Paolo Perfetti, Dipartimento di matematica, II Università degli Studi di Roma, facoltà di Ingegneria

Equazione delle Onde, Equazione del Calore, lineari in una dimensione
(su di un intervallo finito)

1. Equazione delle onde

Come applicazione della teoria delle serie di Fourier risolviamo l'equazione delle onde in una dimensione su di un intervallo finito. Come è noto dall'elettromagnetismo, tale equazione è data dalla seguente equazione differenziale alle derivate parziali (detta a volte di tipo iperbolico)

$$\begin{aligned} &u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, \quad 0 < x < L, \quad t > 0 \\ &u(x,0) = f(x), \quad u_t(x,0) = g(x), \quad 0 \le x \le L \\ &u(0,t) = 0, \quad u(L,t) = 0, \quad t \ge 0 \end{aligned} \tag{1.1}$$

$u_{tt} \doteq \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, $u_{xx} \doteq \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. Tale equazione è detta lineare in quanto dipende in modo lineare dalle derivate seconde ed è omogenea essendo il secondo membro nullo. Anche la equazione

$$u_{tt} + au + bu_x - c^2 u_{xx} + du_t = v(x,t) \tag{1.2}$$

è lineare dipendendo in modo lineare dalla funzione u e da tutte le sue derivate. La presenza di $v(x,t)$, detto anche termine forzante, rende la equazione non omogenea. $v(x,t)$ può dipendere anche da una sola delle variabili x, oppure t. Un tipico esempio di equazione non–lineare è

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = u^2(x,t) \tag{1.3}$$

la cui soluzione è molto più complicata della soluzione della equazione $u_{tt} - c^2 u_{xx} = u(x,t)$ che invece è lineare.

Attraverso la sostituzione $v(x,t) = u(x,t)e^{\lambda x \mu t}$ con $\mu = -b/2$, $\lambda = -d/c^2$

$$v_{tt} - c^2 v_{xx} + bv_t + dv_x + av = 0 \quad \text{diventa} \quad u_{tt} - c^2 u_{xx} + au = 0$$

che è detta "equazione del telegrafo" e che comporta il fenomeno detto della "dispersione delle onde".

Le condizioni al bordo $u(0,t) = 0$, $u(L,t) = 0$ sono dette "nulle" o "di Dirichlet." $f(x)$ e $g(x)$ sono delle funzioni date e rappresentano le "condizioni iniziali" analoghe alle condizioni iniziali per equazioni differenziali ordinarie già viste.

Fisicamente si immagini una corda vibrante posta lungo il segmento $[0,L]$. Una volta perturbata, la corda si inarca e lo scostamento sul piano (x,y), nella direzione y, dalla posizione di riposo è dato dal numero $u(x,t)$. Si intende quindi che se fisso x, sto guardando cosa accade su di un segmento verticale e l'andamento è dettato da $u(x,t)$.

Affrontiamo subito il teorema di *unicità* che ci permette di scegliere un particolare metodo di risoluzione fra i diversi possibili. Siano fdate quindi $\rho(x)$ e $k(x)$ due funzioni derivabili con continuità in $[0,L]$ e positive

Teorema di unicità *Sia data la equazione*

$$\begin{aligned} &\rho(x)u_{tt} = (ku_x)_x + F(x,t), \quad 0 < x < L, \quad t > 0 \\ &u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), \quad 0 \le x \le L \\ &u(0,t) = \mu_1(t), \quad u(L,t) = \mu_2(t), \quad t > 0 \end{aligned} \tag{1.4}$$

dove $\rho(x) > 0$, $k(x) > 0$ *hanno derivate fino all'ordine* 2 *contine. La funzione* $u(x,t)$, *e le derivate* $u_{tt}(x,t)$, $u_{xx}(x,t)$, $u_{x,t,}(x,t)$ *sono continue nell'insieme* $(x,t) \in [0,L] \times [0,+\infty)$ *Allora la soluzione è unica*

Dimostrazione Si procede per assurdo. Supponiamo che esistano due soluzioni $u_1(x,t)$ e $u_2(x,t)$ con $u_1(x,t) \not\equiv u_2(x,t)$. Prendiamo la funzione $v(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$ ed osserviamo che essa soddisfa l'equazione

$$\begin{aligned} &\rho(x)v_{tt} = (kv_x)_x, \qquad v(x,0) = 0, \quad v_t(x,0) = 0, \quad 0 \le x \le L \\ &v(0,t) = 0, \quad v(L,t) = 0, \quad t > 0 \end{aligned} \tag{1.5}$$

Prendiamo la quantità definita da

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^L \left(k(v_x)^2 + \rho(v_t)^2\right) dx \tag{1.6}$$

Si noti che, avendo integrato in x, la funzione $E(t)$ dipende ancora da t e non a caso si è usato il simbolo $E(t)$ in quanto essa rappresenta l'energia della corda vibrante.
Abbiamo

$$\begin{aligned} &E'(t) = \int_0^L (kv_xv_{xt} + \rho v_tv_{tt})\,dx = \\ &= \int_0^L \left[(kv_xv_t)_x - v_t(kv_x)_x\right] dx + \int_0^L \rho v_tv_{tt}dx = \\ &(kv_xv_t)(L,t) - (kv_xv_t)(0,t) + \int_0^L (\rho v_tv_{tt} - v_t(kv_x)_x\,dx = \\ &(kv_xv_t)(L,t) - (kv_xv_t)(0,t) + \int_0^L v_t\,(\rho v_{tt} - (kv_x)_x\,dx = \quad \text{(dalla (4)} \\ &(kv_xv_t)(L,t) - (kv_xv_t)(0,t) = 0 \end{aligned} \tag{1.7}$$

in quanto

$$v_t(0,t) \doteq \lim_{h\to 0}\frac{v(0,t+h) - v(0,t)}{h} = 0, \quad v_t(L,t) \doteq \lim_{h\to 0}\frac{v(L,t+h) - v(L,t)}{h} = 0 \tag{1.8}$$

Addirittura $v(0,t) = v(L,t) \equiv 0$. Dunque $E'(t) \equiv 0$ e quindi $E(t)$ è costante e pari ad $E(0)$ ma dalle condizioni sulla funzione v vediamo subito che $v_x(x,0) \equiv v_t(x,0) \equiv 0$. Ne segue $E(t) \equiv 0$ e quindi, essendo $E(t)$ l'integrale di funzioni positive, ne segue che che $v_x(x,t) \equiv v_t(x,t) = 0$ ossia $v(x,t)$ pari ad una costante. Essendo $v(x,0) \equiv 0$, la costante è zero. Dire che $v(x,t) \equiv 0$ equivale a dire che $u_1(x,t) \equiv u_2(x,t)$. ∎

Esistenza della soluzione per l'equazione omogenea e condizioni al bordo nulle

A questo punto possiamo passare a risolvere l'equazione differenziale usando la "separazione delle variabili" certi del fatto qualsiasi altro metodo porterebbe allo stesso risultato.

