) = V^0(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n)$. Infatti se $c = 0$ la relazione è ovvia. Se $c \neq 0$ allora scriviamo $cV^0(\underline{v}_1 + c\underline{v}_2, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n) = V^0(\underline{v}_1 + c\underline{v}_2, c\underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n) = V^0(\underline{v}_1, c\underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n) = cV^0(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n)$. Semplificando c si ottiene la relazione cercata.

A questo punto sono chiare le relazioni $V^0(\sum_{i=1}^n c_i\underline{v}_i, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n) = V^0(\sum_{i=1}^{n-1} c_i\underline{v}_i, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n) = \dots = c_1V^0(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n)$ ■

Corollario A-7.1 Sia B il cubo di lato 1 in \mathbb{R}^n e sia T una applicazione lineare $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Allora il volume dell'insieme $T(B)$ è pari a $Det(T)$ ossia $Vol(T(B)) = Det(T)$

Dimostrazione $B = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n: \underline{x} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \underline{e}_i, 0 \leq \lambda_i \leq 1\}$. Si ha $T(\underline{e}_j) = \sum_{k_j=1}^n T_{jk_j} \underline{e}_{k_j}$ e quindi

$$T(B) = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n: \underline{x} = \sum_{i=1}^n \lambda_i T(\underline{e}_i), 0 \leq \lambda_i \leq 1\} = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n: \underline{x} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \sum_{k_i=1}^n T_{ik_i} \underline{e}_{k_i}, 0 \leq \lambda_i \leq 1\} =$$

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \sum_{k_i=1}^n T_{ik_i} \underline{e}_{k_i}, 0 \leq \lambda_i \leq 1\} \text{ e quindi la tesi (laddove nella formula } B = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n: \underline{x} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \underline{v}_i, 0 \leq$$

$$\lambda_i \leq 1\} \text{ vi è } \underline{v}_i, \text{ in questo caso vi è } \sum_{k_i=1}^n T_{ik_i} \underline{e}_{k_i} \text{ ■}$$

Corollario A-7.2 Sia R un rettangolo e $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una applicazione lineare. Si ha $Vol(T(R)) = Vol(R) \cdot |Det(T)|$

Dimostrazione Sia S l'applicazione lineare tale che $R = S(B)$ dove B è il cubo unitario. $T(R) = T \circ S(B)$ e quindi $Vol(T(R)) = Det(T \circ S) = |Det(T)| \cdot |Det(S)| = Det(T) \cdot Vol(R)$ grazie al precedente Corollario. ■

Ora estendiamo il secondo Corollario a mappe più generali di quelle lineari. Prima ci serve un Lemma.

Lemma A-7.1 Sia data una funzione $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ Lipschitziana e $\overset{\circ}{U} \neq \emptyset$. Allora f manda insiemi di misura nulla in insiemi di misura nulla.

Dimostrazione f Lipschitziana vuol dire che esiste una costante L per cui $|f(\underline{x}) - f(\underline{y})| \leq L\|\underline{x} - \underline{y}\|$ per ogni coppia $\underline{x}, \underline{y}$. Ne consegue che f è continua. Sia ora $D \subset U$ un insieme di misura nulla e quindi per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un insieme finito di *pluriintervalli* (rettangoli di dimensione n e aventi quindi $2n$ facce) $\{I_i\}_{i=1}^n$ tale che $D \subset \cup_{i=1}^n I_i$ e $\sum_{i=1}^n |I_i| < \varepsilon$. L'insieme D viene mandato nell'insieme $f(D) \subset \cup_{i=1}^n f(I_i)$ e $f(I_i)$ è un intervallo in quanto f è continua e $f(I_i) = (\alpha_i, \beta_i)$ con $\alpha_i = \inf_{\underline{x} \in I_i} f(\underline{x}_i)$ e $\beta_i = \sup_{\underline{x} \in I_i} f(\underline{x}_i)$. Per la Lipschitzianità $|f(I_i)| \leq L|I_i|$ e quindi $f(D)$ è ricoperto da una quantità finita di intervalli la somma delle cui lunghezze non eccede $\sum_{i=1}^n L|I_i| < \varepsilon L$ ■

Osservazione Perché esistono $\alpha_i = \inf_{\underline{x} \in I_i} f(\underline{x}_i)$ e $\beta_i = \sup_{\underline{x} \in I_i} f(\underline{x}_i)$?

