1 IL “LINGUAGGIO MATEMATICO”

Il linguaggio matematico moderno è basato su due concetti fondamentali: la ‘teoria degli insiemi’ e la ‘logica delle proposizioni’.

La teoria degli insiemi ci assicura che gli oggetti di cui parliamo sono delle ‘cose’ ben definite: gli insiemi sono caratterizzati dal fatto che possiamo stabilire con esattezza se un qualcosa (che chiameremo ‘elemento’) sta o meno nell’insieme.

Lo stesso principio vale per le proposizioni: le frasi che si usano in matematica non devono essere ambigue, ovvero bisogna sapere dire esattamente se una frase è vera o è falsa.

Le proposizioni logiche vengono espresse usando una notazione a cui bisogna abituarsi: si usano

Connettivi logici

$$\neg \text{ (non)};\quad \wedge \text{ (e)};\quad \vee \text{ (oppure)};$$

$$\Longrightarrow\text{(se...allora/...implica...)};\quad \Longleftrightarrow\text{(...se e solo se...)}$$

Quantificatori

$$\forall \text{ (per ogni)};\qquad \exists \ldots : \ldots \text{ (esiste...tale che...)}$$

La descrizione di una frase accettabile in matematica è quella di una proposizione:

Proposizioni

“frasi sensate che non contengono variabili libere e che sono vere oppure false”

Insiemi e sottoinsiemi

In generale gli insiemi verranno definiti con una scrittura del tipo

$$A = \{x \in \mathcal{U} : P(x)\}$$

che si legge “A è l’insieme dei punti x di $\mathcal{U}$ tali che $P(x)$ vale, dove P è una proposizione che contiene la variabile x: se $P(x)$ è vera allora x appartiene all’insieme, se $P(x)$ è falsa allora no. Per quanto riguarda l’“ambiente” $\mathcal{U}$ in cui si trovano i nostri elementi x, per noi sarà sempre un insieme di numeri o di funzioni.

Altre volte un insieme è descritto semplicemente mediante un elenco

$$A = \{a, b, c, d\}.$$

DOMANDA: in questo caso possiamo riscrivere A nella forma sopra? Che cosa è $P(x)$ in questo caso?

Notazioni:

$$x \in A \text{ (x appartiene all'insieme A)}$$

$$A \subseteq B \ (A \text{ è } \textit{sottoinsieme} \text{ di } B)$$

ovvero ogni elemento di A è anche un elemento di B, ovvero $x \in A \Longrightarrow x \in B$.

$$A = B \Longleftrightarrow (x \in A \Longleftrightarrow x \in B) \Longleftrightarrow (A \subseteq B \text{ e } B \subseteq A)$$

(ovvero due insiemi sono uguali se e solo se contengono gli stessi elementi; un modo per vedere se due insiemi sono uguali è verificare che ognuno è contenuto nell'altro)

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ o } x \in B\} \ (\textit{unione})$$

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ e } x \in B\} \ (\textit{intersezione})$$

Notare che se A è definita dalla proposizione $P(x)$ e B dalla $Q(x)$ allora $A \cup B$ è definita dalla proposizione $P(x) \vee Q(x)$, mentre $A \cap B$ è definita dalla proposizione $P(x) \wedge Q(x)$

$$\emptyset \text{ denota l'} \textit{insieme vuoto}$$

L'insieme vuoto è definito dal fatto che $x \in \emptyset$ è sempre falsa. È importante che l'insieme vuoto sia definito, in modo che, per esempio, $A \cap B$ sia bene definito anche quando non c'è alcun elemento che stia sia in A che in B. Si ha la "strana proprietà" che "ogni proposizione e' vera sull' insieme vuoto": dato che non contiene nessun elemento, la proposizione in questione non e' mai falsa sull' insieme vuoto (e quindi e' sempre vera).