Cerchiamo soluzioni della forma $u(x,t) = P(x)R(t)$. Inseriamo nella (1) ed otteniamo

$$PR'' = c^2 RP'' \tag{1.9}$$

ed essendo P e R funzioni di variabili diverse, l'unica possibilità è che si abbia

$$R'' = R\lambda c^2, \qquad P'' = \lambda P, \qquad \lambda \in \mathbf{R} \tag{1.10}$$

Le condizioni al bordo ci danno $u(0,t) = P(0)R(t) = 0$ e $u(L,t) = P(L)R(t) = 0$ $\forall t$. Poiché $R(t) \equiv 0$ non va bene in quanto vorrebbe dire $u(x,t) \equiv 0$ ma $u(x,0) = f(x) \not\equiv 0$, dobbiamo imporre $P(0) = P(L) = 0$. La funzione $P(x)$ soddisfa quindi l'equazione

$$P''(x) = \lambda P(x), \quad P(0) = P(L) = 0 \tag{1.11}$$

Primo caso $\lambda = 0$. $P''(x) \equiv 0$ da cui $P(x) = \alpha + \beta x$. $P(0) = \alpha = 0$ e $P(L) = \beta L = 0$ ossia $\beta = 0$ e quindi $P \equiv 0$ che non soddisfa (1) come abbiamo già visto.

Secondo caso $\lambda > 0$. $P(x) = \alpha e^{\sqrt{\lambda}.x} + \beta e^{-\sqrt{\lambda}.x}$ e le condizioni al bordo danno $P(0) = \alpha\beta = 0$ e $P(L) = \alpha e^{\sqrt{\lambda}} L + \beta e^{-\sqrt{\lambda}} L = 0$ da cui $2\alpha \sinh \sqrt{\lambda}.L = 0$ e quindi $\lambda = 0$ che abbiamo escluso.

Terzo caso $\lambda = -|\lambda| < 0$. $P(x) = \alpha \cos \sqrt{|\lambda|}x, +\beta \sin \sqrt{|\lambda|}x$, e le condizioni al bordo danno $P(0) = \alpha = 0$ e $P(L) = \beta \cos \sqrt{|\lambda|} = 0$ da cui $L\sqrt{|\lambda|} = k\pi$ e quindi $|\lambda| = k^2\pi^2/L^2$ ossia $\lambda_k = -k^2\pi^2/L^2$, $k = 1, 2, 3, \ldots$. Come si vede esistono infinite soluzioni ed infatti l'equazione (1.11) è detto "problema ai limiti" o "problema con condizioni al contorno date". Non è un "problema di Cauchy" ossia una equazione differenziale in cui sono date le condizioni iniziali. In tal caso la soluzione sarebbe unica.

Una volta risolta (1.11) bisogna risolvere

$$R''(t) = \lambda_k c^2 R(t) = -c^2 |\lambda_k| R(t) \tag{1.12}$$

la cui soluzione è

$$R_k(t) = A_k \cos(c\sqrt{|\lambda_k|}t) + B_k \sin(c\sqrt{|\lambda_k|}t) \tag{1.13}$$

Alla fine otteniamo una

$$u_k(t) = P_k(x)R_k(t) = \left(A_k \cos(c\sqrt{|\lambda_k|}t) + B_k \sin(c\sqrt{|\lambda_k|}t)\right) \sin \sqrt{|\lambda_k|}x \tag{1.14}$$

Poiché l'equazione (1.1) ha condizioni al bordo nulle ed è lineare, la somma di $u_k(x,t)$ e di $u_{k_1}(x,t)$ è ancora una soluzione per cui la più generale soluzione è data da

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k(x,t) \tag{1.15}$$

Ora dobbiamo soddisfare le condizioni iniziali della soluzione. Poiché $u(0,t)=0$ e $u_t(0,t)=0$ per ogni $t\geq 0$, ne segue che $f(0)=0=g(0)$. Estendiamo la funzione $f(x)$ in modo dispari a tutto $\mathbf{R}$ definendo

$$F(x)=\begin{cases} f(x) & 0\leq x\leq L \\ -f(-x) & -L\leq x\leq 0\end{cases} \tag{1.16}$$

Essendo dispari, il suo sviluppo di Fourier sarà fatto da soli seni per cui

$$F(x)=\sum_{k=1}^{+\infty} f_k \sin\sqrt{|\lambda_k|}x=\sum_{k=1}^{+\infty} f_k\sin\frac{k\pi}{L}x, \qquad f_k=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin(\frac{\pi k}{L}x)dx \tag{1.17}$$

L'uguaglianza $u(x,0)=f(x)$ ci dà

$$u(x,0)=\sum_{k=1}^{+\infty} A_k\sin\sqrt{|\lambda|}x=\sum_{k=1}^{+\infty} f_k\sin\frac{k\pi}{L}x \quad\Longrightarrow\quad A_k=f_k \tag{1.18}$$

La stessa cosa facciamo per la funzione $g(x)$ ossia definiamo

$$G(x)=\begin{cases} g(x) & 0\leq x\leq L \\ -g(-x) & -L\leq x\leq 0\end{cases} \tag{1.19}$$

e quindi

$$u_t(x,0)=\sum_{k=1}^{+\infty} B_k c\sqrt{|\lambda_k|}\sin\sqrt{|\lambda|}x=\sum_{k=1}^{+\infty} g_k\sin\frac{k\pi}{L}x \quad\Longrightarrow\quad g_k=B_k\frac{ck\pi}{L} \tag{1.20}$$

$$g_k=\frac{2}{L}\int_0^L g(x)\sin(\frac{\pi k}{L}x)dx \tag{1.21}$$

Alla fine la soluzione è

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{+\infty}\left(f_k\cos(c\sqrt{|\lambda_k|}t)+g_k\frac{L}{ck\pi}\sin(c\sqrt{|\lambda_k|}t)\right)\sin\sqrt{|\lambda_k|}x \tag{1.22}$$

Supponiamo che $g(x)\equiv 0$. Abbiamo

$$\begin{aligned} &u(x,t)=\sum_{k=1}^{+\infty} f_k\cos(c\sqrt{|\lambda_k|}t)\sin\sqrt{|\lambda_k|}x= \\ &\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{f_k}{2}\left[\sin\left(\frac{\pi k}{L}(x+ct)\right)+\sin\left(\frac{\pi k}{L}(x-ct)\right)\right]= \\ &\frac{1}{2}(f(x+ct)+f(x-ct)\end{aligned} \tag{1.23}$$

e come si vede l'effetto è quello di due onde viaggianti, quella col segno meno verso destra e quella col segno più verso sinistra.