Perché siccome ci interessiamo ad insiemi di misura nulla, possiamo restringere f ad un sottoinsieme limitato, diciamo V , di U (U potrebbe essere illimitato). Sia $\underline{x}_0 \in V$ e $f(\underline{x}) = f(\underline{x}) - f(\underline{x}_0) + f(\underline{x}_0)$ per cui $|f(\underline{x}) - f(\underline{x}_0) + f(\underline{x}_0)| \leq |f(\underline{x}_0)| + |f(\underline{x}) - f(\underline{x}_0)| \leq |f(\underline{x}_0)| + L\|\underline{x} - \underline{x}_0\|$ e quest'ultima quantità è limitata per $\underline{x} \in V$. Essendo $\{f(\underline{x})\}$ un insieme limitato, per la completezza dei numeri reali, ammette estremo inferiore e superiore.

Esercizio** Si dia un esempio di funzione *continua* $f: U \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e di insieme $D \subset U$ avente misura nulla per il quale $f(D)$ non è misurabile. Se f non è continua è più facile.

Risposta: con f discontinua basta prendere $U = [0, 1]$, $D = \{x \in U: x = \frac{1}{n} \text{ } n \text{ intero}\}$. Si enumerino i razionali contenuti in $[0, 1]$ ottenendo $\mathbf{Q} \cap [0, 1] = \{r_k\}$ e si definisca la funzione $f(x) = \begin{cases} r_k & x = k^{-1} \\ 0 & x \in U \setminus D \end{cases}$

Con f continua si prenda $U = (0, +\infty)$, $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ e $D = \{x \in \mathbb{R}: x = \frac{1}{n}\}$. Dobbiamo far vedere che l'insieme $\{y \in \mathbb{R}: y = \sin \frac{1}{x}, x = \frac{1}{n}\}$ non è misurabile. Per questo è sufficiente dimostrare che detto $A = \{y \in \mathbb{R}, y = \sin n, n \in \mathbb{N}\}$ esso è denso in $[0, 1]$ ossia $\overline{A} = [0, 1]$. Infatti un insieme è misurabile se e solo se la sua frontiera è un insieme nullo (Definizione 7.5). È un risultato ben noto e presente in molti libri di testo “vecchi.” Per completezza ne diamo qui la dimostrazione.

Prima di tutto definiamo $\mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$ ossia l'insieme delle “classi di equivalenza modulo 2π ”. In pratica per ogni numero reale x consideriamo $x - 2k\pi$ con k il più piccolo intero relativo tale che $x - 2k\pi \in [0, 2\pi]$. Chiamiamo $[x]$ il numero così ottenuto e consideriamo l'insieme $\{[n]\}$. Certamente $[n] \neq [m]$ se $n \neq m$. Infatti $[n] = [m]$ vorrebbe dire che esiste un intero relativo q per cui $n - m = 2\pi q$ ma questo è impossibile. Suddividiamo ora l'intervallo $[0, 2\pi]$ in parti uguali (sottointervalli chiusi) di lunghezza $1/N$. Dal punto precedente segue che almeno due punti dell'insieme $\{[1], [2], \dots, [N + 1]\}$ devono cadere dentro uno stesso sottointervallo. Diciamo che $0 < [i] - [j] < 1/N$. Consideriamo allora la successione $\{k([i] - [j])\}$ e vediamo che la differenza fra due suoi elementi consecutivi è minore di $1/N$ ed essendo N arbitrario, abbiamo che $\{[n]\}$ è densa in $[0, 2\pi]$ ossia $\overline{\{[n]\}} = [0, 2\pi]$. Ora facciamo vedere che dalla densità di $\{[n]\}$ in $[0, 2\pi]$ segue la densità di $\{\sin[n]\}$ in $[-1, 1]$. Se $y_0 = 1$ l'intervallo è $(a, 1]$ mentre se $y_0 = 0$ allora è $[0, b)$. Supponiamo che $\{\sin[n]\}$ non sia densa e quindi esiste $y_0 \in [-1, 1]$ e un aperto $(a, b) \ni y_0$ per cui $\{\sin[n]\} \cap (a, b) = \emptyset$. Sappiamo che $|x - x'| < \varepsilon \implies |\sin x - \sin x'| < \varepsilon$ per cui se prendiamo $1/N < (b - a)$, sicuramente l'insieme $\{\sin[n]\}$ avrà infiniti elementi all'interno dell'intervallo (a, b) .

