3 LA RETTA REALE ESTESA

Abbiamo visto che i concetti di sup e inf sono utili per descrivere proprietà di insiemi superiormente/inferiormente limitati. Per coprire con questi concetti tutti gli insiemi abbiamo bisogno di fare in modo di potere parlare sempre di maggioranti/minoranti (anche per insiemi non limitati). Per questo bisogna 'estendere' i numeri reali, introducendo due 'punti esterni'.

Definizione I SIMBOLI $+\infty$ E $-\infty$: accanto ai numeri reali si introducono i simboli $+\infty$ (si legge PIÙ INFINITO) e $-\infty$ (MENO INFINITO).

Definizione RETTA REALE ESTESA $\overline{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ (alcuni testi usano il simbolo $\mathbf{R}^*$ al posto di $\overline{\mathbf{R}}$). Si estende la relazione d'ordine $\leq$ ponendo

$$-\infty \leq x \leq +\infty$$

per tutti gli $x, y \in \overline{\mathbf{R}}$.

Osservazione: qualunque sia l'insieme $A \subseteq \overline{\mathbf{R}}$ $+\infty$ è maggiorante di A (e $-\infty$ è minorante di A).

Teorema. Estendendo la definizione di estremo superiore ed estremo inferiore a sottoinsiemi di $\overline{\mathbf{R}}$, si ha che per ogni $A \subseteq \mathbf{R}$ esistono $\sup A$ e $\inf A \in \overline{\mathbf{R}}$. Se $A \subseteq \mathbf{R}$, allora

(i) $\sup A = +\infty \Longleftrightarrow A$ non è sup. lim.;

(ii) $\inf A = -\infty \Longleftrightarrow A$ non è inf. lim.;

(iii) $\sup \emptyset = -\infty$, $\inf \emptyset = +\infty$.

DIMOSTRAZIONE (per il sup) $A \neq \emptyset$. Se $+\infty \in A$, allora $+\infty = \sup A = \max A$. Escludendo il caso $A = \{-\infty\}$, resta da considerare il caso $A \subseteq \mathbf{R}$.

i) A sup. lim. $\Longrightarrow \exists \sup A \in \mathbf{R} \Longrightarrow \exists \sup A \in \overline{\mathbf{R}}$; A non sup. lim. $\Longleftrightarrow$ $\{\text{maggioranti}\} = \{+\infty\} \Longleftrightarrow \sup A = +\infty$;

ii) stesso ragionamento;

iii) $A = \emptyset \Longrightarrow \{\text{maggioranti}\} = \overline{\mathbf{R}} \Longrightarrow \sup \emptyset = -\infty$ e $\inf \emptyset = +\infty$ $\square$

Esempi. $\sup \mathbf{N} = +\infty$; $\max \overline{\mathbf{R}} = +\infty$

Intervalli di $\overline{\mathbf{R}}$

Spesso gli insiemi che studieremo si potranno descrivere come unione di insiemi più semplici: gli intervalli.

Definizione $I \subseteq \overline{\mathbf{R}}$ è INTERVALLO $\Longleftrightarrow (\forall x, y \in I \ x < z < y \Longrightarrow z \in I)$, ovvero: se due punti x e y stanno in I allora tutti i punti compresi tra questi stanno ancora in I.

Notazione: Se I è un intervallo può essere di una delle quattro forme ($a, b \in \overline{\mathbf{R}} \ \ a \leq b$)

$[a, b] = \{x \in \overline{\mathbf{R}} : a \leq x \leq b\}$,
$(a, b] = \{x \in \overline{\mathbf{R}} : a < x \leq b\}$,
$[a, b) = \{x \in \overline{\mathbf{R}} : a \leq x < b\}$,
$(a, b) = \{x \in \overline{\mathbf{R}} : a < x < b\}$.

Si usa anche la notazione $]a, b[$ per (a, b), $]a, b]$ per $(a, b]$, etc.

a e b vengono detti ESTREMI (inferiore e superiore) dell'intervallo I, e, in effetti, $a = \inf I$ e $b = \sup I$.

Si dice che l'intervallo I è CHIUSO in a (o in b) se $a \in I$ (rispettivamente, $b \in I$).
Si dice che l'intervallo I è APERTO in a (o in b) se $a \notin I$ (rispettivamente, $b \notin I$).