Se invece $g(x) \not\equiv 0$ si ha

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= \frac{1}{2}(f(x+ct)+f(x-ct)+\sum_{k=1}^{+\infty} g_k \frac{ck\pi}{L}\left(\cos\big(\frac{\pi k}{L}(x+ct)\big)-\cos\big(\frac{L}{\pi k}(x-ct)\big)\right) = \\
&= \frac{1}{2}(f(x+ct)+f(x-ct)+\frac{1}{2}\int_{x-ct}^{x+ct} g(y)dy
\end{aligned}
\tag{1.24}
$$

2. Esistenza della soluzione per l'equazione non omogenea e condizioni al bordo nulle

L'equazione è

$$
\begin{aligned}
& u_{tt} - c^2 u_{xx} = f(x,t), \quad 0 < x < L, \quad t > 0 \\
& u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), \quad 0 \le x \le L \\
& u(0,t) = 0, \quad u(L,t) = 0, \quad t \ge 0
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

Abbiamo

$$
f(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(t) \sin\frac{\pi n}{L}x, \quad f_n(t) = \frac{2}{L}\int_0^L \sin\frac{\pi n}{L} x f(x,t)dx
$$

$$
\varphi(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \varphi_n(t) \sin\frac{\pi n}{L}x, \quad \varphi_n(t) = \frac{2}{L}\int_0^L \sin\frac{\pi n}{L} x \varphi(x,t)dx
$$

$$
\psi(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \psi_n(t) \sin\frac{\pi n}{L}x, \quad \psi_n(t) = \frac{2}{L}\int_0^L \sin\frac{\pi n}{L} x \psi(x,t)dx
$$

Sostituendo in (2.1) si ha

$$
\sum_{n=1}^{+\infty} \sin\frac{\pi n}{L}x\left(-c^2\lambda_n^2 u_n(t) - u''(t) + f_n(t)\right) = 0 \tag{2.2}
$$

da cui

$$
c^2\lambda_n^2 u_n(t) + u''(t) = f_n(t) \tag{2.3}
$$

Una volta ottenuta $u_n(t)$ si passa alle condizioni iniziali

$$
u(x,0) = \varphi(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} u_n(0)\sin\frac{\pi n}{L}x = \sum_{k=1}^{+\infty} \varphi_n \sin\frac{\pi n}{L}x \quad \Longrightarrow \quad u_n(0) = \varphi_n
$$

$$
u_t(x,0) = \varphi(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} u_n'(0)\sin\frac{\pi n}{L}x = \sum_{k=1}^{+\infty} \psi_n \sin\frac{\pi n}{L}x \quad \Longrightarrow \quad u_n'(0) = \psi_n
$$

Esistenza della soluzione per l'equazione non omogenea e condizioni al bordo generiche

Abbiamo la equazione

$$\begin{array}{ll} u_{tt} - c^2 u_{xx} = f(x,t), & u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), \quad 0 \le x \le L \\ u(0,t) = \mu_1(t), \quad u(L,t) = \mu_2(t), \quad t \ge 0 & \end{array} \tag{2.4}$$

Decomponiamo la soluzione come $u(x,t) = U(x,t) + V(x,t)$ ed otteniamo

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = U_{tt} - c^2 U_{xx} + V_{tt} - c^2 V_{xx} \tag{2.5}$$

da cui

$$\begin{cases} V_{tt} - c^2 V_{xx} = f(x,t) - \Big(U_{tt} - c^2 U_{xx} \Big), \qquad 0 < x < L \\ V(x,0) = \varphi(x) - U(x,0) \doteq \overline{\varphi}(x), \quad V_t(x,0) = \psi(x) - U_t(x,0) \doteq \overline{\psi}(x), \quad 0 \le x \le L \\ V(0,t) = \mu_1(t) - U(0,t) = \overline{\mu}_1(t), \qquad V(L,t) = \mu_2(t) - U(L,t) = \overline{\mu}_2(t), \quad t \ge 0 \end{cases} \tag{2.6}$$

Se ora scegliamo $U(x,t) = \mu_1(t) + \dfrac{x}{L}(\mu_2(t) - \mu_1(t))$, abbiamo $\mu_1(t) - U(0,t) = 0$ e $\mu_2(t) - U(L,t) = 0$ per cui con tale scelta la (2.6) diventa

$$\begin{cases} V_{tt} - c^2 V_{xx} = f(x,t) - \Big(U_{tt} - c^2 U_{xx} \Big), \qquad 0 < x < L \\ V(x,0) = \varphi(x) - U(x,0) \doteq \overline{\varphi}(x), \quad V_t(x,0) = \psi(x) - U_t(x,0) \doteq \overline{\psi}(x), \quad 0 \le x \le L \\ V(0,t) = 0, \qquad V(L,t) = 0, \quad t \ge 0 \end{cases} \tag{2.7}$$

e la parte $U_{tt} - c^2 U_{xx}$ confluisce nel termine di non omogeneità .

3. Soluzione della equazione per disomogeneità stazionarie e condizioni al bordo costanti

Abbiamo la equazione

$$\begin{aligned} & u_{tt} - c^2 u_{xx} = f(x), \qquad u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), \quad 0 \le x \le L \\ & u(0,t) = \mu_1, \quad u(L,t) = \mu_2, \quad t \ge 0 \end{aligned} \tag{3.1}$$

μ_1 e μ_2 costanti. Decomponiamo la soluzione come $u(x,t) = U(x) + V(x,t)$ ed otteniamo

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = -c^2 U_{xx} + V_{tt} - c^2 V_{xx} \tag{3.2}$$

da cui

$$\begin{cases} V_{tt} - c^2 V_{xx} = f(x,t) + c^2 U_{xx}, \qquad 0 < x < L \\ V(x,0) = \varphi(x) - U(x,0) \doteq \overline{\varphi}(x), \quad V_t(x,0) = \psi(x) \doteq \overline{\psi}(x), \quad 0 \le x \le L \\ V(0,t) = \mu_1 - U(0), \qquad V(L,t) = \mu_2 - U(L), \quad t \ge 0 \end{cases} \tag{3.3}$$