Dimostrazione del Teorema 7.12 Ne diamo una dimostrazione più generale valida per trasformazioni T da \mathbb{R}^n in \mathbb{R}^n . Ciò avverrà attraverso una serie di risultati intermedi.

Primo passo . Prendiamo come insieme S un parallelepipedo. Facciamo vedere che se S è misurabile anche $\underline{T}(S)$ lo è e quindi $\partial\underline{T}(S)$ è un insieme nullo.

Dal Teorema 4.3 sappiamo che esiste $\underline{T}^{-1}:\underline{T}(S) \rightarrow S$ (perché non $\underline{T}^{-1}:\underline{T}(S) \rightarrow \overset{\circ}{S}$?) ed è continua. Per definizione di continuità, qualunque sia l'insieme aperto $O \subset \underline{T}(S)$, $\underline{T}^{-1}(O)$ è un insieme aperto sottoinsieme di $\overset{\circ}{S}$ ossia $\underline{T}^{-1}(O) \subset \overset{\circ}{S}$. Ne segue $\underline{T}^{-1}(\underline{T}(S) \subset \overset{\circ}{S})$ e quindi $\underline{T}(\overset{\circ}{S}) \subset \underline{T}(S)$. Inoltre l'insieme $\underline{T}(U)$ è aperto sottoinsieme di $\underline{T}(S)$ qualunque sia l'aperto $U = \overset{\circ}{U} \subset S$ e quindi $\underline{T}(\overset{\circ}{S}) \subset \underline{T}(S)$. La conclusione è che $\underline{T}(\overset{\circ}{S}) = \underline{T}(S)$.

Sia $\underline{y} \in \partial S$ e sia $\{\underline{x}_k\}$ una successione tale che $\underline{x}_k \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \underline{y}$ per definizione di frontiera. La continuità di \underline{T} implica che $\underline{T}(\underline{x}_k) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \underline{T}(\underline{y})$ ossia $\underline{T}(\underline{y}) \in (\underline{T}(S))' = (\underline{T}(S)) \cup \partial(\underline{T}(S)) = \underline{T}(\overset{\circ}{S}) \cup \partial(\underline{T}(S))$. Essendo $\underline{y} \notin \overset{\circ}{S}$ segue che $\underline{T}(\underline{y}) \notin \underline{T}(\overset{\circ}{S})$ e quindi $\underline{T}(\underline{y}) \in \partial(\underline{T}(S))$ e quindi $\underline{T}(\partial(S)) \subset \partial(\underline{T}(S))$.

Essendo \underline{T}^{-1} continua, abbiamo $\underline{T}^{-1}(\partial(\underline{T}(S))) \subset \partial(\underline{T}^{-1}(\underline{T}(S)))$ da cui $\partial(\underline{T}(S)) \subset \underline{T}(\partial(S))$ e quindi $\partial(\underline{T}(S)) = \underline{T}(\partial(S))$. Essendo S compatto, $\partial(\underline{T}(S))$ è limitato e quindi \underline{T} è uniformemente Lipschitziana (la costante L è uguale per ogni coppia di punti in S). Dal Lemma A-7.1 segue che $\underline{T}(\partial(S))$ è un insieme di misura nulla.

