

7 LIMITI DI SUCCESSIONI NUMERICHE

Definizione Sia $\{a_n\} \subset \mathbf{R}$ una successione; $\{a_n\}$ è INFINITESIMA quando

$$\forall \varepsilon > 0 \exists m \in \mathbf{N} : \forall n \geq m |a_n| \leq \varepsilon;$$

(ovvero i valori di a_n “si avvicinano a 0 quando n diventa grande”);
 $\{a_n\}$ CONVERGE A $L \in \mathbf{R}$ quando $\{a_n - L\}$ è infinitesima:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists m \in \mathbf{N} : \forall n \geq m |a_n - L| \leq \varepsilon$$

(ovvero i valori di a_n si avvicinano a L ; quindi $\{a_n\}$ è infinitesima è equivalente a dire che $\{a_n\}$ converge a 0).

NOTAZIONE: scriveremo $a_n \rightarrow L$.

Esempio. $\left\{(-1)^n \frac{3}{2n}\right\}$ è infinitesima: dato che $\mathbf{N}$ non è limitato (l’“Archimedeità” di $\mathbf{R}$), fissato $\varepsilon > 0 \exists m \in \mathbf{N} : m \geq \frac{3}{2\varepsilon}$, ovvero $\frac{3}{2m} \leq \varepsilon$, per cui, se $n \geq m$

$$\left|(-1)^n \frac{3}{2n}\right| = \frac{3}{2n} \leq \frac{3}{2m} \leq \varepsilon.$$

Teorema. (UNICITÀ: se $\{a_n\}$ converge a L allora L è univocamente determinato)
 $a_n \rightarrow L, a_n \rightarrow L' \implies L = L'$.

DIMOSTRAZIONE Sia $\varepsilon > 0. \exists m, m' \in \mathbf{N} : \forall n \geq \max\{m, m'\} |a_n - L| \leq \varepsilon, |a_n - L'| \leq \varepsilon$. Allora

$$|L - L'| \leq |L - a_n| + |a_n - L'| \leq 2\varepsilon.$$

Questo dice che deve essere $|L - L'| = 0$, ovvero $L = L'$. □

Definizione Se $a_n \rightarrow L$ allora L viene chiamato il LIMITE della successione $\{a_n\}$, e si denota con uno dei simboli

$$\lim_n a_n \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n.$$

Definizione INTORNO DI $L \in \mathbf{R}$: ogni insieme che contiene un intervallo di centro L non ridotto ad un punto.

Proposizione. $\{a_n\} \subset \mathbf{R}, L \in \mathbf{R}$. Allora $a_n \rightarrow L \iff \forall$ intorno $I \exists m \in \mathbf{N} : \forall n \geq m$ si ha $a_n \in I$

DIMOSTRAZIONE Sia $a_n \rightarrow L$. Fissiamo I intorno di L . Allora $\exists \varepsilon > 0 : |L - z| \leq \varepsilon \implies z \in I$. Per def. di limite $\exists m \in \mathbf{N} : \forall n \geq m |a_n - L| \leq \varepsilon$, quindi $a_n \in I$.

Viceversa: si prende $I = \{z : |L - z| \leq \varepsilon\}$. Allora $a_n \in I \iff |a_n - L| \leq \varepsilon$. □

Esempio. (importante) Sia $z \in \mathbf{R}$ con $|z| < 1$, allora $z^n \rightarrow 0$.

DIMOSTRAZIONE Dato che $1/(n+1) \rightarrow 0$, sia $m \in \mathbf{N} : \forall n \geq m$ si ha

$$\frac{1}{n+1} \leq 1 - |z|.$$

Quindi per $n \geq m$, $|z| \leq 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$. Sia ora $C = m|z|^m$. Proviamo per induzione che

$$|z|^n \leq \frac{C}{n} \quad \forall n \geq m.$$

Infatti per $n = m$ si ha un'identità. Supposto che $|z|^n \leq C/n$ si ha

$$|z|^{n+1} = |z|^n |z| \leq |z| \frac{C}{n} \leq \frac{n}{n+1} \cdot \frac{C}{n} = \frac{C}{n+1}.$$

Dunque $|z|^n$ è infinitesima. □

OSSERVAZIONE: se $\{a_n\}$ è infinitesima e $|b_n| \leq C|a_n|$, allora anche $\{b_n\}$ è infinitesima.