Risolviamo a questo punto i due problemi

$$c^2 U_{xx} = -f(x), \quad U(0) = \mu_1, \quad U(L) = \mu_2 \tag{3.4}$$

$$\begin{cases} V_{tt} - c^2 V_{xx} = 0, \qquad 0 < x < L \\ V(x,0) = \varphi(x) - U(x), \quad V_t(x,0) = \psi(x), \quad 0 \le x \le L \\ V(0,t) = V(L,t) = 0, \quad t \ge 0 \end{cases} \tag{3.5}$$

La soluzione di (32) è immediata. La soluzione di $c^2 U_{xx} = -f(x)$ è data da

$$U(x) = a + bx - \frac{1}{c^2} \int_0^x dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 f(x_2) \tag{3.6}$$

e poi le condizioni al bordo conducono a

$$U(x) = \mu_1 + \frac{\mu_2 - \mu_1}{L} x + (\frac{x}{L} - 1) \frac{1}{c^2} \int_0^x dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 f(x_2) \tag{3.7}$$

4. Convergenza delle serie di Fourier

Nella precedente sezione abbiamo scritto molte serie di Fourier quali soluzioni di equazioni differenziali. Il problema che ora nasce è quello di dare un senso alla serie ossia trovare sotto quali condizioni tali serie convergono.
Abbiamo

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{+\infty}\Big(f_k\cos(c\sqrt{|\lambda_k|}t)+g_k\frac{L}{ck\pi}\sin(c\sqrt{|\lambda_k|}t)\Big)\sin\sqrt{|\lambda_k|}x \tag{4.1}$$

$$u_t(x,t)\sim\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\partial u_k}{\partial t}=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{c\pi k}{L}\Big(f_k\cos(c\sqrt{|\lambda_k|}t)+g_k\frac{L}{ck\pi}\sin(c\sqrt{|\lambda_k|}t)\Big)\sin\sqrt{|\lambda_k|}x \tag{4.2}$$

$$u_{xx}(x,t)\sim\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\partial^2 u_k}{\partial x^2}=-\frac{\pi^2}{L^2}\sum_{k=1}^{+\infty}k^2\Big(f_k\cos(c\sqrt{|\lambda_k|}t)+g_k\frac{L}{ck\pi}\sin(c\sqrt{|\lambda_k|}t)\Big)\sin\sqrt{|\lambda_k|}x \tag{4.3}$$

$$u_{tt}(x,t)\sim\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2}=-\frac{\pi^2c^2}{L^2}\sum_{k=1}^{+\infty}k^2\Big(f_k\cos(c\sqrt{|\lambda_k|}t)+g_k\frac{L}{ck\pi}\sin(c\sqrt{|\lambda_k|}t)\Big)\sin\sqrt{|\lambda_k|}x \tag{4.4}$$

Possiamo maggiorare

$$|u(x,t)|\le\sum_{k=1}^{+\infty}(|f_k|+|g_k|) \tag{4.5}$$

$$|u_t(x,t)|\le\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{c\pi k}{L}(|f_k|+|g_k|) \tag{4.6}$$

$$|u_{xx}(x,t)|\le\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\pi^2}{L^2}k^2(|f_k|+|g_k|) \tag{4.7}$$

$$|u_{tt}(x,t)|\le\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\pi^2c^2}{L^2}k^2(|f_k|+|g_k|) \tag{4.8}$$

e quindi ci interessano le condizioni sulle funzioni f e g per cui convergono le serie numeriche

$$\sum_{k=1}^{+\infty}k^p|f_k|,\ p=0,1,2,\qquad \sum_{k=1}^{+\infty}k^q|g_k|,\ q=-1,0,1 \tag{4.9}$$

Ci serve il teorema

Teorema *Sia data una funzione 2π–periodica $F\colon\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ avente derivata continua fino all'ordine k. La derivata $(k+1)$–esima esiste a tratti ed è continua laddove esiste. Allora se* $F(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ *si ha* $\sum_{k=0}^{+\infty}n^k(|a_n|+|b_n|)<+\infty$

Dimostrazione Si dimostra per induzione. Se $k=0$ è vera e si dimostra non per induzione ma è un risultato noto. Supponiamo che il teorema vale per $0\le k\le k_0$. Supponiamo allora che

$F(x)$ sia derivable $(k+1)$ volte con continuità e $(k+2)$ volte a tratti con derivata k_0+2–esima continua a tratti. Sia $F^{(k_0+2)}(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(a'_n\cos nx+b'_n\sin nx)$ e $F^{(k_0+1)}(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$. Allora $a_n=-b'_n/n$, $b_n=a'_n/n$. Siccome $F'(x)$ è derivabile k_0 volte con continuità e (k_0+1) volte a tratti con derivata (k_0+1)–esima continua a tratti, per ipotesi induttiva, si ha $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}n^{k_0}(|a'_n|+|b'_n|<+\infty$. Ora osserviamo che $=|n^{k_0}a'_n|=|n^{k_0+1}\dfrac{a'_n}{n}|=n^{k_0+1}|a_n|$ ed ugualmente per i coefficienti b_n, b'_n da cui la convergenza della serie $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}n^{k_0+1}(|a_n|+|b_n|)$■

Applicando il teorema, se vogliamo che $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}|f_k|$ converga, dobbiamo imporre che $F(x)$ sia continua con derivata prima continua a tratti. La continuità di $F(x)$ deve essere imposta al prolungamento dispari della funzione $f(x)$ e quindi deve essere $f(0)=0=f(L)$ perché il prolungamento dispari della funzione potrebbe creare una dsicontinuità in $x=0$.

Se vogliamo che $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}k|f_k|$, converga dobbiamo imporre che $F'(x)$ sia continua con derivata prima continua a tratti. La continuità della $F'(x)$ è gratis dal prolungamento dispari. Infatti in $x=0$ abbiamo $\lim\limits_{h\to0^+}\dfrac{1}{h}(f(h)-f(0))=\lim\limits_{h\to0^+}\dfrac{f(h)}{h}=\lim\limits_{h\to0^+}\dfrac{-f(-h)}{h}$. Sia ora $k=-h$, da cui $\lim\limits_{k\to0^-}\dfrac{-f(k)}{-k}=\lim\limits_{k\to0^-}\dfrac{f(k)}{k}$. Negli altri punti la continuità di $F'(x)$ è data dalla continuità di $f'(x)$. In $x=L$ vale quanto vale per $x=0$.