Secondo passo . dimostrare la formula
$$\int \int_{\underline{T}(S)} dx dy = \int \int_S \left| \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(u, v)} \right| du dv$$

Siano $\underline{u} = (u, v)$, $\underline{u}' = (u', v')$. Scomponiamo S in N cubetti tutti uguali eseguendo delle partizioni su ciascun lato di S . Teniamo presente poi che dato un qualsiasi numero reale positivo $\sigma > 0$, il volume del cubetto si può prendere minore o uguale a σ . Sia S_j un particolare cubetto, sia $\underline{a}^{(j)}$ il centro del cubetto e consideriamo \underline{T} ristretta a S_j . Sia inoltre $r_j = \max_{\underline{u}, \underline{u}' \in S_j} \|\underline{u} - \underline{u}'\| < \sigma^{1/3}$. Essendo $\underline{T} \in C^1(S)$ si ha $\forall \varepsilon \exists \delta_\varepsilon : \|\underline{u} - \underline{u}'\| < \delta_\varepsilon \Rightarrow \|\underline{T}_{\underline{u}}(\underline{u}) - \underline{T}_{\underline{u}}(\underline{u}')\| < \varepsilon$

Abbiamo $\underline{T}(\underline{u}) = \underline{T}(\underline{a}^{(j)}) + \underline{T}_{\underline{u}}(\underline{a}^{(j)})(\underline{u} - \underline{a}^{(j)}) + \underline{\gamma}(\underline{u})$ dove $\underline{\gamma}(\underline{u}) = \int_0^1 d\lambda [\underline{T}_{\underline{u}}(\lambda \underline{u} + (1 - \lambda)\underline{a}^{(j)}) - \underline{T}_{\underline{u}}(\underline{a}^{(j)})](\underline{u} - \underline{a}^{(j)})$.

Traslando possiamo supporre che $\underline{a}^{(j)} = \underline{0}$ per cui $\underline{\gamma}(\underline{u}) - \underline{\gamma}(\underline{u}') = \int_0^1 d\lambda [\underline{T}_{\underline{u}}(\lambda \underline{u}) - \underline{T}_{\underline{u}}(\underline{0})](\underline{u} - \underline{u}') + \int_0^1 d\lambda [\underline{T}_{\underline{u}}(\lambda \underline{u}) - \underline{T}_{\underline{u}}(\lambda \underline{u}')]\underline{u}'$.

Ne segue che $\sup_{\underline{u}, \underline{u}' \in S_j} \|\underline{\gamma}(\underline{u}) - \underline{\gamma}(\underline{u}')\| \leq \|\underline{u} - \underline{u}'\| \sup_{\underline{u}, \underline{u}' \in S_j} \|\underline{T}_{\underline{u}}(\lambda \underline{u}) - \underline{T}_{\underline{u}}(\underline{0})\| + \|\underline{u}'\| \sup_{\underline{u}, \underline{u}' \in S_j} \|\underline{T}_{\underline{u}}(\lambda \underline{u}) - \underline{T}_{\underline{u}}(\lambda \underline{u}')\| \leq 2r_j \varepsilon$. Inoltre per la continuità di $\underline{T}_{\underline{u}}$ in S e la compattezza di quest'ultimo, abbiamo: 1) $\sup_{\underline{u} \in S} \|\underline{T}_{\underline{u}}^{-1}\| \leq A$, 2) $\sup_{\underline{u} \in S} \|\underline{T}_{\underline{u}}\| \leq A'$. Sia $M^{(j)} \stackrel{\text{def}}{=} (\underline{T}_{\underline{u}}(\underline{a}^{(j)}))^{-1}$ ($M^{(j)}\underline{T})(\underline{u}) = \underline{u} + (M^{(j)}\underline{\gamma})(\underline{u}) \stackrel{\text{def}}{=} \underline{q}^{(j)}(\underline{u})$.