SUCCESSIONI REALI DIVERGENTI

Definizione Una successione reale $\{a_n\}$ si dice POSITIVAMENTE DIVERGENTE se

$$\forall M > 0 \exists m \in \mathbf{N} : \forall n \geq m \ a_n > M.$$

(a_n è “arbitrariamente grande quando n è grande”).

Una successione reale $\{a_n\}$ si dice NEGATIVAMENTE DIVERGENTE se

$$\forall M > 0 \exists m \in \mathbf{N} : \forall n \geq m \ a_n < -M.$$

Nei due casi scriveremo $a_n \rightarrow +\infty$ e $a_n \rightarrow -\infty$, e

$$\lim a_n = +\infty \quad \lim a_n = -\infty.$$

Definizione (INTORNI DI $+\infty$ E $-\infty$) Gli intorni di $+\infty$ sono i sottoinsiemi di $\mathbf{R}$ il cui complementare è sup. limitato; gli intorni di $-\infty$ sono i sottoinsiemi di $\mathbf{R}$ il cui complementare è inf. limitato. Ovvero, un intorno di $+\infty$ è un qualsiasi sottoinsieme di $\mathbf{R}$ che contiene una semiretta $[x, +\infty)$; un intorno di $-\infty$ è un qualsiasi sottoinsieme di $\mathbf{R}$ che contiene una semiretta $(-\infty, x]$.

ESEMPLI: $\mathbf{R} \setminus \{0\}$, $\{x \in \mathbf{R} : x^2 > 2\}$ sono intorni di $+\infty$ e $-\infty$; $] - \infty, 0[$, $\mathbf{R} \setminus \mathbf{N}$ sono intorni di $-\infty$; $[1, +\infty[$ è intorno di $+\infty$; $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$ non è intorno né di $+\infty$ né di $-\infty$.

OSSERVAZIONE. Con la notazione degli intorni si può dare un'unica definizione: sia $\{a_n\}$ una successione reale e $L \in \overline{\mathbf{R}}$. Allora

$$\lim_n a_n = L \quad (\text{scriveremo anche } a_n \rightarrow L) \\ \iff \forall \text{ intorno } I \text{ di } L \exists m \in \mathbf{N} : \forall n \geq m \quad x \in I.$$

Definizione $\{a_n\}$ si dice OSCILLANTE se non è ne' convergente ne' divergente.

ESEMPLI: 1) $a_n = n$, $a_n = n!$, $a_n = n^n$ sono divergenti (basta notare che $|a_n| \geq n$ per cui dato $M > 0$ basta prendere $m = [M] + 1...$);

2) $a_n = n^\alpha$ ($\alpha > 0$) è divergente;

2) $(-1)^n$ è oscillante;

3) $(-n)^n$ è oscillante ($|(-n)^n| = n^n...$);

4) se $z \leq -1$ allora $\{z^n\}$ è oscillante.

OSSERVAZIONE: Sia $a_n > 0 \forall n$ o $a_n < 0 \forall n$, allora $\{a_n\}$ è infinitesima $\iff \{\frac{1}{a_n}\}$ è divergente (a $+\infty$ e $-\infty$ nei due casi).

In generale, se $\{a_n\} \rightarrow 0$ allora si può solo dire che $\{\frac{1}{a_n}\}$ non converge, ma può essere divergente o oscillante:

$$a_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0 \quad \text{e} \quad \frac{1}{a_n} = n \rightarrow +\infty \\ a_n = -\frac{1}{n} \rightarrow 0 \quad \text{e} \quad \frac{1}{a_n} = -n \rightarrow -\infty \\ a_n = \frac{(-1)^n}{n} \rightarrow 0 \quad \text{e} \quad \frac{1}{a_n} = (-1)^n n \text{ è oscillante.}$$

8 SUCCESSIONI MONOTONE

Una classe di successioni che sono particolarmente semplici, sono quelle monotone (ovvero che come funzioni reali sono monotone). Si possono definire usando la struttura induttiva dei numeri naturali come segue.