Se vogliamo che $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}k^2|f_k|$, converga dobbiamo imporre che $F''(x)$ sia continua con derivata prima continua a tratti. La continuità di $F''(x)$ va imposta al prolungamento dispari di $f(x)$. Infatti in $x=0$ abbiamo $\lim\limits_{h\to0^+}\dfrac{1}{h}(f'(h)-f'(0))=\lim\limits_{h\to0^+}\dfrac{1}{h}(f'(-h)-f'(0))=\lim\limits_{k\to0^-}\dfrac{1}{-k}(f'(k)-f'(0))$ da cui $f''(0^+)=-f''(0^-)$ e quindi dobbiamo imporre $f''(0^+)=0$.

Se invece vogliamo che $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}k^q|g_k|$, $q=-1,0,1$, converga, allora dobbiamo imporre $g(0)=g(L)=0$ e che $g(x)$ abbia derivata prima continua e derivata seconda esistente a tratti e continua a tratti.

5. Equazione del calore in un intervallo finito

Si consideri una sbarra posta lungo l'intervallo $[0, L]$ ad una certa temperatura iniziale che può dipendere dal punto della sbarra. Si immagini che gli estremi siano tenuti a temperatura zero. Sia $u(x,t)$ la temperatura della sbatta nel punto x al tempo t. Allora l'evoluzione della $u(x,t)$ è governata dalla equazione (detta a volte di tipo parabolico)

$$\begin{aligned} &u_t - c^2 u_{xx} = 0, \quad 0 < x < L, \quad t > 0 \\ &u(x,0) = f(x), \quad 0 \le x \le L \\ &u(0,t) = 0, \quad u(L,t) = 0, \quad t \ge 0 \end{aligned} \tag{5.1}$$

Tale modello di evoluzione di temperatura non è ottimale e spiegheremo perché.

Il primo risultato che vogliamo dimostrare è l'unicità della soluzione e per questo abbiamo bisogno del

Principio del massimo o del minimo (PMM) *Sia data una funzione $u(x,t)$ continua in un dominio $D = \{(x,t) \in [0,L] \times [0,T]\}$ e verifica l'equazione*

$$u_t = c^2 u_{xx}, \quad 0 < x < L, \ 0 < t \le T \tag{5.2}$$

Allora il valore del massimo o del minimo della funzione $u(x,t)$ si ottengono o all'istante iniziale o ai valori di estremo $x = 0$, $x = L$.

Osservazioni (i) La funzione costante $u(x,t) = u_0$ verifica (5.2) ma non contraddice il principio del massimo in quanto $u(x,t) \equiv u_0$ ha massimo e minimo in tutti i punti e quindi anche in quelli citati dal PMM *(ii)* Il significato fisico è evidente. Se ho una sbarra la cui temperatura all'istante iniziale ed agli estremi non supera il valore $\overline{u}$, coll'andare del tempo la temperatura non potrà superare tale valore.

Dimostrazione Sia M il valore massimo assunto da $u(x,t)$ con $(x,t) \in ([0,L] \times \{0\}) \cup (\{0\} \times [0,T]) \cup (\{L\} \times [0,T])$. Tale valore esiste per il teorema di Weierstrass essendo $u(x,t)$ continua sull'insieme $([0,L] \times \{0\}) \cup (\{0\} \times [0,T]) \cup (\{L\} \times [0,T])$ che è chiuso e limitato.

Ragioniamo per assurdo e supponiamo che esista un punto in $(x_0, t_0) \in (0,L) \times (0,T]$ in cui il massimo, sia più grande del valore M. Il punto (x_0, t_0) deve stare sull'insieme $(0,L) \times (0,T]$ ossia $u(x_0,t_0) = M + \varepsilon > M$. Il punto (x_0,t_0) deve chiaramente essere di massimo pure per la restrizione $u(x,t)|_{t=t_0}$ e quindi, per il teorema di Fermat sulle funzioni derivabili, $u_x|_{(x_0,t_0)} = 0$ (scriveremo $u_x(x_0,t_0) = 0$) e $u_{xx}|_{(x_0,t_0)} \ge 0$ (scriveremo $u_{xx}(x_0,t_0) \ge 0$). Inoltre deve essere $u_t|_{(x_0,t_0)} \ge 0$ (scriveremo $u_t(x_0,t_0) = 0$) e $u_{tt}|_{(x_0,t_0)} \ge 0$ (scriveremo $u_{tt}(x_0,t_0) \ge 0$).

Facciamo vedere che da quanto scritto segue che esiste un punto $(x_1,t_1) \in (0,L) \times (0,T]$ in cui $u_t(x_1,t_1) > 0$ e $u_{xx}(x_1,t_1) \le 0$ ma questo è impossibile in quanto nel punto (x_1,t_1) deve essere verificata l'equazione del calore.

Sia $v(x,t) = u(x,t) + k(t_0 - t)$: $[0,L] \times [0,T] \to \mathbf{R}$ e scegliamo k in modo tale che $k(t_0 - t) < kT < \varepsilon/2$. In tal modo abbiamo

1) se $x = 0$, oppure $x = L$, oppure $t = 0$, si ha $v(x,t) \le M + \varepsilon/2$.
2) $v(x_0,t_0) = u(x_0,t_0) = M + \varepsilon$,

La funzione $v(x,t)$ per Weierstrass ha un massimo in un punto (x_1, t_1) e siccome è vera 1), tale punto deve verificare $(x_1, t_1) \in (0, L) \times (0, T]$. Ciò vuol dire che $v_{xx}(x_1, t_1) \le 0$, e $v_t(x_1, t_1) \ge 0$ ma $v_{xx}(x_1, t_1) = u_{xx}(x_1, t_1)$ e $u_t(x_1, t_1) = v_t(x_1, t_1) + k \ge k$. Ma allora otteniamo

$$v_t(x_1, t_1) - c^2 v_{xx}(x_1, t_1) \ge 0 \quad \Longrightarrow \quad u_t(x_1, t_1) - c^2 u_{xx}(x_1, t_1) \ge k > 0$$

il che è assurdo. Per il minimo si prende $-u(x,t)$ al posto di $u(x,t)$.$\blacksquare$

Dal PMM segue il teorema di unicità .