$$A \text{ e } B \text{ sono } \textit{disgiunti} \text{ se } A \cap B = \emptyset$$

$$A \setminus B = \{x : x \in A \text{ e non } x \in B\} \qquad \text{(si legge A } \textit{meno} \text{ B)}$$

$$A \subset B \Longleftrightarrow A \subseteq B \ e \ B \setminus A \neq \emptyset \ (\textit{stretta inclusione} \text{ di } A \text{ in } B)$$

Insiemi numerici

In generale gli insiemi che tratteremo saranno insiemi di numeri. I principali insiemi numerici che tratteremo sono:

N insieme dei numeri *naturali* o interi positivi

ovvero $0, 1, 2, 3, \ldots$

Z insieme dei numeri *interi*

ovvero $0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots$

Q insieme dei numeri *razionali*

ovvero le frazioni m/n dove $m, n \in \mathbf{Z}$ e $n \neq 0$.

R insieme dei numeri *reali*

quali per esempio π, $\sqrt{2}$, e (numero di Nepero),...

C insieme dei numeri *complessi*

ovvero numeri della forma $z = a + ib$, con $a, b \in \mathbf{R}$ e $i^2 = -1$.

Abbiamo le inclusioni

$$\mathbf{N} \subseteq \mathbf{Z} \subseteq \mathbf{Q} \subseteq \mathbf{R} \subseteq \mathbf{C}$$

Altri insiemi: $\mathbf{N}^+$, $\mathbf{Q}^+$, $\mathbf{R}^+$ (interi *strettamente* positivi, etc).

Esempio. Per noi spesso gli insiemi di interesse sono gli insiemi di soluzioni di problemi matematici. Per esempio le *soluzioni di un'equazione*

$$A = \{x \in \mathbf{R} \ : \ x^2 - 5x + 6 = 0\}$$

Risolvere l'equazione significa descrivere nel miglior modo possibile l'insieme A; in questo caso significa riscriverlo come un elenco. Questo si fa vedendo che A è uguale a ciascuno dei due insiemi

$$B = \{y \in \mathbf{R} : (y - 2)(y - 3) = 0\},$$

$$C = \{y \in \mathbf{R} : (y - 2) = 0\} \cup \{y \in \mathbf{R} : (y - 3) = 0\} = \{2, 3\}.$$

Il passaggio logico da A a B è la scomposizione in fattori, e da B a C il notare che un prodotto è nullo se e solo se è nullo almeno uno dei suoi fattori.

Esempio. Confrontiamo A, B, C con gli insiemi

$$D = \{2\} \qquad E = \{2, \{2\}\} \qquad F = \{\{2\}\} \qquad G = \{2, 3, 2\}.$$

Allora si ha

$$A = B = C \supseteq D \in E, \qquad D \cap F = \emptyset \qquad D \cup F = E$$

$$A \cap E = D \qquad C \setminus D = \{3\} \qquad G = C.$$

Esempio. $A = \{x \in \mathbf{R} : \sin(1/x) = 0\}$ si può anche scrivere

$$\{x \in \mathbf{R} : 1/x = k\pi \text{ per qualche } k \in \mathbf{Z}\}$$

oppure $\{x \in \mathbf{R} : \exists k \in \mathbf{Z} : \ 1/x = k\pi\}$ oppure

$$\{x \in \mathbf{R} : \exists k \in \mathbf{Z}, \ k \neq 0, \ x = 1/k\pi\}$$

oppure

$$\left\{\frac{1}{\pi}, -\frac{1}{\pi}, \frac{1}{2\pi}, -\frac{1}{2\pi}, \dots\right\}.$$

Notare che quest'ultima scrittura è ambigua (non è detto che sia chiaro cosa significano quei puntini) e quindi le precedenti sono da preferire.

