9 IL CALCOLO DEI LIMITI

Il calcolo di un limite spesso si riconurrà a trattare separatamente limiti più semplici, su cui poi si faranno operazioni algebriche. Dato che uno o più di questi limiti possono essere $\pm\infty$, bisogna definire le operazioni algebriche (quando possibile) tra termini di $\overline{\mathbf{R}}$.

Definizione Sia $z \in \mathbf{R}$. Definiamo

$$z + (+\infty) = +\infty + z = +\infty, \quad z + (-\infty) = -\infty + z = -\infty$$

$$\text{se } z \in (0, +\infty] \text{ allora } z \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot z = +\infty$$

$$\text{se } z \in [-\infty, 0) \text{ allora } z \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot z = -\infty$$

(analogamente si può moltiplicare per $-\infty$ rispettando la regola dei segni)

$$\frac{z}{+\infty} = \frac{z}{-\infty} = 0.$$

NON È POSSIBILE DEFINIRE

$$(+\infty) + (-\infty), \quad 0 \cdot \pm\infty, \quad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \quad \frac{0}{0}$$

Inoltre non è possibile definire neanche

$$\frac{L}{0} \text{ per alcun } L \in [-\infty, +\infty].$$

Queste vengono dette FORME INDETERMINATE.

Teorema. (PROPRIETÀ DEI LIMITI) Siano $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ due successioni non oscillanti (dunque: convergenti o divergenti). Allora, se non si hanno forme indeterminate, si ha

$$(1) \quad \lim_n (a_n + b_n) = \lim_n a_n + \lim_n b_n$$

$$(2) \quad \lim_n (a_n \cdot b_n) = (\lim_n a_n) \cdot (\lim_n b_n)$$

$$(3) \quad \lim_n \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_n a_n}{\lim_n b_n}$$

(in (3) supponiamo inoltre $\lim_n b_n \neq 0$).

Alla dimostrazione premettiamo alcuni risultati, che sono importanti per il calcolo di alcuni limiti che non rientrano nel teorema precedente.

Teorema. (LIMITATEZZA) $\{a_n\}$ convergente $\implies \{a_n\}$ limitata.

DIMOSTRAZIONE Sia $L = \lim_n a_n$. Sia $m : \forall n \geq m \quad |a_n - L| < 1$. Allora $\forall n \geq m \quad |a_n| \leq |L| + 1$. Dunque $\forall n$

$$|a_n| \leq \max\{|L| + 1, |a_0|, |a_1|, \dots, |a_{m-1}|\} < +\infty. \quad \square$$

Proposizione 1. $\{a_n\}$ limitata, $\{b_n\}$ diverge $\implies \{a_n + b_n\}$ diverge.

DIMOSTRAZIONE Sia $s > 0$ tale che $|a_n| \leq s \quad \forall n$. Fissiamo $M > 0$, e sia $m \in \mathbf{N}$ t.c. $\forall n \geq m$ si ha $|b_n| \geq M + s$. Allora $\forall n \geq m$ si ha

$$|a_n + b_n| \geq |b_n| - |a_n| \geq M. \quad \square$$

ESEMPIO: La successione $\left\{n + (-1)^n \frac{2n}{n+1} \sin n\right\}$ diverge.

Proposizione 2. $\{a_n\}$ limitata, $\{b_n\}$ infinitesima $\implies \{a_n b_n\}$ infinitesima.

DIMOSTRAZIONE Sia $\varepsilon > 0$. Sia $s > 0$ tale che $|a_n| \leq s \quad \forall n$. Sia $m \in \mathbf{N}$ t.c. $\forall n \geq m$ si ha $|b_n| \leq \varepsilon/s$. Allora $\forall n \geq m$ si ha

$$|a_n b_n| = |a_n| |b_n| \leq \varepsilon \quad \square$$

ESEMPIO: La successione $\left\{\frac{1}{\sqrt{n}}(\sin(n!) - 7 \cos(42n!))\right\}$ è infinitesima.

Proposizione 3. Somma di successioni infinitesime è infinitesima

DIMOSTRAZIONE Esercizio $\square$

Proviamo il teorema sulle proprietà dei limiti.

DIMOSTRAZIONE Sia $a_n \rightarrow L$ e $b_n \rightarrow L'$ ($L, L' \in \overline{\mathbf{R}}$)

(1): Ci sono due casi: i) le due successioni convergono, ii) una diverge (tutte e due no: si avrebbe una forma indeterminata $+\infty - \infty$).

Nel caso i) $\{a_n - L\}, \{b_n - L'\}$ sono infinitesime $\implies \{a_n + b_n - L - L'\}$ infinitesima (Prop. 3) $\implies a_n + b_n \rightarrow L + L'$.

Nel caso ii) basta applicare il teorema di limitatezza e la Prop. 1

(2): ci sono due casi: i) le due successioni convergono, ii) $L' = \pm\infty$ e $L \neq 0$ (non può essere $L = 0$: si avrebbe una forma indeterminata $0 \cdot \pm\infty$).

Nel caso i) basta scrivere

$$a_n b_n - LL' = (a_n - L)b_n + L(b_n - L')$$

e usare le Prop. 2 e 3.