Definizione Una successione (reale) $\{a_n\}$ è (MONOTONA) NON DECRESCENTE se $a_n \leq a_{n+1}$ per ogni n ;
 una successione (reale) $\{a_n\}$ è (MONOTONA) NON CRESCENTE se $a_n \geq a_{n+1}$ per ogni n ;
 una successione (reale) $\{a_n\}$ è (MONOTONA) STRETTAMENTE CRESCENTE se $a_n < a_{n+1}$ per ogni n ;
 una successione (reale) $\{a_n\}$ è (MONOTONA) STRETTAMENTE DECRESCENTE se $a_n > a_{n+1}$ per ogni n .

NOTA: $\{a_n\}$ è successione (reale) *non decrescente* $\iff a_n \leq a_m \forall n, m$ con $n \leq m$. Infatti se $n \leq m$ allora $a_n \leq a_{n+1} \leq a_{n+2} \leq \dots \leq a_{m-1} \leq a_m$; quindi: $\{a_n\}$ è successione (reale) *non crescente* $\iff a_n \geq a_m \forall n, m$ con $n \leq m$, e analogamente per le altre definizioni

NOTA (**limitatezza delle successioni monotone**):

$\{a_n\}$ non decrescente $\implies a_n \geq a_0 \forall n \implies \{a_n\}$ inferiormente limitata
 (analogamente $\{a_n\}$ non crescente $\implies \{a_n\}$ superiormente limitata).

NOTA (**calcolo di inf/sup, max/min**):

(1) se $\{a_n\}$ è una successione non crescente allora esiste il $\max\{a_k : k \in \mathbf{N}\} = a_0$, e se $\{a_n\}$ è una successione non decrescente allora esiste il $\min\{a_k : k \in \mathbf{N}\} = a_0$. Per brevità scriveremo d'ora in poi $\max\{a_k\}$ in luogo di $\max\{a_k : k \in \mathbf{N}\}$ e così via;

(2) se $\{a_n\}$ è una successione non crescente allora esiste il $\min\{a_n\} = M$ se e solo se esiste un numero naturale n tale che $M = a_m$ per ogni $m \geq n$. Infatti da quello che abbiamo appena notato si ha $a_m \leq a_n$ se $m \geq n$, quindi se n è tale che $a_n = M$ (il minimo) allora si ha $a_m \leq M$ se $m \geq n$, quindi si deve avere $a_m = M$, altrimenti la definizione di minimo non è soddisfatta.

Analogamente, se $\{a_n\}$ è una successione non decrescente allora esiste il $\max\{a_n\} = M$ se e solo se esiste un numero naturale n tale che $M = a_m$ per ogni $m \geq n$.

(3) dall'osservazione precedente si ha che se $\{a_n\}$ è una successione strettamente crescente allora non ha massimo e se $\{a_n\}$ è una successione strettamente decrescente allora non ha minimo.

Esempio. La successione $a_n = \frac{1}{n}$ è strettamente decrescente, quindi si ha $\max\{a_n\} = a_1 = 1$ (in questo caso a_0 non è definita e quindi partiamo da 1) e non esiste $\min\{a_n\}$. Abbiamo già visto che $\inf\{a_n\} = 0$.

LIMITI DI SUCCESSIONI MONOTONE

Teorema. Sia $\{a_n\}$ monotona non decrescente allora $\{a_n\}$ non oscilla e

$$\lim_n a_n = \sup_n a_n;$$

sia $\{a_n\}$ monotona non crescente allora $\{a_n\}$ non oscilla e

$$\lim_n a_n = \inf_n a_n.$$

DIMOSTRAZIONE (caso non crescente) sia $L = \inf_n a_n$. Se mostriamo che $\forall L' \geq L$ $\exists m$ t.c. $\forall n \geq m$ si ha $L \leq a_n < L'$, allora $L = \lim_n a_n$.

Per def. di $\inf \exists m$ t.c. $a_m < L'$. Per la non crescenza di $\{a_n\}$, si ha $a_n \leq a_m$ $\forall n \geq m$, e quindi

$$L \leq a_n \leq a_m < L' \quad \forall n \geq m. \quad \square$$

Corollario Importante. Ogni successione monotona limitata converge in $\mathbf{R}$.