Esercizio. Esprimere come un elenco di punti gli insiemi

$$A = \Big\{x \in \mathbf{R} : \log_{10}(x^2)\ \sin\Big(\frac{1}{x}\Big) = 0\Big\},$$

$$A \cap \mathbf{Z}, \qquad A \cap \{x \in \mathbf{R} : x \geq 0\}.$$

Esempio. Nel corso di Analisi 2 si incontreranno anche insiemi di numeri complessi. Per cui si dovranno descrivere insiemi del tipo

$$\begin{aligned} A &= \Big\{Im(z)\ :\ z^3 = -8i\Big\} \\ &= \Big\{x \in \mathbf{R}\ :\ \exists z \in \mathbf{C},\ x = Im(z),\ z^3 = -8i\Big\} = \{-1, 2\} \end{aligned}$$

(i simboli saranno chiari in Analisi 2, se non sono già noti i numeri complessi).

Dominio di una funzione In generale una funzione f è descritta dal suo dominio di definizione X, il codominio, dove prende i valori e che per noi sarà in genere $\mathbf{R}$, e la 'legge' $x \mapsto f(x)$; in tal caso si scrive $f : X \to \mathbf{R}$.

A volte però è data solo la legge (ovvero il modo di calcolare $f(x)$). In questo caso il DOMINIO (o dominio 'naturale') è definito come il più grande insieme per cui $f(x)$ ha un senso, e viene indicato con $dom\, f$:

$$dom\, f = \{x \in \mathbf{R} : f(x) \text{ è ben definita}\}.$$

Il più delle volte descrivere un dominio di funzione equivale a risolvere una o più *disequazioni* o *sistemi di disequazioni*.

Esempi

(1) $dom \log = \{x \in \mathbf{R} : x > 0\}$ (per log si intende il logaritmo in base naturale (ovvero in base e, il numero di Nepero, che definiremo più avanti) ma in questi esempi ogni base maggiore di 1 va bene);

(2) Se $f(x) = \log(x^2 - x)$, allora

$$dom\, f = \{x \in \mathbf{R} : \log(x^2 - x) \text{ è ben definita}\}$$
$$= \{x \in \mathbf{R} : x^2 - x > 0\} = \{x \in \mathbf{R} : x < 0 \text{ oppure } x > 1\}$$
$$= \{x \in \mathbf{R} : x < 0\} \cup \{x \in \mathbf{R} : x > 1\}.$$

(3) Se $f(x) = \sqrt{\log(x^2 - x)}$, allora

$$dom\, f = \{x \in \mathbf{R} : \sqrt{\log(x^2 - x)} \text{ è ben definita}\}$$
$$= \{x \in \mathbf{R} : \log(x^2 - x) \geq 0\} = \{x \in \mathbf{R} : x^2 - x \geq 1\}$$
$$= \Big\{x \in \mathbf{R} : x \leq \frac{1 - \sqrt{5}}{2}\Big\} \cup \Big\{x \in \mathbf{R} : x \geq \frac{1 + \sqrt{5}}{2}\Big\}.$$

Insiemi prodotto

Se A e B sono insiemi, il PRODOTTO $A \times B$ è definito da

$$A \times B = \{(a, b) \ : \ a \in A, \ b \in B\}$$

Gli oggetti del tipo (a, b) vengono detti COPPIE (o "coppie ordinate"), ed hanno la proprietà che

$$(a, b) = (a', b') \Longleftrightarrow (a = a' \ e \ b = b')$$

(a differenza dell'*insieme* $\{a, b\} = \{b, a\}$)

Possibile definizione: $(a, b) = \{a, \{a, b\}\}$.

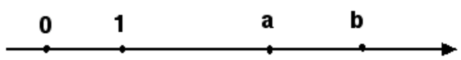
Scriveremo $A \times A = A^2$. È ben noto l'insieme $\mathbf{R}^2$, che si identifica con il "piano Cartesiano". Particolari sottoinsiemi di $\mathbf{R}^2$ che noi studieremo sono i GRAFICI DI FUNZIONI. Il grafico di una funzione f (se non è specificato il dominio di definizione) è dato da

$$\{(x, y) : x \in dom\, f, \ y = f(x)\}.$$

2 PROPRIETÀ DEI NUMERI REALI

L'insieme $\mathbf{R}$ è dotato della *relazione d'ordine* $\leq$ (minore o uguale) per cui dati due numeri a e b sappiamo se è vera $a \leq b$ oppure $b \leq a$, e se tutte due sono vere allora concludiamo che $a = b$. Questa relazione non può essere definita per i numeri complessi (non ha senso porsi il problema se $i \leq 1$...).