Teorema di unicità *Se due funzioni $u_1(x,t)$ e $u_2(x,t)$ continue in $[0, L] \times [0, T]$ verificano l'equazione del calore*

$$u_t = c^2 u_{xx} + f(x,t) \qquad 0 < x < L, \quad t > 0$$

con le stesse condizioni iniziali e al contorno

$$u_1(x,0) = u_2(x,0) = \varphi(x), \quad u_1(0,t) = u_2(0,t) = \mu_1(t), \quad u_1(L,t) = u_2(L,t) = \mu_2(t)$$

allora $u_1(x,t) \equiv u_2(x,t)$

Dimostrazione Definiamo la funzione $v(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$ che soddisfa l'equazione

$$v_t = c^2 v_{xx} \qquad 0 < x < L, \quad t > 0$$

con condizioni iniziali e al contorno

$$v_1(x,0) = v_2(x,0) = 0, \quad v_1(0,t) = v_2(0,t) = 0, \quad v_1(L,t) = v_2(L,t) = 0$$

Per il PMM il massimo ed il minimo della funzione è aasunto al tempo $t = 0$ oppure ai bordi $x = 0$, o $x = L$ ma valgono zero e quindi $v \equiv 0$ da cui $u_1 \equiv u_2$. $\blacksquare$

6. Equazione del calore, esistenza

In questa sezione calcoliamo la soluzione della equazione del calore nelle varie versioni, omogenea, non omogenea, con condizioni iniziali ed al bordo nulle e non nulle.

Cominciamo con l'equazione omogenea e condizioni al bordo nulle ossia

$$
\begin{aligned}
&u_t = c^2 u_{xx} \quad 0 < x < L, \quad t > 0 \\
&u(x,0) = \varphi(x), \ u(0,t) = u(L,t) = 0
\end{aligned}
$$

Come con l'equazione delle onde, scriviamo $u(x,t) = A(x)B(t)$ da cui

$$
B'A - c^2A''B \quad \Longrightarrow \frac{B'}{c^2B} = -\lambda, \quad -\lambda\frac{A}{A''} = 1 \ \Longrightarrow \begin{cases} A'' + \lambda A = 0, \ A(0) = A(L) = 0 \\ B' + c^2B = 0 \end{cases}
$$

Come prima abbiamo $A_n(x) = \sin\dfrac{\pi n}{L}x$, e $\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{L}\right)^2$, $n = 1, 2, \ldots.$ $B - n(t) = B_n(0)e^{-c^2\lambda_n t}$ da cui definiamo $u_n(x,t) = B_n(0)e^{-c^2\lambda_n t}\sin\frac{\pi n}{L}x,$. Come con l'equazione delle onde estendiamo in modo dispari la funzione $\varphi(x)$ dimodoché

$$
\varphi(x) = u(x,0) = \sum_{n=1}^{+\infty} B_n(0)\sin\frac{\pi n}{L}x, \implies B_n(0) = \varphi_n = \frac{2}{L}\int_0^L \varphi(x)\sin\frac{\pi n}{L}xdx \tag{6.1}
$$

Alla fine la soluzione è

$$
u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} B_n(0)e^{-c^2\lambda_n t}\sin\frac{\pi n}{L}x, \quad B_n(0) = \frac{2}{L}\int_0^L \varphi(x)\sin\frac{\pi n}{L}x, dx \tag{6.2}
$$

È evidente che per $t \to +\infty$ si ha $u(x,t) \to 0$ e questo corrisponde fisicamente al fatto che la sbarra si raffredda portando a zero la sua temperatura.

Dimostrazione della convergenza delle serie ottenute.

$$
u_t(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} B_n(0)(-c^2\lambda_n)e^{-c^2\lambda_n t}\sin\frac{\pi n}{L}x,
$$

$$
u_{xx}(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} B_n(0)(-\lambda_n^2)e^{-c^2\lambda_n t}\sin\frac{\pi n}{L}x,
$$

$$
|(u_n)_t| = \left|-c^2B_n(0)\lambda_n^2 e^{-c^2\lambda_n t}\sin\frac{\pi n}{L}x\right| \le c^2|B_n(0)|\frac{\pi^2n^2}{L^2}e^{-c^2\lambda_n t} = c^2|\varphi_n|\frac{\pi^2n^2}{L^2}e^{-c^2\lambda_n t}
$$

Supponiamo $\sup\limits_{0\le x\le L}|\varphi| \le M$ da cui $|\varphi_n| \le 2M$ da cui

$$
|(u_n)_t| \le 2c^2Mn^2\frac{\pi^2}{L^2}e^{-c^2\lambda_n t} \qquad |(u_n)_{xx}| \le 2Mn^2\frac{\pi^2}{L^2}e^{-c^2\lambda_n t}
$$

Siccome la serie numerica

$$
\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-an^2}
$$

converge per ogni $a > 0$, e converge uniformemente per ogni $a \geq \overline{a} > 0$, possiamo dire che la nostra serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t)$$

converge uniformemente fintantoché $t \geq \overline{t} > 0$. Quindi converge pure la serie che definisce $u(x,t)$. Faccio notare come della funzione $\varphi(x)$ abbiamo assunto solo la limitatezza e che tutte le affermazioni sulla convergenza sono valide per $t \geq \overline{t} > 0$. Se vogliamo che anche per $t = 0$ la serie converga allora dobbiamo enunciare il teorema

Convergenza per $t = 0$. *Se* $\varphi(x)$ *è continua e* $\varphi(0) = \varphi(L) = 0$ *ed inoltre* $\varphi(x)$ *è derivabile a tratti con derivata continua laddove esiste, allora la serie*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} B_n(0) e^{-c^2\lambda_n t} \sin\frac{\pi n}{L}x, \qquad B_n(0) = \varphi_n = \frac{2}{L}\int_0^L \varphi(x)\sin\frac{\pi n}{L}x dx$$

converge e definisce una funzione continua per $t \geq 0$.

Dimostrazione Le condizioni su $\varphi(x)$ sono sufficienti a far si che la sua serie di Fourier di $\varphi(x)$ converga assolutamente ossia $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |\varphi_n| < +\infty$. Ciò implica che anche la serie

$$|\sum_{n=1}^{+\infty} B_n(0) e^{-c^2\lambda_n t} \sin\frac{\pi n}{L}x| \leq |\sum_{n=1}^{+\infty} B_n(0)| < +\infty$$

converge definendo una funzione continua per ogni $t \geq 0$

Soluzione della non omogenea e condizioni al bordo nulle

Dia data la equazione

$$\begin{aligned} &u_t - c^2 u_{xx} = f(x,t) \quad 0 < x < L, \quad 0 < t > 0 \\ &u(x,0) = 0, \ u(0,t) = u(L,t) = 0 \end{aligned}$$

Scriviamo la soluzione come $u(x,t) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x,t)\sin\frac{\pi k}{L}x$ e $f(x,t) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(t)\sin\frac{\pi k}{L}x$, $f_n(t) = \frac{2}{L}\int_0^L f(y,t)\sin\frac{\pi n}{L}y dy$. Sostituendo nella equazione si ha

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sin\frac{\pi n}{L}x\left(\frac{\pi^2 n^2}{L^2}c^2 u_n + u'(t) - f_n(t)\right) = 0 \tag{6.3}$$

