

5 LE PROPRIETÀ DEI NUMERI NATURALI

Abbiamo usato alcune proprietà dei numeri naturali che conviene mettere in evidenza. Per prima cosa notiamo che $\mathbf{N}$ gode delle due proprietà

- (i) $0 \in \mathbf{N}$;
- (ii) se $n \in \mathbf{N}$ allora $n + 1 \in \mathbf{N}$. (Questa proprietà si esprime dicendo che $\mathbf{N}$ è INDUTTIVO).

Queste due proprietà non sono caratteristica esclusiva di $\mathbf{N}$ (anche $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$ ce l'hanno), ma $\mathbf{N}$ è il più piccolo insieme che soddisfa queste due proprietà, ovvero $\mathbf{N}$ è il più piccolo insieme induttivo che contiene lo 0.

Come conseguenza abbiamo che i numeri naturali non costituiscono un insieme superiormente limitato di $\mathbf{R}$.

Equivalentemente: $\forall x \in \mathbf{R} \exists n \in \mathbf{N} : n > x$.

DIMOSTRAZIONE (Per assurdo) Se $\mathbf{N}$ è superiormente limitato $\implies \exists \sup \mathbf{N} = M$. Allora $M - 1 < \sup \mathbf{N} \implies \exists n \in \mathbf{N} : n > M - 1$ (per definizione di sup) $\implies M < n + 1 \in \mathbf{N}$ ($\mathbf{N}$ è induttivo). Assurdo. $\square$

$\square$

Teorema (Principio di Induzione). Per ogni $n \in \mathbf{N}$ sia p_n una proposizione. Supponiamo che valgano:

- (i) $\forall n \in \mathbf{N} \quad p_n \implies p_{n+1}$
- (ii) p_0 è vera.

Allora $\forall n \in \mathbf{N} \quad p_n$ è vera.

DIMOSTRAZIONE Consideriamo $A = \{n \in \mathbf{N} : p_n \text{ è vera}\}$.

(i) $\implies A$ è induttivo. (ii) $\implies 0 \in A$. Quindi $\mathbf{N} \subseteq A$. Dato che $A \subseteq \mathbf{N}$ si ha $\mathbf{N} = A$. $\square$

Esempi. (1) (“dimostrazione per induzione”) $p_n = “2^n \geq n + 1”$. Verifichiamo i): $1 = 2^0 \geq 0 + 1$ (vera). Verifichiamo (ii): $2^n > n \implies 2^{n+1} = 2 \cdot 2^n \geq 2(n + 1) = 2n + 2 \geq n + 2 = (n + 1) + 1$. Abbiamo quindi dimostrato che $\forall n \in \mathbf{N} \quad 2^n \geq n + 1$.

(2) (“definizione per induzione”) Se $a \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$ si definisce: $a^0 = 1$, $a^{n+1} = a \cdot a^n$. (Questa è una scrittura rigorosa per “ $a^n = a \cdot a \cdots a$ n -volte”)

(3) Il FATTORIALE DI n (o n FATTORIALE):

$$0! = 1, \quad \forall n \in \mathbf{N} \quad (n + 1)! = (n + 1) \cdot n!$$

ovvero (p.es. se $n \geq 3$): $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n - 1) \cdot n$. Quindi: $1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 6$, $4! = 24, \dots$

(4) I COEFFICIENTI BINOMIALI si definiscono per $n, k \in \mathbf{N}$ come

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \frac{n!}{k! (n-k)!} & \text{se } 0 \leq k \leq n \\ 0 & \text{se } k > n \end{cases}$$

(in generale noi li useremo con $0 \leq k \leq n$) In particolare $\binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1$ e

$$\binom{n}{n-1} = \binom{n}{1} = n.$$

Notare che si ha sempre

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Il coefficiente binomiale $\binom{n}{k}$ per $0 \leq k \leq n$ ha anche un'interpretazione combinatoria: è il numero di sottoinsiemi di k elementi di un insieme di n elementi (Verificate che questo è vero per $k = 0, 1$ e $k = n, n-1$).

VARIANTI: (1) Se p_n è definita per $n = k, k+1, \dots$ ($k \in \mathbf{Z}$ fissato; p.es. $k = -2$), e sostituiamo a ii) l'ipotesi " p_k è vera" allora la tesi diventa: " p_n è vera $\forall n \in \mathbf{Z}$ $n \geq k$ ".

(2) Al posto di (i) si può sostituire l'ipotesi

$$"\forall n \in \mathbf{N} (p_0 \vee p_1 \dots \vee p_n) \implies p_{n+1}",$$

oppure: " $\forall n \in \mathbf{N} \setminus \{0\} p_{n-1} \implies p_n$ "

Definizione Una funzione il cui dominio è $\mathbf{N}$ o un sottoinsieme di $\mathbf{N}$ si dice una **SUCCESSIONE**. Se il codominio è $\mathbf{R}$ allora si dice che la successione è *reale*.

NOTAZIONE: si usa in generale la notazione $n \mapsto a_n$ in luogo di $n \mapsto f(n)$, e la successione si denota con $\{a_n\}$.