Esempi: 1) $[0, 1] = \{x \in \overline{\mathbf{R}} : \ 0 \leq x \leq 1\} = \{x \in \mathbf{R} : \ 0 \leq x \leq 1\}$;

2) $[0, 0] = \{x \in \overline{\mathbf{R}} : \ 0 \leq x \leq 0\} = \{0\}$;

3) $(-\infty, \pi] = \{x \in \overline{\mathbf{R}} : \ \infty < x \leq \pi\} = \{x \in \mathbf{R} : \ x \leq \pi\}$;

4) $[-\infty, +\infty] = \overline{\mathbf{R}}$.

Se I è intervallo limitato, allora chiamiamo AMPIEZZA di I, il numero

$$\sup I - \inf I.$$

Gli intervalli della forma $(-\infty, b]$ e $[a, +\infty)$ (a e b in $\mathbf{R}$) sono SEMIRETTE della retta reale.

Esempi: l'ampiezza di $(-7, 3]$ è 10; l'ampiezza di $[\pi, \pi]$ è 0.

Esercizio. Riscrivere gli insiemi visti finora come unioni di intervalli. Per esempio il dominio di $\log x^2$, ovvero $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ si può scrivere come $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, mentre il dominio di $\log(x^2 - x)$ è $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$.

4 ESTREMI DI FUNZIONI

Sia $f : X \to \mathbf{R}$ una funzione di dominio X. Spesso considereremo l'insieme di tutti i punti che si possono raggiungere tramite la funzione f; questo insieme viene chiamato l'IMMAGINE di f.

$$\mathrm{Im}(f) = \{f(x) : x \in X\} = \{y \in \mathbf{R} : \exists x \in X : y = f(x)\}.$$

Per i massimi/minimi, sup/inf dell'immagine di una funzione si adotta una nomenclatura particolare.

Il $\sup\{f(x) : x \in X\}$ viene detto l'ESTREMO SUPERIORE DI f (su X) e il $\max\{f(x) : x \in X\}$ (se esiste) viene chiamato il MASSIMO DI f (su X). Questi numeri vengono denotati con

$$\max_X f, \qquad \sup_X f,$$

rispettivamente (si può omettere X se è chiaro dal contesto; in particolare se non viene specificato in partenza, ovvero se è il dominio 'naturale' della funzione f).

NOTA:

(1) $M \in \mathbf{R}$ è un maggiorante per $\{f(x) : x \in X\}$ se

$$f(x) \leq M \ \forall x \in X.$$

In tal caso si dice che f è LIMITATA SUPERIORMENTE.

(2) esiste il $\max\limits_X f$ se e solo se

$$\text{esiste } x \in X \text{ tale che } f(x) \geq f(y) \ \forall y \in X$$

In tal caso $f(x) = \max\limits_X f$.

NOTA: le definizioni sopra si possono tradurre come proprietà del *grafico* di f; M è maggiorante se e solo se il grafico di f sta tutto al di sotto della retta orizzontale $y = M$, e $y = \sup\limits_X f$ è la più bassa di queste rette. In questo modo, se sono note proprietà del grafico di f, si semplifica il calcolo di max e sup.

Ovviamente, vengono date in modo analogo anche le definizioni di MINIMO ed ESTREMO INFERIORE di una funzione.

Esempi. (si risolvono subito esaminando il grafico di funzioni note)

1. $f(x) = \arctan x$, $X = \mathbf{R}$. Allora

$$\sup\ \arctan = \frac{\pi}{2}, \qquad \inf\ \arctan = -\frac{\pi}{2},$$

e non esistono max e min.

2. $f(x) = \sin x$.
Se $X = \mathbf{R}$ allora $\max \sin = 1$, $\min \sin = -1$.
Se $X = \{0 \leq x < \pi\}$ allora $\max_X sin = 1$, $\min_X \sin = 0$.
Se $X = \{0 < x < \pi\}$ allora $\max_X \sin = 1$, $\inf_X \sin = 0$ ma non esiste $\min_X \sin = 0$ (ovvero sin non ha minimo in X).

3. $f(x) = x^2 - 2$.
Se $X = \mathbf{R}$ allora $\min f = -2$ e $\sup f = +\infty$
Se $X = \{1 \leq x \leq 2\}$ allora $\min f = -1$ e $\max f = 2$
Se $X = \{-1 \leq x \leq 2\}$ allora $\min f = -2$ e $\max f = 2$

4. $f(x) = \dfrac{x+1}{x+2}$ e $X = \{x \in \mathbf{R} : x \geq 1\}$. Allora (ci si riconduce al grafico di $\frac{1}{x}$ scrivendo $f(x) = 1 - \dfrac{1}{x+2}$) $\min f = \frac{2}{3}$, $\sup f = 1$ ma non esiste il $\max f$.

