13 LIMITI DI FUNZIONI

Estendiamo la nozione di limite a funzioni reali di variabile reale.

Definizione (caratterizzazione per successioni) Si ha

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

($x_0, L \in \overline{\mathbf{R}}$) se e solo se per ogni successione $a_n \to x_0$ con $a_n \neq x_0$ (almeno per n grande) si ha $\lim_n f(a_n) = L$.

Limiti all'infinito

La definizione per successioni si traduce nella seguente.

Definizione Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$; diremo che $f(x)$ TENDE al numero $L \in \mathbf{R}$ per $x \to +\infty$ se

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists M > 0 : \ x \geq M \Longrightarrow |L - f(x)| \leq \varepsilon.$

In tal caso il numero L si dice il limite di f per $x \to +\infty$, e si scrive $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$.

Allo stesso modo si definiscono

i) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \Longleftrightarrow \forall N > 0 \ \exists M > 0 : \ \forall x \geq M \ \ f(x) \geq N,$

ii) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \Longleftrightarrow \forall N > 0 \ \exists M > 0 : \ \forall x \geq M \ f(x) \leq -N.$

La nozione di limite per $x \to -\infty$ viene data per simmetria:

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = L \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists M > 0 : \ \forall x \leq -M \ \ |f(x) - L| \leq \varepsilon,$

ovvero $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = L \Longleftrightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} f(-x) = L.$

Ovviamente si estendono le definizioni di limiti $\pm\infty$.

Esempi. Molti esempi visti con le successioni si adattano a questo caso, per cui

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0, \qquad \lim_{x \to -\infty} \frac{2x^2}{1 + x^2} = 2, \qquad \lim_{x \to -\infty} x^2 = +\infty, \text{ etc.}$$

Limiti al finito

Definizione Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ e $x_0 \in \mathbf{R}$; diremo che $f(x)$ *tende* al numero $L \in \mathbf{R}$ per $x \to x_0$ se

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 :\ |x - x_0| \le \delta, x \ne x_0 \Longrightarrow |L - f(x)| \le \varepsilon.$$

In tal caso il numero L si dice il limite di f per $x \to x_0$, e si scrive $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$.

NOTA: x_0 non viene preso in considerazione perche non vogliamo che il valore di f in x_0 influenzi il limite.

Allo stesso modo si definiscono

i) $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \Longleftrightarrow \forall N > 0\ \exists \delta > 0 :\ \forall x :\ |x - x_0| \le \delta, x \ne x_0\ \ f(x) \ge N$,

ii) $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty \Longleftrightarrow \forall N > 0\ \exists \delta > 0 :\ \forall x :\ |x - x_0| \le \delta, x \ne x_0\ \ f(x) \le -N$.

NOTA: le definizioni di limite ora date si possono riassumere con il linguaggio degli intorni: siano $L, x_0 \in \overline{\mathbf{R}}$; allora

$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \Longleftrightarrow \forall$ intorno I di L esiste un intorno J di x_0 tale che se $x_0 \ne x \in J$, allora $f(x) \in I$.

NOTA. Per definire il limite per $x \to x_0$ basta che il dominio di f contenga un intorno "bucato" di x_0, ovvero un insieme del tipo $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$.

Esempi.

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{|x|} = +\infty.$$

Sia $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \ne x_0 \\ 1 & \text{se } x = x_0. \end{cases}$ In questo caso $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$, ma $f(x_0) = 1$.

Esempi di non esistenza

Per dimostrare che un limite $\lim_{x \to x_0} f(x)$ non esiste basta trovare due successioni a_n e a'_n che convergono entrambe a x_0, ma tali che $\lim_n f(a_n) \ne \lim_n f(a'_n)$.

Applicheremo questo criterio agli esempi qui di seguito.

Esempio 1. $f(x) = \sin x$, $x_0 = +\infty$. Non esiste

$$\lim_{x \to +\infty} \sin x$$

Basta prendere

$$a_n = n\pi, \qquad a'_n = 2n\pi + \frac{\pi}{2}.$$

Si ha $a_n, a'_n \to +\infty$, ma

$$f(a_n) = 0 \to 0, \qquad f(a'_n) = 1 \to 1.$$

Esempio 2. $f(x) = \sin \frac{1}{x}$, $x_0 = 0$. Non esiste

$$\lim_{x \to 0} \sin \frac{1}{x}$$

Basta prendere

$$a_n = \frac{1}{n\pi}, \qquad a'_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}.$$

Si ha $a_n, a'_n \to 0$, ma

$$f(a_n) = 0 \to 0, \qquad f(a'_n) = 1 \to 1.$$

Esempio 3. $f(x) = \sin x$, $x_0 = +\infty$. Non esiste

$$\lim_{x \to +\infty} x \sin x$$

Basta prendere

$$a_n = n\pi, \qquad a'_n = 2n\pi + \frac{\pi}{2}.$$

Si ha $a_n, a'_n \to +\infty$, ma

$$f(a_n) = 0 \to 0, \qquad f(a'_n) = 2n\pi + \frac{\pi}{2} \to +\infty.$$

Definiamo la funzione **parte intera** di x come

$$[x] = \max\{z \in \mathbf{Z} : z \leq x\}$$

(questa è una buona definizione. Qui si usa la proprietà che *ogni insieme superiormente limitato e non vuoto di* **Z** *ha massimo*).
NOTA: se si scrive x nella forma decimale e $x \geq 0$ allora $[x]$ coincide con il numero 'prima della virgola' (bisogna solo evitare di scrivere $0,999999....$ invece di 1). Questa regola non è valida per $x < 0$. Infatti la parte intera di $-0,5$ è -1.