Il numero di Nepero

Studiamo ora una importante successione. Proveremo che è monotona e limitata, e che quindi converge. Il suo limite è la COSTANTE DI NEPERO:

$$e = \sup \left\{ \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n : n \in \mathbf{N} \setminus \{0\} \right\}.$$

Stima: $2.71 < e < 2.72$.

Teorema. La successione $a_n = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n$ è strettamente crescente e limitata.

DIMOSTRAZIONE (CRESCENZA) È

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{1}{n^k};$$

$$a_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n+1} \right)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \frac{1}{(n+1)^k}.$$

Perchè sia $a_n < a_{n+1}$ basta dunque vedere che $\forall k, n$

$$(*) \quad \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \leq \binom{n+1}{k} \frac{1}{(n+1)^k}.$$

Dimostriamolo per induzione su k . Per $k = 0$ si ha

$$\binom{n}{0} \frac{1}{(n)^0} = 1 = \binom{n+1}{0} \frac{1}{(n+1)^0}.$$

Supponiamo ora che $k \geq 1$, e che valga

$$\binom{n}{k-1} \frac{1}{n^{k-1}} \leq \binom{n+1}{k-1} \frac{1}{(n+1)^{k-1}}.$$

Allora

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k} \frac{1}{n^k} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{1}{n^k} \\
&= \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} \frac{1}{n^{k-1}} \frac{(n-k+1)}{nk} \\
&= \binom{n}{k-1} \frac{1}{n^{k-1}} \frac{(n-k+1)}{nk} \\
&\leq \binom{n+1}{k-1} \frac{1}{(n+1)^{k-1}} \frac{(n-k+1)}{nk} \\
&\leq \frac{(n+1)!}{(k-1)!(n-k+2)!} \frac{1}{(n+1)^{k-1}} \frac{(n-k+1)}{nk} \\
&= \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} \frac{1}{n(n+1)^{k-1}} \frac{(n-k+1)}{(n-k+2)} \\
&= \binom{n+1}{k} \frac{1}{n(n+1)^{k-1}} \frac{(n-k+1)}{(n-k+2)} \\
&= \binom{n+1}{k} \frac{1}{(n+1)^k},
\end{aligned}$$

ovvero (*).

(LIMITATEZZA) Vediamo che $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq 3$, ovvero

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \leq 3.$$

Notiamo alcune cose:

$$\text{i) } \forall n, k \quad \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \leq \frac{1}{k!}$$

Infatti (induzione su $k \leq n$) per $k = 0$ si ha un'identità ; supponendo che si abbia

$$\binom{n}{k-1} \frac{1}{n^{k-1}} \leq \frac{1}{(k-1)!} \quad (k \geq 1), \text{ otteniamo:}$$

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k} \frac{1}{n^k} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{1}{n^k} \\
&= \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} \frac{1}{n^{k-1}} \frac{(n-k+1)}{nk} \\
&= \binom{n}{k-1} \frac{1}{n^{k-1}} \frac{1}{k} \frac{(n-k+1)}{n} \\
&= \frac{1}{(k-1)!} \frac{1}{k} \frac{(n-k+1)}{n} \leq \frac{1}{k!}
\end{aligned}$$

Quindi $a_n \leq \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$; maggioriamo questa somma con un'altra più facile da calcolare, usando la seguente osservazione:
 ii) $\forall k \geq 1$ si ha $k! \geq 2^{k-1}$, infatti
 $k! = k \cdot (k-1) \cdots 3 \cdot 2 \geq 2 \cdots 2 = 2^{k-1}$.

Dunque si ha $a_n \leq \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \leq 1 + \sum_{k=1}^n 2^{1-k} = 1 + \sum_{j=0}^{n-1} 2^{-j}$.

Questa somma si può calcolare facilmente:

iii) sia $a \neq 1$; allora $\sum_{j=0}^{n-1} a^j = \frac{1-a^n}{1-a}$, infatti basta ricordare che

$$(1-a^n) = (1-a)(1+a+a^2+\dots+a^{n-1}).$$

In particolare ($a = 1/2$)

$$\sum_{j=0}^{n-1} 2^{-j} = \sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^j = \frac{1-(1/2)^n}{1-(1/2)} = 2 - 2^{1-n}.$$

Tirando le somme $a_n \leq 1 + 2 - 2^{1-n} < 3$

□

Corollario. $e = \lim_n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.