L'insieme $\mathbf{R}$ è rappresentato come una retta con un'"orientazione": $a \leq b$ viene rappresentato sulla retta come "a sta alla sinistra di b".



La completezza di R

Ora definiamo alcuni concetti fondamentali a partire dalla relazione d'ordine.

Definizione Sia $A \subseteq \mathbf{R}$. Si dice che M è un MAGGIORANTE per A se

$$\forall a \in A \qquad a \leq M$$

(graficamente: sulla retta M sta "alla destra di tutti i punti di A"). Si dice che M è un MINORANTE per A se

$$\forall a \in A \qquad a \geq M$$

(graficamente: sulla retta M sta "alla sinistra di tutti i punti di A").

Esempi. 1): $A = \{x \in \mathbf{Q} \ : \ -1 \leq x < 1\}$.
I punti 1, 2, 100 sono maggioranti di A. I punti -1, -3, $-7/5$ sono minoranti di A. Il punto 0 non è ne' maggiorante ($0 < \frac{1}{2} \in A$) ne' minorante ($0 > -1 \in A$) di A.

In questo caso l'insieme dei maggioranti di A è $\{x \in \mathbf{R} \ : \ x \geq 1\}$; l'insieme dei minoranti di A è $\{x \in \mathbf{R} \ : \ x \leq -1\}$.

2): $A = \{x \in \mathbf{Q} \ : \ x^2 - 2 \leq 0\}$. In questo caso l'insieme dei maggioranti di A è $\{x \in \mathbf{R} \ : \ x \geq \sqrt{2}\}$.

3): $A = \{x \in \mathbf{R} \ : \ x^2 - 2 \leq 0\}$. L'insieme dei maggioranti di A è ancora $\{x \in \mathbf{R} \ : \ x \geq \sqrt{2}\}$.

4): $K = \mathbf{R}$, $A = \{x \in \mathbf{R} \ : \ x \leq \pi\}$. In questo caso l'insieme dei maggioranti di A è $\{x \in \mathbf{R} \ : \ x \geq \pi\}$, L'insieme dei minoranti è $\emptyset$.

5): $A = \emptyset$. Allora ogni elemento di $\mathbf{R}$ è sia maggiorante che minorante per A.

6): $A = \mathbf{N}$. Non esistono maggioranti. L'insieme dei minoranti è $\{x \in \mathbf{R} \ : \ x \leq 0\}$.

Nota: non è difficile convincersi che l'insieme dei maggioranti di un insieme A puo' avere tre forme:
(1) tutti gli x maggiori o uguali a un certo numero (ovvero una semiretta);
(2) l'insieme vuoto (ovvero A non è superiormente limitato);
(3) tutti i numeri reali.
Quest'ultimo caso si puo' avere solo se A è l'insieme vuoto

□

Definizione Sia $A \subseteq \mathbf{R}$ e $M \in \mathbf{R}$. Si chiama MASSIMO di A un maggiorante M di A tale che $M \in A$ (graficamente: sulla retta M è "il più alla destra di tutti i punti di A"). Si chiama MINIMO di A un minorante M di A tale che $M \in A$ (graficamente: sulla retta M è "il più alla destra sinistra di tutti i punti di A"). .

Il massimo di A viene denotato con $\max A$; il minimo di A viene denotato con $\min A$.

Nell'esempio 1: A ha minimo $= -1$, ma non ha massimo.

Negli esempi 2 e 5: A non ha ne' minimo ne' massimo.

Nell'esempio 3: si ha $\min A = -\sqrt{2}$, $\max A = \sqrt{2}$.