$\|\underline{q}^{(j)}(\underline{u}) - \underline{q}^{(j)}(\underline{u}')\| \geq \|\underline{u} - \underline{u}'\| - 2Ar_j \varepsilon$. L'insieme $\underline{T}(\overset{\circ}{S}_j)$ è un aperto e quindi anche l'insieme $(M^{(j)}\underline{T})(\overset{\circ}{S}_j) = \underline{q}^{(j)}(\overset{\circ}{S}_j)$ è un aperto che contiene un cubetto il cui lato è maggiore o uguale a $r_j - 2Ar_j \varepsilon$

e il cui volume $(r_j - 2Ar_j\varepsilon)^3 \geq r_j^3 - B_1r_j^3\varepsilon$ (B_1 opportunamente piccolo) che è pari al volume del cubetto S_j meno un fattore piccolo. Inoltre il volume del cubetto contenuto in $\underline{q}^{(j)}(\overset{\circ}{S}_j)$ è minore o uguale a $r_j^3 + B_1r_j^3\varepsilon$. Per il Teorema A-7.2 il volume dell'insieme $\underline{T}(S_j)$ è compreso fra i due valori $|Det(\underline{T}_x(\underline{a}^{(j)}))|Vol(S_j) - B_2r_j^3\varepsilon$ e $|Det(\underline{T}_x(\underline{a}^{(j)}))|Vol(S_j) + B_2r_j^3\varepsilon$ (B_2 tiene conto della presenza di \underline{T}_x e inoltre $\underline{T}(S_j) = \underline{T}(\overset{\circ}{S}_j) \cup \underline{T}(\partial S_j)$ ma $\underline{T}(\partial S_j)$ ha volume nullo). $|Det(\underline{T}_x(\underline{a}^{(j)}))|Vol(S_j) - B_2r_j^3\varepsilon \leq Vol(\underline{T}(S_j)) \leq |Det(\underline{T}_x(\underline{a}^{(j)}))|Vol(S_j) + B_2r_j^3\varepsilon$

Da ultimo bisogna tenere conto della formula $\int \int_S \left| \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(u, v)} \right| dudv = \sum_{j=1}^N \int \int_{S_j} \left| \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(u, v)} \right| dudv$ e della

formula $\int \int_{\underline{T}(S)} dx dy = \sum_{j=1}^N \int \int_{\underline{T}(S_j)} dx dy$ (ricordare che $S_i \cap S_j \subset \mathbb{R}^{n-1}$ e quindi l'insieme $\underline{T}(S_i \cap S_j)$

ha misura nulla). Scriviamo quindi

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{j=1}^N \int \int_{S_j} \left| \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(u, v)} \right| dudv - \int \int_{\underline{T}(S_j)} dx dy \right| = \left| \sum_{j=1}^N \int \int_{S_j} \left| \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(u, v)} \right| dudv - Vol(\underline{T}(S_j)) \right| = \\ & = \left| \sum_{j=1}^N \int \int_{S_j} \left\{ \left| \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(u, v)} \right| - \underline{T}_x(\underline{a}^{(j)}) \right\} dudv + \sum_{j=1}^N \int \int_{S_j} \underline{T}_x(\underline{a}^{(j)}) dudv - Vol(\underline{T}(S_j)) \right| = \\ & = \left| \sum_{j=1}^N \int \int_{S_j} \left\{ \left| \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(u, v)} \right| - \underline{T}_x(\underline{a}^{(j)}) \right\} dudv + \sum_{j=1}^N \left\{ \underline{T}_x(\underline{a}^{(j)}) Vol(S_j) - Vol(\underline{T}(S_j)) \right\} \right| \\ & \leq \varepsilon \sum_{j=1}^N \int \int_{S_j} dudv + \sum_{j=1}^N 2B_2\varepsilon r_j^3 = \varepsilon |S|(1 + 2B_2) \text{ ed essendo } \varepsilon \text{ piccolo a piacere si ha il risultato.} \end{aligned}$$

Terzo passo . dimostrare la formula $\int \int_{\underline{T}(S)} dx dy = \int \int_S \left| \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(u, v)} \right| dudv$ dove S è un insieme misurabile qualsiasi.

