11 CONFRONTO TRA SUCCESSIONI DIVERGENTI

(1) Sia $a > 1$. Allora $\lim_n \frac{a^n}{n^\beta} = +\infty$ per ogni $\beta > 0$.

Dimostriamolo solo per $a = 4$ e $\beta = 1$. Si ha (ricordando che $2^n \geq n$ per ogni n)

$$4^n = 2^n \cdot 2^n \geq n \cdot n = n^2,$$

per cui

$$\frac{4^n}{n} \geq n$$

e il limite risulta $+\infty$ per confronto

(2) Sia $a > 1$. Allora $\lim_n \frac{n^\beta}{\log_a n} = +\infty$ per ogni $\beta > 0$.

Lo mostriamo solo per $\beta = 1$. Per definizione, dobbiamo mostrare che fissato $M > 0$ allora

$$\frac{n}{\log_a n} \geq M,$$

o equivalentemente $n \geq M \log_a n$, per n 'sufficientemente grande'. Prendendo l'esponenziale di entambi i termini, si ha equivalentemente

$$a^n \geq a^M a^{\log_a n} = a^M n,$$

ovvero

$$\frac{a^n}{n} \geq a^M.$$

Ma questa disuguaglianza è vera per n 'sufficientemente grande' perche' abbiamo visto sopra che $\frac{a^n}{n} \to +\infty$.

(3) Sia $a > 1$. Allora $\lim_n \frac{a^n}{n!} = 0$.

Per dimostrarlo notiamo che

$$\frac{a^n}{n!} = \frac{a \cdot a \cdots a \cdot a}{1 \cdot 2 \cdots (n-1) \cdot n} = \frac{a}{1} \cdot \frac{a}{2} \cdots \frac{a}{n-1} \cdot \frac{a}{n}.$$

Sia $k \geq a$ un numero naturale (che terremo fisso). Allora

$$\frac{a^n}{n!} = \left(\frac{a}{1} \cdot \frac{a}{2} \cdots \frac{a}{k-1}\right) \cdot \left(\frac{a}{k} \cdots \frac{a}{n-1} \cdot \frac{a}{n}\right)$$

Il numero $C = \left(\frac{a}{1} \cdot \frac{a}{2} \cdots \frac{a}{k-1}\right)$ è una costante che non dipende da n. Per i numeri seguenti vale la stima

$$\frac{a}{k} \leq 1, \qquad \frac{a}{k+1} \leq 1, \qquad , \ldots , \frac{a}{n-1} \leq 1.$$

Quindi

$$0 \le \frac{a^n}{n!} \le C \cdot \frac{a}{n}$$

Dato che $a/n \to 0$ anche $a^n/n! \to 0$ (per esempio usando il teorema dei due carabinieri).

(4) $\lim_n \frac{n^n}{n!} = +\infty$.

Per dimostrarlo notiamo che

$$\frac{n^n}{n!} = \frac{n \cdot n \cdots n \cdot n}{1 \cdot 2 \cdots (n-1) \cdot n} = \frac{n}{1} \cdot \frac{n}{2} \cdots \frac{n}{n-1} \cdot \frac{n}{n}$$

e che

$$\frac{n}{2} \ge 1, \frac{n}{3} \ge 1, \qquad \ldots \frac{n}{n-1} \ge 1, \qquad \frac{n}{n} \ge 1.$$

Quindi

$$\frac{n^n}{n!} \ge n$$

e $n^n/n! \to +\infty$ per il teorema del confronto.

Esempi. Calcoliamo

$$\lim_n \left(\frac{3^n - n^2}{2^n + n^3} - \frac{3^n + n^2}{2^n - n^3} \right).$$

Notiamo che

$$\frac{3^n - n^2}{2^n + n^3} = \frac{3^n \left(1 - \frac{n^2}{3^n}\right)}{2^n \left(1 - \frac{n^3}{2^n}\right)}.$$

Dato che $\lim_n \frac{n^2}{3^n} = \lim_n \frac{n^3}{2^n} = 0$, si ha

$$\lim_n \frac{3^n - n^2}{2^n + n^3} = \lim_n \left(\frac{3}{2}\right)^n = +\infty.$$

Analogamente si calcola il secondo termine; dunque il limite è nella forma $+\infty - \infty$. Razionalizzando la frazione si ottiene il limite

$$\lim_n \frac{(3^n - n^2)(2^n - n^3) - (3^n + n^2)(2^n + n^3)}{(2^n + n^3)(2^n - n^3)} =$$

$$\lim_n \frac{-2n^2 2^n - 2n^3 3^n}{4^n - n^6} = -2 \lim_n \frac{n^3 3^n \left(1 + \frac{2^n}{n 3^n}\right)}{4^n \left(1 - \frac{n^6}{4^n}\right)} = -2 \lim_n \frac{n^3}{\left(\frac{4}{3}\right)^n} = 0.$$

12 SOTTOSUCCESSIONI

Definizione $\{b_n\}$ è SOTTOSUCCESSIONE di $\{a_n\}$ se $\exists\ f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ strettamente crescente tale che

$$b_k = a_{f(k)}.$$

In genere si scrive n_k invece di $f(k)$, per cui

$$b_k = a_{n_k}.$$

NOTA: si ha $\lim_k f(k) = +\infty$.