Nell'esempio 4: $\max A = \pi$, $\min A$ non esiste.

Nell'esempio 6: $\min A = \min \mathbf{N} = 0$, $\max A$ non esiste.

Teorema. Massimo e minimo di A sono unici.

DIMOSTRAZIONE (basta provarlo per il minimo) Supponiamo M' e M'' due minimi di A. Allora

$$M' \in A \qquad M' \leq a \quad \forall a \in A \tag{1}$$

$$M'' \in A \qquad M'' \leq a \quad \forall a \in A. \tag{2}$$

Abbiamo allora $M' \leq M''$ e $M'' \leq M'$. Dunque $M'' = M'$. □

Definizione Diremo che A è un sottoinsieme SUPERIORMENTE LIMITATO di $\mathbf{R}$ quando esiste almeno un maggiorante di A:

$$\exists \ M \in \mathbf{R} \ : \ \forall a \in A \quad a \leq M.$$

Diremo che A è un sottoinsieme INFERIORMENTE LIMITATO di $\mathbf{R}$ quando esiste almeno un minorante di A:

$$\exists \ M \in \mathbf{R} \ : \ \forall a \in A \quad a \geq M.$$

Diremo che A è un sottoinsieme LIMITATO di $\mathbf{R}$ quando è sia superiormente limitato che inferiormente limitato.

OSSERVAZIONI: 1) A è un sottoinsieme limitato di $\mathbf{R}$ se e solo se

$$\exists\ M \in \mathbf{R}\ :\ \forall a \in A \quad |a| \leq M.$$

2) A non è superiormente limitato se e solo se

$$\forall\ M \in \mathbf{R} \quad \exists a \in A\ :\ a \geq M.$$

Abbiamo visto che non sempre un insieme ha massimo o minimo, anche se è limitato. Introduciamo ora i concetti di "estremo" (superiore e inferiore), che per definizione esisteranno sempre (almeno per insiemi limitati), e che coincidono con i massimi e minimi se questi esistono

Definizione Sia $A \subseteq \mathbf{R}$. Definiamo l'ESTREMO SUPERIORE di A in $\mathbf{R}$ (che denoteremo con $\sup A$) il minimo dei maggioranti di A. Definiamo l'ESTREMO INFERIORE di A in $\mathbf{R}$ (che denoteremo con $\inf A$) il massimo dei minoranti di A.

NOTA: $\sup A$ e $\inf A$, se esistono, sono unici (per l'unicità di minimo e massimo).

Nell'esempio 1: si ha $\sup A = 1$, $\inf A = -1$.

Nell'esempio 2: $\sup A = \sqrt{2}$, $\inf A = -\sqrt{2}$, ma non esistono $\sup A$ e $\inf A$ in $\mathbf{Q}$.

Nell'esempio 3: $\sup A = \sqrt{2}$, $\inf A = -\sqrt{2}$.

Nell'esempio 4: $\sup A = \pi$, ma non esiste $\inf A$.

Nell'esempio 5: $A = \emptyset$ non ha ne' sup ne' inf in $\mathbf{R}$.

Nell'esempio 6: $\inf \mathbf{N} = 0$, ma non esiste $\sup \mathbf{N}$. $\square$

Teorema. *Sia $A \subseteq \mathbf{R}$. Allora:*

i) se $\exists \max A$ allora A è sup. lim. e $\sup A = \max A$;

ii) se $\exists \min A$ allora A è inf. lim. e $\inf A = \min A$;

iii) se $\exists \sup A$ allora ($\exists \max A \Longleftrightarrow \sup A \in A$);

iv) se $\exists \inf A$ allora ($\exists \min A \Longleftrightarrow \inf A \in A$).