5. $\sup e^x = +\infty$, $\inf x^3 = -\infty$, ecc.

Funzioni monotone

(X è un sottoinsieme di $\mathbf{R}$)

Definizione Una funzione $f : X \to \mathbf{R}$ si dice (monotona) NON DECRESCENTE se mantiene la relazione d'ordine $\leq$, ovvero se

$$x \leq y \Longrightarrow f(x) \leq f(y).$$

Esempi. x, e^x, $\log x$, x^3, ogni funzione costante.

Definizione Una funzione $f : X \to \mathbf{R}$ si dice (monotona) NON CRESCENTE se inverte la relazione d'ordine $\leq$, ovvero se

$$x \leq y \Longrightarrow f(y) \leq f(x).$$

Esempi. L'opposto $-f$ di ogni funzione non decrescente, ogni funzione costante, ecc.

Definizione Una funzione $f : X \to \mathbf{R}$ si dice (monotona) (STRETTAMENTE) CRESCENTE se mantiene la relazione d'ordine $<$, ovvero se

$$x < y \Longrightarrow f(x) < f(y).$$

Esempi. x, e^x, $\log x$, x^3. Non è strettamente crescente ogni funzione costante, ne' la parte positiva.

Definizione Una funzione $f : X \to \mathbf{R}$ si dice (monotona) (STRETTAMENTE) DECRESCENTE se inverte la relazione d'ordine $<$, ovvero se

$$x < y \Longrightarrow f(y) < f(x).$$

Definizione Sia A un sottoinsieme del dominio di f. Una funzione f si dice NON DECRESCENTE (strettamente crescente, ecc.) SU A se la restrizione di f ad A è non decrescente (strettamente crescente, ecc.), ovvero

$$x \le y \Longrightarrow f(x) \le f(y)$$

per ogni $x, y \in A$.

Esempio. x^2 è strettamente crescente su $[0, +\infty)$, strettamente decrescente su $(-\infty, 0]$, ma non è monotona su $(-1, 1)$.

NOTA: Una funzione è non-decrescente se e solo se

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} \ge 0$$

per ogni $x, y \in X$ con $x \ne y$; una funzione è strettamente crescente se e solo se

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} > 0$$

per ogni $x, y \in X$ con $x \ne y$.

NOTA **(monotonia e calcolo degli estremi di una funzione)** Si userà spesso il fatto seguente, che ci dice che per una funzione monotona su unj intervallo il calcolo di massimi/minimi, sup/inf è particolarmente semplice (siete invitati a darne una piccola dimostrazione) :

(1) se $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ è non decrescente allora $\min f = f(a)$ e $\max f = f(b)$;

(2) se $f : (a, b) \to \mathbf{R}$ è strettamente crescente allora non esistono ne' $\min f$ ne' $\max f$.

Esercizio. Estendere questa osservazione a intervalli semi-aperti $(a, b]$ e $[a, b)$.

Esempio. Esistono massimo e minimo di $x^3 + e^x + \log x$ nell'intervallo $I = (1, 2]$? Basta notare che la funzione è strettamente crescente. Quindi il minimo non esiste (perchè 1 non appartiene a I) mentre il massimo è la funzione calcolata in 2, ovvero $2^3 + e^2 + \log 2 = 8 + e^2 + \log 2$.

Alcune funzioni utili

Definizione Il VALORE ASSOLUTO O MODULO di x:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Proprietà del modulo:

$$|x| \geq 0 \qquad |x| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$$

$$|x+y| \leq |x| + |y| \qquad \big||x| - |y|\big| \leq |x-y|$$

$$|x \cdot y| = |x| \cdot |y| \qquad \left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|} \; se \; y \neq 0.$$

Altre funzioni:

la PARTE POSITIVA x^+ definita da

$$x^+ = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

la PARTE NEGATIVA x^- definita da

$$x^- = \begin{cases} -x & \text{se } x \leq 0 \\ 0 & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

Notiamo che $|x| = x^+ + x^-$ e $x = x^+ - x^-$.

Esempio. La parte positiva è una funzione non decrescente ma non è strettamente crescente. Analogamente, la parte negativa è una funzione non crescente ma non è strettamente decrescente. $|x|$ è strettamente crescente su $[0, +\infty)$ e strettamente decrescente su $(-\infty, 0]$. $|x|$ non è monotona su $(-2, 2)$.

□