NOTAZIONE: si possono avere anche successioni definite su sottoinsiemi di numeri interi, cambiando un po' le definizioni. È chiaro che nulla cambia in sostanza se la successione, invece che su $\mathbf{N}$, è per esempio definita su $\{n \in \mathbf{Z} : n \geq -3\}$, ecc.

6 SOMMATORIE. BINOMIO DI NEWTON

Definizione Il simbolo di SOMMA (o SOMMATORIA): data una successione $\{a_n\}$ definiamo:

$$\sum_{k=0}^0 a_k = a_0, \quad \sum_{k=0}^{n+1} a_k = \sum_{k=0}^n a_k + a_{n+1}.$$

La def. di $\sum_{k=0}^n a_k$ è una precisazione rigorosa di

$$a_0 + a_1 + \dots + a_n.$$

IMPORTANTE: i) L'indice k è *mutuo*: ovvero non importa se gli si cambia di nome:

$$\sum_{j=0}^n a_j = \sum_{k=0}^n a_k \quad (= a_0 + a_1 + \dots + a_n);$$

ii) Se si hanno solo un numero finito di termini $a_0, \dots, a_m$ le definizioni si adattano per $n \leq m$;

iii) Si definisce analogamente il simbolo

$$\sum_{k=m}^n a_k \quad (= a_m + a_{m+1} + \dots + a_n);$$

iv) Valgono le proprietà ($m \leq q \leq n$)

$$\sum_{k=0}^n (a_k + b_k) = \sum_{k=0}^n a_k + \sum_{k=0}^n b_k; \quad \sum_{k=0}^n c a_k = c \sum_{k=0}^n a_k;$$

$$\sum_{k=m}^n a_k = \sum_{k=m+p}^{n+p} a_{k-p} = \sum_{k=p-n}^{p-m} a_{p-j};$$

$$\sum_{k=0}^n (a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_0; \quad \sum_{k=m}^n a_k = \sum_{k=m}^q a_k + \sum_{k=q+1}^n a_k.$$

Esempio. Sia $a > 0$. Allora definiamo la successione

$$s_n = \sum_{k=0}^n a^k = 1 + a + a^2 + \dots + a^{n-1} + a^n,$$

ovvero ottenuta come sopra con $a_k = a^k$.

Notiamo che se $a = 1$ allora $s_n = n + 1$, mentre se $a \neq 1$ si ha

$$\begin{aligned} s_n &= \frac{(1-a)}{(1-a)} \sum_{k=0}^n a^k = \frac{1}{1-a} \left(\sum_{k=0}^n a^k - \sum_{k=0}^n a^{k+1} \right) \\ &= \frac{1}{1-a} \left(\sum_{k=0}^n a^k - \sum_{k=1}^{n+1} a^k \right) = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}. \end{aligned}$$

La Formula del Binomio di Newton

Per ogni $a, b \in \mathbf{R}$ (convenendo in questa scrittura che $0^0 = 1$) si ha

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

ovvero (in termini più “imprecisi”):

$$\begin{aligned} (a+b)^n &= \binom{n}{0} a^{n-0} b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \dots \\ &\quad \dots + \binom{n}{n-1} a^{n-(n-1)} b^{n-1} + \binom{n}{n} a^{n-n} b^n \\ &= a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \dots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + b^n \end{aligned}$$

ALTRA SCRITTURA: $\forall x \in \mathbf{R}, n \in \mathbf{N}$

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k.$$

Notare che si ha

$$(1+x)^n = 1 + nx + \dots + nx^{n-1} + x^n.$$

DIMOSTRAZIONE 1) $\forall n, k \in \mathbf{N}$ si ha

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}.$$

(si prova per induzione su k). Basta verificare che

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} \\ &= \frac{n!(k+1)}{k!(k+1)(n-k)!} + \frac{n!(n-k)}{(k+1)!(n-k-1)!(n-k)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{n!((k+1) + (n-k))}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{n!(n+1)}{(k+1)!(n-k)!} \\
&= \frac{(n+1)!}{(k+1)!((n+1) - (k+1))!} = \binom{n+1}{k+1}
\end{aligned}$$

2) Proviamo la formula nella seconda forma: $\forall n \in \mathbb{N}$

$$(p_n) \quad (1+x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k.$$

p_0 è vera:

$$1 = (1+x)^0 = \sum_{k=0}^0 \binom{0}{k} x^k = \binom{0}{0} x^0 = 1 \cdot x^0 = 1.$$

Se p_n è vera, allora

$$\begin{aligned}
(1+x)^{n+1} = (1+x) \cdot (1+x)^n &= (1+x) \cdot \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k \\
&= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{k+1} \\
&= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} x^k \\
&= 1 + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} x^k + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k-1} x^k + x^{n+1} \\
&= 1 + \sum_{k=1}^n \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right) x^k + x^{n+1} \\
&= \binom{n+1}{0} x^0 + \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} x^k + \binom{n+1}{n+1} x^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^k
\end{aligned}$$

ovvero p_{n+1} è vera. □

NOTA: dalla formula provata si ottiene subito la formula “prima versione”: se $a \neq 0$ si scrive $(a+b)^n = a^n \cdot (1 + \frac{b}{a})^n$. □