Esempi. $\{4n^2\}$ è sottosuccessione della successione $\{n^2\}$ (prendendo $f(k) = 2k$);

Le successioni costanti $\{1\}$ e $\{-1\}$ sono sottosuccessioni della successione oscillante $\{(-1)^n\}$ (prendendo $f(k) = 2k$ e $f(n) = 2k + 1$ nei due casi);

La successione costante $\{0\}$ è sottosuccessione della successione $\{\cos(n\pi/4)\}$ (prendendo per esempio $f(n) = 8n + 2$). Quali sono i possibili limiti di sottosuccessioni di tale successione?

Le successioni divergenti, rispettivamente a $= +\infty$ e $-\infty$, $\{(2n)^{2n}\}$ e $\{-(2n + 1)^{2n+1}\}$ sono sottosuccessioni della successione oscillante $\{(-n)^n\}$. Ne esistono sottosuccessioni convergenti?

Teorema. $a_n \to L \Longrightarrow a_{n_k} \to L\ \forall$ *sottosuccessione* $\{a_{n_k}\}$ *di* $\{a_n\}$.

DIMOSTRAZIONE Sia I intorno di L e m_0 t.c. $\forall n \geq m_0$ si ha $a_n \in I$. Dato che $\lim_k n_k = +\infty$, $\exists m \in \mathbf{N}$ t.c. $\forall k \geq m$ si ha $n_k \geq m_0$. Allora

$$a_{n_k} \in I \quad \forall k \geq m. \qquad \square$$

Corollario Importante. Se $\exists\ \{a_{n_k}\}$ e $\{a_{n'_k}\}$ due sottosuccessioni di $\{a_n\}$ tali che

$$a_{n_k} \to L \qquad a_{n'_k} \to L'$$

e $L \neq L'$, allora $\{a_n\}$ oscilla.

Esempio. Per dimostrare che $\{(-1)^n\}$ oscilla si può notare che $(-1)^{2n} = 1 \to 1$, e $(-1)^{2n+1} = -1 \to -1 \neq 1$.

NOMENCLATURA: il costruire una successione di una successione data $\{a_n\}$ si dice "estrarre una sottosuccessione dalla successione $\{a_n\}$".

Teorema. (di Bolzano-Weierstrass) *Da ogni successione limitata si estrae una sottosuccessione convergente.*

DIMOSTRAZIONE Supponiamo $a \leq a_n \leq b$ per ogni $n = 0, 1, \ldots$.

Usiamo un procedimento per induzione che ci permette ad ogni passo di ricondurci ad un intervallo di metà ampiezza del precedente. Definiamo

$$I_0 = [a, b], \qquad n_0 = 0.$$

Definiti I_k, n_k definiamo I_{k+1} e n_{k+1} come segue: denotiamo con $c_k = \min I_k$, $d_k = \max I_k$

• I_{k+1} è uno dei due intervalli $\left[c_k, \frac{c_k+d_k}{2}\right]$ e $\left[\frac{c_k+d_k}{2}, d_k\right]$ in cui cadono termini a_i per infiniti indici i. denotiamo gli estremi di questo intervallo con c_{k+1} e d_{k+1};

• $n_{k+1} = \min\{i : i > n_k,\ a_i \in I_{k+1}\}$ (il minimo indice i più grande di n_k tale che $a_i \in I_{k+1}$.

In questo modo abbiamo una successione di intervalli $I_k = [c_k, d_k]$. Questa successione è decrescente, nel senso che $I_{k+1} \subset I_k$. Questo significa che $\{c_k\}$ è una successione non decrescente e $\{d_k\}$ è una successione non crescente; inoltre, dato che ad ogni passo dimezziamo l'ampiezza dell'intervallo

$$d_k - c_k = \max I_k - \min I_k = 2^{-k}(b - a).$$

Abbiamo anche una successioni di indici $\{n_k\}$ tale che $a_{n_k} \in I_k$, ovvero

$$c_k \leq a_{n_k} \leq d_k.$$

Dato che $\{c_k\}$ e $\{d_k\}$ sono limitate e monotone, esse convergono. Chiamiamo c e d i loro limiti. Abbiamo

$$d - c = \lim_k (d_k - c_k) = \lim_k 2^{-k}(b - a) = 0,$$

ovvero $d = c$. Quindi possiamo usare il teorema dei due carabinieri, ottenendo che anche $\{a_{n_k}\}$ converge.

□

Corollario. *Da ogni successione si estrae una sottosuccessione che ammette limite.*

DIMOSTRAZIONE Se $\{a_n\}$ è limitata si applica il teorema sopra. Altrimenti la successione non è limitata superiormente o inferiormente. Supponiamo che non sia limitata superiormente. Allora definiamo $n_0 = 0$ e, per induzione,

$$n_{k+1} = \min\{i : i > n_k,\ a_i > k\}$$

(notare che questo insieme è non vuoto, altrimenti $\{a_n\}$ sarebbe limitata superiormente). La successione $\{a_{n_k}\}$ soddisfa $a_{n_k} > k$ e quindi ha limite $+\infty$.

□