DIMOSTRAZIONE i) $M = \max A \Longrightarrow M$ è maggiorante di $A \Longrightarrow A$ è sup. lim. Se M' è maggiorante di A allora in particolare $M' \geq M$ e quindi M è il min dei maggioranti di A.

ii) si dimostra alla stessa maniera di i).

iv) supponiamo $\exists \inf A$. Se $\exists \min A$ allora per ii) $\inf A = \min A \in A$. Se $M = \inf A \in A$, per definizione $M \leq a\ \forall a \in A$ e quindi verifica la definizione di $\min A$.

iii) si dimostra come iv). $\square$

Teorema. $\mathbf{R}$ è completo, *ovvero ogni suo sottoinsieme non vuoto superiormente limitato ammette estremo superiore in* $\mathbf{R}$.

Non dimostreremo questo teorema. Notiamo solo che $\mathbf{Q}$ non è completo (esempio 2 sopra).

NOTA: $\emptyset \neq A \subseteq \mathbf{R}$ ed A inf. lim. Allora $\exists \inf A$.

DIMOSTRAZIONE Definiamo $A' = \{x \in \mathbf{R} : -x \in A\}$. A' è sup. lim. Quindi $\exists \sup A'$. Allora $-\sup A' = \inf A$. $\square$

Esempi

1. Troviamo, se esistono, sup/inf, max/min dell'insieme

$$A = \Big\{\frac{1}{n} : n \in \mathbf{N}, n > 0\Big\}.$$

A è composto dai numeri

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4}, \dots .$$

Vediamo subito che $1 \in A$ e $\frac{1}{n} \leq 1$ per ogni $n \in \mathbf{N}$, $n > 0$. Questa è la definizione che ci dice che $\max A = 1$ (e quindi anche $\sup A = 1$).

Per quanto riguarda il minimo e l'estremo inferiore, vediamo che per 'n grande' i numeri $1/n$ sono 'piccoli'. Questo ci suggerisce che 0 sia l'estremo inferiore. Questo è dimostrato se

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists a \in A\ :\ a < \varepsilon$$

(fermatevi a interpretare questa formula!) ovvero

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n \in \mathbf{N} : \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Se cio' non fosse esisterebbe $\varepsilon > 0$ tale che

$$n < \frac{1}{\varepsilon}\ \forall n \in \mathbf{N},$$

ovvero $\mathbf{N}$ sarebbe superiormente limitato (cosa che non è).

Chiaramente 0 non appartiene all'insieme A e quindi A non ammette minimo.

2. Troviamo, se esistono, sup/inf, max/min dell'insieme

$$A = \Big\{\frac{(-1)^n}{n+3} : n \in \mathbf{N}\Big\}.$$

Notiamo che $(-1)^n = 1$ se n è pari e $(-1)^n = -1$ se n è dispari. A è composto dai numeri

$$\frac{1}{3},\ -\frac{1}{4},\ \frac{1}{5},\ -\frac{1}{6},\ \frac{1}{7},\ -\frac{1}{8}, \dots .$$

Quindi A si può scrivere come $B \cup C$, dove

$$B = \left\{ \frac{1}{3}\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{7}, \dots \right\}$$

e

$$C = \left\{ -\frac{1}{4}\ -\frac{1}{6},\ -\frac{1}{8}, \dots \right\}$$

Come nell'esempio precedente si vede che $\max B = 1/3$ e $\min C = -1/4$. È facile vedere che $\max A = \max B = 1/3$ e $\min A = \min C = -1/4$. Infatti, per esempio, $\sup A = \sup(B \cup C) = \sup B$, dato che gli elementi di C sono tutti negativi.

3. Troviamo, se esistono, sup/inf, max/min dell'insieme

$$A = \left\{ \sin\left(n\frac{\pi}{3}\right) : n \in \mathbf{N} \right\}.$$

In questo caso (notiamo che, sfruttando la periodicità di $\sin x$ basta calcolare solo i primi 6 valori)

$$A = \left\{ \sin\left(n\frac{\pi}{3}\right) : n = 1, \dots, 6 \right\} = \left\{ -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2} \right\}.$$

In questo caso, banalmente

$$\max A = \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \min A = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$