Prendiamo un insieme S con interno non vuoto (vedi cap.7 Lemma 7.5). S misurabile vuol dire per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una collezione finita di rettangoli $\{S_i^1\}_{i=1}^{N^1}$ tale che $\overset{\circ}{S}_i^1 \cap \overset{\circ}{S}_j^1 = \emptyset$, $\cup_{i=1}^{N^1} \overset{\circ}{S}_i^1 \subset S$ e inoltre $0 < \mu(S) - \sum_{i=1}^{N^1} |S_i^1| < \varepsilon$. Inoltre sia $S^2 = \{S_i^2\}_{i=1}^{N^2}$ una collezione di rettangoli tale che $S_i^2 \cap \overline{S} \neq \emptyset$ e $\overset{\circ}{S}_i^2 \cap \overset{\circ}{S}_j^2 = \emptyset$ e $\cup_{j=1}^{N^2} S_j^2 \supset S$. Sempre dalla definizione di misurabilità segue che $0 < \mu(S^2) - \mu(S) = \sum_{i=1}^{N^2} |S_i^2| - \mu(S) < \varepsilon$. Inoltre $S \setminus S^1 \subset S^2 \setminus S^1 = (S^2 \setminus S) \cup (S \setminus S^1)$ e quindi $\mu(S^2 \setminus S^1) \leq 2\varepsilon$. Sia $S^1 \stackrel{\text{def}}{=} \cup_{j=1}^{N^1} S_j^1$ e spezziamo

$$\begin{aligned} \int \int_S \left| \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(u, v)} \right| dudv &= \sum_{j=1}^{N^1} \int \int_{S_j^1} \left| \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(u, v)} \right| dudv + \int \int_{S \setminus S^1} \left| \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(u, v)} \right| dudv = \\ &= \sum_{j=1}^{N^1} \int \int_{\underline{T}(S_j^1)} dx dy + \int \int_{S \setminus S^1} \left| \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(u, v)} \right| dudv = \int \int_{\underline{T}(S^1)} dx dy + \int \int_{S \setminus S^1} \left| \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(u, v)} \right| dudv = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int \int_{\underline{T}(S)} dx dy - \int \int_{\underline{T}(S \setminus S^1)} dx dy + \int \int_{S \setminus S^1} \left| \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(u, v)} \right| dudv; \\
 &\int \int_{S \setminus S^1} \left| \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(u, v)} \right| dudv \leq \varepsilon \sup_{\underline{x} \in S} |\underline{T}_{\underline{x}}| \leq \varepsilon A'; \\
 &\int \int_{\underline{T}(S \setminus S^1)} dx dy \leq \int \int_{\underline{T}(S^2 \setminus S^1)} dx dy = \int \int_{S^2 \setminus S^1} \left| \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(u, v)} \right| dudv \leq 2\varepsilon A'. \text{ Ne segue la formula} \\
 &\int \int_S \left| \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(u, v)} \right| dudv = \int \int_{\underline{T}(S)} dx dy.
 \end{aligned}$$

Quarto passo

Sia $f(x, y) = f(\underline{x} \circ \underline{T}(u, v)) \stackrel{\text{def}}{=} \bar{f}(u, v)$.