La (6.3) è vera se tutti i suoi coefficienti sono nulli ossia

$$\frac{\pi^2 n^2}{L^2}c^2 u_n + u'(t) - f_n(t) = 0 \tag{6.4}$$

Una volta trovato $u_n(t)$ la soluzione è

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(t) \sin \frac{\pi n}{L} x \tag{6.5}$$

e la condizione inziale diventa

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(0) \sin \frac{\pi n}{L} x = 0$$

che può verificarsi solo se $u_n(0) = 0$. Da ciò segue che l'equazione (6.4) è risolta da

$$u_n(t) = \int_0^t e^{-c^2 \lambda_n^2 (t-\tau)} f_n(\tau) d\tau$$

per cui la (6.3) diventa

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sin \frac{\pi n}{L} x \left(\int_0^t e^{-c^2 \lambda_n^2 (t-\tau)} f_n(\tau) d\tau \right)$$

Usando l'espansione di Fourier di $f(x,t)$ abbiamo

$$u(x,t) = \int_0^t \int_=^L \left(\frac{2}{L} \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-c^2 \lambda_n^2 (t-\tau)} \sin \frac{\pi n}{L} x \sin \frac{\pi n}{L} z \right) f(z,t) dz dt \doteq$$

$$\doteq \int_0^t \int_0^L G(x,z,t-\tau) f(z,\tau) dz d\tau$$

$$G(x,z,t-\tau) = \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-c^2 \lambda_n^2 (t-\tau)} \sin \frac{\pi n}{L} x \sin \frac{\pi n}{L} z$$

7. Problema ai limiti generale

Vogliamo trovare la soluzione di la soluzione del problema

$$\begin{aligned} & u_t = c^2 u_{xx} + f(x,t), \quad u(x,0) = \varphi(x) \\ & u(0,t) = \mu_1(t), u(L,t) = \mu_2(t) \end{aligned}$$

Definiamo $u(x,t) = U(x,t) + v(x,t)$ da cui, sostituendo si ha

$$\begin{aligned} & v_t - c^2 v_{xx} = f(x,t) - [U_t - c^2 U_{xx}] \\ & v(x,0) = u(x,0) - U(x,0) = \varphi(x) - U(x,0) \\ & v(0,t) = u(0,t) - U(0,t) = \mu_1(t) - U(0,t), \qquad v(L,t) = u(L,t) - U(L,t) = \mu_2(t) - U(L,t) \end{aligned}$$

Ora imponiamo $\mu_1(t) - U(0,t) = 0$ e $\mu_2(t) - U(L,t) = 0$ per cui $U(x,t) = \mu_1(t) + \dfrac{x}{L}(\mu_2(t) - \mu_1(t))$. $U(x,0) = \mu_1(0) + \dfrac{x}{L}(\mu_2(0) - \mu_1(0))$. L'equazione diventa

$$\begin{aligned} & v_t - c^2 v_{xx} = f(x,t) - [U_t - c^2 U_{xx}] \\ & v(x,0) = \varphi(x) - \mu_1(0) - \frac{x}{L}(\mu_2(0) - \mu_1(0)) \\ & v(0,t) = 0, \qquad v(L,t) = 0 \end{aligned}$$

8. Considerazioni fisiche

Dall'analisi delle formule (1.24) e (6.2) emerge che l'equazione delle onde è un buon modello per la propagazione ondosa ma non così per l'equazione del calore. Detto rapidamente, l'equazione delle onde ammette velocità di propagazione finita c mentre l'equazione del calore ammette velocità di propagazione infinita e questo fa si che l'equazione (5.1) vada corretta per renderla più aderente alla realta.

Vediamo perché. Prendiamo l'equazione (1.1) con $g(x) \equiv 0$ e $f(x)$ concentrata in $(L/2-\delta, L/2+\delta)$ con $0 < \delta < L/100$. Per $t > 0$ inizieranno a propagarsi due onde verso destra e verso sinistra secondo la formula (1.23) ma è chiaro che per tempi $t_x < (x - L/2 - \delta)/c$, il punto di cordinate $x > L/2$ non sarà stato sottoposto ad alcuna sollecitazione. Ciò è coerente con il fatto intuitivo per cui I punti di coordinate minori di $L/2 - \delta$ o maggiori di $L/2 + \delta$, devono attendere un pò di tempo prima di accorgersi del passaggio dell'onda.

Se si gaurda invece alla formula (6.2), si vede che per $t = 0$ la funzione vale $u(x, 0) = \varphi(x)$ ed immaginiamo che $\varphi(x)$ sia concentrata in un piccolo intorno di $x = L/2$. Ma non appena $t > 0$ la formula (6.2) non esprime più una funzione concentrata in un intorno ossia $u(x, t) \neq 0$ in generale tranne i punti $x = 0$ o $x = L$. Ciò equivale a dire che la velocità di propagazione del calore è infinita ma è fisicamente non realistico. Per questo si considera il modello di propogazione del calore dato dalla equazione

$$v_t = c^2 v_{xx} + \beta v_x + \gamma v$$

$\beta, \gamma > 0$, e ponendo $v(x, t) = e^{\mu x + \lambda t} u(x, t)$ con $\mu = -\beta/(2c^2)$, $\lambda = \gamma - \beta^2/(2c^2)$ l'equazione diventa

$$u_t = c^2 u_{xx}$$

ed evidentemente la presenza di $\mu < 0$ ad esponente tende a smorzare la propagazione del calore in punti lontani dalla sorgente.

9. Esempi

1) Risolvere l'equazione:

$$\begin{aligned} & u_{tt} - u_{xx} = \sin x, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0 \\ & u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0, \quad 0 \le x \le \pi \\ & u(0,t) = 0, \quad u(\pi,t) = 0, \quad t \ge 0 \end{aligned} \tag{9.1}$$

È una equazione non omogenea con condizioni al bordo nulle per cui la soluzione si scrive seguendo (2.2) (2.3) da cui, tenendo conto che in questo caso $\varphi(x) = \psi(x) = 0$ e che $f(x,t) = \sin x$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (u_k'' + k^2 u_k) \sin kx = \sin x$$

e quindi

$$\begin{aligned} & k \neq 1, \qquad u_k'' + u_k = 0 \quad \Longrightarrow \quad u_k(t) = a_k \cos kt + b_k \sin kt \\ & k = 1, \qquad u_1'' + u_1 = 1 \quad \Longrightarrow \quad u_k(t) = a_1 \cos kt + b_1 \sin kt + 1 \end{aligned} \tag{9.2}$$