Nel caso ii) dato che $L \neq 0 \exists r > 0$ t.c. $I = \{z \in \mathbf{R} : |z| \geq r\}$ è un intorno di L . Quindi $\exists m_0 \in \mathbf{N}$ t.c. $\forall n \geq m_0 \quad a_n \in I$, ovvero $|a_n| \geq r$. Fissiamo ora $M > 0$; dato che $b_n \rightarrow \pm\infty \exists m \in \mathbf{N}$ t.c. $\forall n \geq m$ si ha $|b_n| \geq M/r$. Allora

$$|a_n b_n| = |a_n| |b_n| \geq M.$$

(3): basta vedere che $\frac{1}{b_n} \rightarrow \frac{1}{L'}$ (e poi ci si riconduce al caso (2)). Se $L' = 0$ o $L' = \pm\infty$ basta applicare la definizione (farlo per esercizio). Rimane il caso $L' \neq 0, L' \in \mathbf{R}$. Notiamo che $I = \{z \in \mathbf{R} : |z| \geq L'/2\}$ è un intorno di L' . Quindi $\exists m_0 \in \mathbf{N}$ t.c $\forall n \geq m_0 \quad b_n \in I$, ovvero $|b_n| \geq L'/2$. Se $n \geq m_0$ si ha allora

$$\left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{L'} \right| = \frac{|b_n - L'|}{|b_n| |L'|} \leq \frac{2}{L'^2} |b_n - L'|. \quad \square$$

FORME INDETERMINATE: vediamo per esempio perché non si può dare un senso alla forma $(+\infty) + (-\infty)$:

i) consideriamo $a_n = n$ e $b_n = 1 - n$. Allora $a_n \rightarrow +\infty, b_n \rightarrow -\infty$, e $a_n + b_n = 1 \rightarrow 1$;

ii) consideriamo $a_n = 2n$ e $b_n = -n$. Allora $a_n \rightarrow +\infty, b_n \rightarrow -\infty$, e $a_n + b_n = n \rightarrow +\infty$;

iii) consideriamo $a_n = n$ e $b_n = -n + (-1)^n$. Allora $a_n \rightarrow +\infty, b_n \rightarrow -\infty$, e $a_n + b_n = (-1)^n$ è oscillante.

ESERCIZIO: costruire due successioni $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ tali che $a_n \rightarrow +\infty, b_n \rightarrow 0$ e $a_n \cdot b_n \rightarrow L \in \mathbf{R}$ (oppure $a_n \cdot b_n \rightarrow \pm\infty$, oppure $a_n \cdot b_n$ oscilla).

□

NON SI PUÒ DEFINIRE $\frac{1}{0} = \pm\infty$ (infatti se $a_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0$ allora $\frac{1}{a_n} = n \rightarrow +\infty$; se $a_n = -\frac{1}{n} \rightarrow 0$ allora $\frac{1}{a_n} = -n \rightarrow -\infty$; se $a_n = \frac{(-1)^n}{n} \rightarrow 0$ allora $\frac{1}{a_n} = (-1)^n n$ non diverge ad alcun infinito con segno).

10 SUCCESSIONI E RELAZIONE D'ORDINE

Teorema. (PERMANENZA DEL SEGNO) *Se $\{a_n\}$ è una succ. reale e $a_n \rightarrow L \in (0, +\infty]$ (risp. $a_n \rightarrow L \in [-\infty, 0)$) allora $\exists m \in \mathbf{N} : \forall n \geq m \quad a_n > 0$ (risp. $a_n < 0$).*

DIMOSTRAZIONE ($L \in (0, +\infty]$) Con gli intorno: basta notare che $(0, +\infty)$ è intorno di L .

Se non si vuole usare il linguaggio degli intorno si devono trattare i casi separatamente: se $L > 0$ si deve notare che da un certo n in poi tutti i termini della successione stanno in $(L/2, 3L/2)$; se $L = +\infty$ allora da un certo n in poi tutti i termini della successione stanno in $(1, +\infty)$. $\square$

Teorema. (CONFRONTO) *Siano $\{a_n\}, \{b_n\}$ successioni reali convergenti o divergenti a $\pm\infty$. Se $\exists m_0 : \forall n \geq m_0$ si ha $a_n \leq b_n$, allora*

$$\lim_n a_n \leq \lim_n b_n.$$

DIMOSTRAZIONE Se $\lim_n a_n = \lim_n b_n = +\infty$ la tesi diventa $+\infty \leq +\infty$ (che è vera). Analogamente se $\lim_n a_n = \lim_n b_n = -\infty$. Altrimenti, consideriamo la successione $\{b_n - a_n\}$. Si ha $b_n - a_n \geq 0$, ed esiste

$$\lim_n (b_n - a_n) = \lim_n b_n - \lim_n a_n.$$

Quest'ultima differenza deve essere non negativa, altrimenti per il teor. di perm. del segno dovrebbe essere $b_n - a_n < 0$ da un certo m in poi. $\square$

ESEMPIO: $\lim_n (n + \sin n) = +\infty$.

Teorema. (DEI DUE CARABINIERI) *Siano $\{a_n\}, \{b_n\}$ successioni reali t.c.*

$$\lim_n b_n = \lim_n a_n = L$$

Se $\{c_n\}$ è una terza successione reale t.c.

$$a_n \leq c_n \leq b_n,$$

allora $c_n \rightarrow L$.

DIMOSTRAZIONE $|c_n - L| \leq |a_n - L| + |b_n - L|$. $\square$

ESEMPIO: $\lim_n \frac{1}{n} \sin n = 0$. Si prende

$$a_n = -\frac{1}{n}, \quad b_n = \frac{1}{n}, \quad c_n = \frac{1}{n} \sin n.$$