$$\begin{aligned}
 &\left| \sum_{j=1}^N \int \int_{S_j} \bar{f}(u, v) \left| \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(u, v)} \right| dudv - \int \int_{\underline{T}(S_j)} f(x, y) dx dy \right| \leq \\
 &\leq \left| \sum_{j=1}^N \int \int_{S_j} \bar{f}(u, v) \left| \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(u, v)} \right| dudv - f(\underline{T}(\underline{a}^{(j)})) \text{Vol}(\underline{T}(S_j)) + \int \int_{\underline{T}(S_j)} (-f(x, y) + f(\underline{T}(\underline{a}^{(j)}))) dx dy \right| \leq \\
 &\leq \left| \sum_{i=1}^N \int \int_{S_j} \left\{ \bar{f}(u, v) \left| \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(u, v)} \right| - f(\underline{T}(\underline{a}^{(j)})) \underline{T}_{\underline{x}}(\underline{a}^{(j)}) \right\} dudv \right| + \\
 &+ \left| \sum_{j=1}^N \int \int_{S_j} \bar{f}(\underline{T}(\underline{a}^{(j)})) \underline{T}_{\underline{x}}(\underline{a}^{(j)}) dudv - f(\underline{T}(\underline{a}^{(j)})) \text{Vol}(\underline{T}(S_j)) + \right. \\
 &\left. + \int \int_{\underline{T}(S_j)} (-f(x, y) + f(\underline{T}(\underline{a}^{(j)}))) dx dy \right| = \\
 &= \left| \sum_{j=1}^N \int \int_{S_j} \left\{ \bar{f}(u, v) \left| \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(u, v)} \right| - f(\underline{T}(\underline{a}^{(j)})) \underline{T}_{\underline{x}}(\underline{a}^{(j)}) \right\} dudv \right| + \\
 &+ \left| \sum_{j=1}^N f(\underline{T}(\underline{a}^{(j)})) \underline{T}_{\underline{x}}(\underline{a}^{(j)}) \text{Vol}(S_j) - f(\underline{T}(\underline{a}^{(j)})) \text{Vol}(\underline{T}(S_j)) + \int \int_{\underline{T}(S_j)} (-f(x, y) + f(\underline{T}(\underline{a}^{(j)}))) dx dy \right| \leq \\
 &\leq \sum_{j=1}^N \int \int_{S_j} \left\{ \left| \bar{f}(u, v) - f(\underline{T}(\underline{a}^{(j)})) \right| \left| \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(u, v)} \right| + |f(\underline{T}(\underline{a}^{(j)}))| \left| \underline{T}_{\underline{x}}(\underline{a}^{(j)}) - \left| \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(u, v)} \right| \right| \right\} dudv + \\
 &+ \sum_{j=1}^N |f(\underline{T}(\underline{a}^{(j)}))| \left| \underline{T}_{\underline{x}}(\underline{a}^{(j)}) \text{Vol}(S_j) - \text{Vol}(\underline{T}(S_j)) \right| + \int \int_{\underline{T}(S_j)} |(-f(x, y) + f(\underline{T}(\underline{a}^{(j)})))| dx dy
 \end{aligned}$$

Dalla continuità di f e della trasformazione \underline{T} si ha $\forall \varepsilon \exists \delta_\varepsilon^{(1)} : \|\underline{u} - \underline{u}'\| < \delta_\varepsilon^{(1)} \Rightarrow \|f \circ \underline{T}(\underline{u}) - f \circ \underline{T}(\underline{u}')\| < \varepsilon$

$$\begin{aligned}
 &\sup_{\underline{u} \in S} |f \circ \underline{T}| \leq F. \text{ Ne segue che } \left| \sum_{j=1}^N \int \int_{S_j} \bar{f}(u, v) \left| \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(u, v)} \right| dudv - \int \int_{\underline{T}(S_j)} f(x, y) dx dy \right| \leq \\
 &\sum_{j=1}^N \varepsilon \int \int_{S_j} [(A' + F) + \varepsilon A'] dudv + \varepsilon \sum_{j=1}^N F B_2 r_j^3 \leq \varepsilon |S| (2A' + F + F B_2) \text{ non appena } \sigma^{1/3} < \min\{\delta_\varepsilon, \delta_\varepsilon^{(1)}\}
 \end{aligned}$$

■

Appendice A-8: Sullo spazio $(\mathbb{R}^n)^*$

Dimostrazione del Teorema 8.05 $f \in (\mathbb{R}^n)^*$. vuol dire che f è una applicazione per cui $f(\lambda \underline{u} + \mu \underline{v}) = \lambda f(\underline{u}) + \mu f(\underline{v})$. Essendo lineare essa sarà identificata dalla sua azione su una base di \mathbb{R}^n ossia

$f(\underline{e}_k) = f_k$. Quindi se $\underline{v} = \sum_{k=1}^n c_k \underline{e}_k$ si ha $f(\underline{v}) = \sum_{k=1}^n f_k c_k$. Definiamo ora le n applicazioni lineari

su \mathbb{R}^n $(\varphi^{(1)}, \dots, \varphi^{(n)})$ tale che $\varphi^{(k)}(\underline{e}_i) = \delta_{ki} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1 & k = i \\ 0 & k \neq i \end{cases}$. Se $\underline{v} = \sum_{k=1}^n c_k \underline{e}_k$ e $\underline{u} = \sum_{k=1}^n b_k \underline{e}_k$ si ha