La condizione iniziale $u(x,0) = 0$ impone $a_k = 0$ se $k \neq 1$, mentre $a_1 + 1 = 0$ dà $a_1 = -1$. La condizione iniziale $u_t(x,0) = 0$ impone $b_k \equiv 0$ ed alla fine la soluzione è

$$u(x,t) = \sin x (1 - \cos t)$$

Siccome la disomogeneità $\sin x$ è stazionaria, possiamo anche procedere nel modo che segue (vedi (2.4) e seguenti). Scriviamo $u(x,t) = U(x) + V(x,t)$ da cui

$$\begin{aligned} & V_{tt} - V_{xx} = \sin x + U_{xx}, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0 \\ & U(x) + V(x,0) = 0, \quad V_t(x,0) = 0, \quad 0 \le x \le \pi \\ & U(0) + V(0,t) = 0, \quad U(\pi) + V(\pi,t) = 0, \quad t \ge 0 \end{aligned} \tag{9.3}$$

Risolviamo l'equazione al bordo

$$\begin{aligned} & U_{xx} = -\sin x, \quad 0 < x < \pi, \\ & U(0) = 0, \quad U(\pi) = 0 \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad U(x) = a + bx + \int_0^x dy \int_0^y dz \sin z \tag{9.4}$$

ossia

$$U(x) = a + bx + \sin x, \quad U(0) = 0 \;\Rightarrow\; a = 0, \qquad U(\pi) = 0 \;\Rightarrow\; b\pi = 0 \;\Rightarrow\; b = 0$$

e quindi $U(x) = -\sin x$. Il sistema (9.3) diventa

$$\begin{aligned} & V_{tt} - V_{xx} = 0, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0 \\ & V(x,0) = -\sin x, \quad V_t(x,0) = 0, \quad 0 \le x \le \pi \\ & V(0,t) = 0, \quad V(\pi,t) = 0, \quad t \ge 0 \end{aligned} \tag{9.5}$$

Usiamo la (1.23) e quindi $V(x,t) = -\frac{1}{2}(\sin(x-t) + \sin(x+t) = -\sin x \cos t$ e sommando con $U(x)$ abbiamo $u(x,t) = \sin x(1 - \cos t)$

9. Esempio 2

Risolvere l'equazione:

$$\begin{aligned} &u_{tt} - u_{xx} = \sin t, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0 \\ &u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0, \quad 0 \le x \le \pi \\ &u(0,t) = 0, \quad u(\pi,t) = 0, \quad t \ge 0 \end{aligned} \tag{9.6}$$

È una equazione non omogenea con condizioni al bordo nulle per cui la soluzione si scrive seguendo (2.2) (2.3) da cui, tenendo conto che in questo caso $\varphi(x) = \psi(x) = 0$ e che $f(x,t) = \sin t$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (u_k'' + k^2 u_k) \sin kx = 1 \cdot \sin t \tag{9.7}$$

per cui dobbiamo trovare la serie di Fourier della funzione che vale 1 se $0 < x < \pi$ e -1 se $-\pi < x < 0$. I coefficienti sono pari a

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin kx \, dx = -\frac{2}{k\pi} \cos kx \Big|_{x=0}^{\pi} = -\frac{2}{k\pi}((-1)^k - 1) = \begin{cases} 0 & k \text{ pari} \\ \dfrac{4}{k\pi} & k \text{ dispari} \end{cases}$$

e quindi (9.7) diventa

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (u_k'' + k^2 u_k) \sin kx = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k \sin kx \sin t, \qquad c_k = \begin{cases} 0 & k \text{ pari} \\ \dfrac{4}{k\pi} & k \text{ dispari} \end{cases} \tag{9.8}$$

Ne segue

$$u_k'' + k^2 u_k = 0, \quad k \text{ pari}, \qquad u_k'' + k^2 u_k = c_k \sin t \qquad k \text{ dispari}$$

$$u_k'' + k^2 u_k = 0 \implies u_k(t) = a_k \cos kt + b_k \sin kt$$

$$u_k'' + k^2 u_k = c_k \sin t \qquad \implies \qquad u_k(t) = a_k \cos kt + b_k \sin kt + \frac{c_k}{k^2 - 1} \sin t \quad k \ne 1$$

$$u_1'' + u_1 = c_1 \sin t \qquad \implies \qquad u_1(t) = a_1 \cos t + b_1 \sin t - \frac{c_1}{2} t \cos t \quad k = 1$$

Notare che per $k = 1$ nasce una risonanza. La condizione $u(x,0) = 0$ implica

$$\sum_{k=1}^{+\infty} u_k(0) \sin kx = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \sin kx = 0 \qquad \implies \qquad a_k = 0$$

mentre $u_t(x,0) = 0$ dà

$$\sum_{k=1}^{+\infty} u_k'(0) \sin kx = 0 \qquad \implies \qquad u_k' = 0$$

ossia

$$kb_k + \frac{c_k}{k^2 - 1} = 0, \quad k \ne 1, \qquad b_1 - \frac{c_1}{2} = 0, \qquad b_k = -\frac{c_k}{k(k^2 - 1)}, \quad b_1 = c_1/2$$

Dalla successione $\{b_k\}$ si costruisce $u(x,t)$ ed a causa della risonanza la soluzione non è limitata per $t \to +\infty$.

9. Esempio 3

Risolvere l'equazione:

$$\begin{aligned} & u_t - u_{xx} = \sin x, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0 \\ & u(x,0) = 0, \quad 0 \le x \le \pi \\ & u(0,t) = 0, \quad u(\pi,t) = 0, \quad t \ge 0 \end{aligned} \tag{9.9}$$

Come al solito la soluzione è espressa come $u(x,t) = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k(t) \sin kx$ da cui

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \big(u'_k + k^2 u_k\big) \sin kx = \sin x \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} u'_k + k^2 u_k = 0 & k \neq 1, \\ u'_1 + u_1 = 1 \end{cases}$$

$u_k(t) = u_k(0) e^{-k^2 t}$, $u_1(t) = u_1(0) e^{-t} + 1$.

$$u(x,t) = (1 + u_1(0) e^{-t}) \sin x + \sum_{k=1}^{+\infty} u_k(0) e^{-k^2 t} \sin kx$$

$$u(x,0) = (1 + u_1(0)) \sin x + \sum_{k=1}^{+\infty} u_k(0) \sin kx = 0 \quad \Longrightarrow \quad u_1(0) = -1, \quad u_k(0) = 0, \; k \neq 1$$

Alla fine abbiamo

$$u(x,t) = (1 - e^{-t}) \sin x \xrightarrow[t \to +\infty]{} \sin x$$