$\varphi^{(k)}(\underline{v}) = c_k$, $\varphi^{(k)}(\underline{u} + \underline{v}) = b_k + c_k = \varphi^{(k)}(\underline{u}) + \varphi^{(k)}(\underline{v})$, $\varphi^{(k)}(\lambda \underline{v}) = \lambda c_k = \lambda \varphi^{(k)}(\underline{v})$ per ogni k . Sia

dato ora $f \in (\mathbb{R}^n)^*$. $f(\underline{e}_i) \stackrel{\text{def}}{=} f_i$. $f(\underline{v}) = \sum_{j=1}^n f_j c_j = \sum_{j=1}^n c_j \varphi^{(j)}(f_j \underline{e}_j) = \sum_{j=1}^n c_j f_j \varphi^{(j)}(\underline{e}_j) = \sum_{j=1}^n f_j \varphi^{(j)}(\underline{v})$.

Di conseguenza definiamo $f = \sum_{j=1}^n f_j \varphi^{(j)}$. Facciamo vedere ora che gli elementi $(\varphi^{(1)}, \dots, \varphi^{(n)})$ sono

linearmente indipendenti. Supponiamo che esiste una n -pla di elementi non tutti nulli $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ tale

che $\sum_{j=1}^n \alpha_j \varphi^{(j)} = 0$. Applicando $\sum_{j=1}^n \alpha_j \varphi^{(j)} = 0$ di volta in volta ai vettori $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_k$ otteniamo che

$\alpha_k = 0$ per ogni k . Come conseguenza si ha che $(\mathbb{R}^n)^*$ è lineare di dimensione n .

Facciamo vedere ora che i due spazi sono isomorfi. Dobbiamo definire una applicazione iniettiva e

suriettiva (biunivoca) da \mathbb{R}^n in $(\mathbb{R}^n)^*$. Sia $A(\underline{e}_k) = \varphi^{(k)}$ e quindi $A(\underline{v}) = \sum_{k=1}^n c_k \varphi^{(k)}$ dove $\underline{v} = \sum_{k=1}^n c_k \underline{e}_k$.

L'applicazione A , oltreché lineare, è iniettiva: $A(\underline{v}) = \underline{0} \in (\mathbb{R}^n)^* \Rightarrow \underline{v} = \underline{0} \in \mathbb{R}^n$. Infatti $A(\underline{v}) =$

$\sum_{k=1}^n c_k \varphi^{(k)} = 0$ per cui $A(\underline{v})(\underline{u}) = 0$ per ogni $\underline{u} \in \mathbb{R}^n$. Se prendiamo $\underline{u} = \underline{e}_k$ con $1 \leq k \leq n$, otteniamo

di volta in volta $c_k = 0$ e quindi $\underline{v} = \underline{0}$. Dunque l'operatore A è iniettivo. Facciamo vedere che è

suriettivo. Sia $f \in (\mathbb{R}^n)^*$. Essendo $\{\varphi^{(1)}, \dots, \varphi^{(n)}\}$ una base in $(\mathbb{R}^n)^*$, segue che $f = \sum_{k=1}^n f_k \varphi^{(k)}$ e

quindi $f = \sum_{k=1}^n f_k A(\underline{e}_k)$ e per la linearità di A abbiamo $f = A(\sum_{k=1}^n f_k \underline{e}_k)$. In altre parole a $f \in (\mathbb{R}^n)^*$

corrisponde il vettore $\sum_{k=1}^n f_k \underline{e}_k \in \mathbb{R}^n$ ossia la suriettività. ■

Dimostrazione del Corollario 8.06 Dato $f = \sum_{k=1}^n a_k \varphi^{(k)} \in (\mathbb{R}^n)^*$, $f(\underline{v}) = \sum_{k=1}^n a_k c_k$ dove $\underline{v} = \sum_{k=1}^n c_k \underline{e}_k$.

■