Esempio 4. $f(x) = [x]$, $x_0 = 0$. Non esiste

$$\lim_{x \to 0} [x]$$

Basta prendere

$$a_n = \frac{1}{n}, \qquad a'_n = -\frac{1}{n}.$$

Si ha $a_n, a'_n \to 0$, ma

$$f(a_n) = 0 \to 0, \qquad f(a'_n) = -1 \to -1.$$

Definiamo la funzione **segno** di x come

$$\operatorname{sign} x = \begin{cases} -1 & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ 1 & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

Esempio 5. $f(x) = \operatorname{sign} x$, $x_0 = 0$. Non esiste

$$\lim_{x \to 0} \operatorname{sign} x$$

Basta prendere

$$a_n = \frac{1}{n}, \qquad a'_n = -\frac{1}{n}.$$

Si ha $a_n, a'_n \to 0$, ma

$$f(a_n) = 1 \to 1, \qquad f(a'_n) = -1 \to -1.$$

Esempio 6. $f(x) = \frac{1}{x}$, $x_0 = 0$. Non esiste

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$$

Basta prendere

$$a_n = \frac{1}{n}, \qquad a'_n = -\frac{1}{n}.$$

Si ha $a_n, a'_n \to 0$, ma

$$f(a_n) = n \to +\infty, \qquad f(a'_n) = -n \to -\infty.$$

Esempio 7. $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{|x|}$, $x_0 = 0$. Non esiste

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{|x|} \right)$$

Basta prendere

$$a_n = \frac{1}{n}, \qquad a'_n = -\frac{1}{n}.$$

Si ha $a_n, a'_n \to 0$, ma

$$f(a_n) = 0 \to 0, \qquad f(a'_n) = -2n \to -\infty.$$

14 CALCOLO DEI LIMITI - FUNZIONI CONTINUE IN x_0

I teoremi di somma, prodotto, quoziente, confronto, e dei due carabinieri continuano a valere per i limiti di funzioni con lo stesso enunciato dei limiti di successioni.

Il calcolo dei limiti viene spesso semplificato nel semplice calcolo di una funzione nel punto in cui si calcola il limite.

Definizione Una funzione f si dice CONTINUA NEL PUNTO x_0 quando si ha

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Esempio. Il più semplice esempio di funzione che ammette limite in x_0 ma non è continua in x_0 è $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \neq x_0 \\ 1 & \text{se } x = x_0. \end{cases}$

Per i teoremi sui limiti si ha:

Teorema. *Somma, differenza, prodotto di funzioni f e g continue in x_0 sono continue in x_0. Se $g \neq 0$ in un intorno di x_0, allora anche $\frac{f}{g}$ è continua in x_0.*

Corollario. I polinomi sono funzioni continue in ogni $x_0 \in \mathbf{R}$. Le funzioni razionali sono continue in ogni punto del loro dominio.

DIMOSTRAZIONE Le costanti e la funzione identità $x \mapsto x$ sono ovviamente continue. Basta quindi applicare il teorema precedente. $\square$

Proposizione. *Gli esponenziali, i logaritmi,* cos*,* sin *sono funzioni continue.*

Il calcolo dei limiti si riconduce spesso a trovare una funzione continua in x_0 che è uguale (o 'molto simile') alla funzione di cui si vuole calcolare il limite in x_0.

Esempio. Per calcolare il limite

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1}$$

(che è una forma indeterminata $\pm\infty/\pm\infty$) si nota che per $x \neq 1$

$$\frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x+1,$$

quindi

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1}(x+1) = 2,$$

dato che $x+1$ è continua e vale 2 in $x = 1$.

Esempio. Calcolare
$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}).$$

Il limite è nella forma indeterminata $+\infty-\infty$. Moltiplicando e dividendo per $(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})$ si ottiene

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}) = \lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{(x+1)-x)}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}.$$

A questo punto abbiamo una forma $1/+\infty$, e quindi il limite è 0.

Esempio. Calcolare
$$\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+x}+x).$$

Il limite è nella forma indeterminata $+\infty-\infty$. Moltiplicando e dividendo per $(\sqrt{x^2+x}-x)$ si ottiene

$$\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+x}+x) = \lim_{x\to-\infty}\frac{(\sqrt{x^2+x}+x)(\sqrt{x^2+x}-x)}{(\sqrt{x^2+x}-x)}$$
$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{(x^2+x)-x^2)}{\sqrt{x^2+x}-x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2}\sqrt{1+\frac{1}{x}}-x}.$$
$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{x}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}}-x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x}{-x(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1)} = -\frac{1}{2}.$$

LIMITI FONDAMENTALI (prima parte)

Il limite che permette il calcolo di forme indeterminate in cui sono presenti funzioni trigonometriche è:
$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x} = 1.$$

La dimostrazione di questo limite si ha subito dalla disuguaglianza trigonometrica (per $x>0$)
$$\sin x \le x \le \tan x,$$
da cui si ottiene (dividendo per $\sin x$ e prendendo gli inversi)
$$\cos x \le \frac{\sin x}{x} \le 1$$
La stessa disuguaglianza si ottiene per $x<0$. Il limite si ottiene usando il teorema dei due carabinieri e la continuità del coseno.

Esempio.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1,$$

poichè si può scrivere

$$\frac{\tan x}{x} = \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x}.$$

Il secondo limite fondamentale è

$$\lim_{x\to +\infty} \Big(1 + \frac{1}{x}\Big)^x = e.$$

Lo deduciamo dal corrispondente limite di successioni

$$\lim_n \Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^n = e.$$

Infatti per $x > 0$ prendiamo $n = [x]$ (la parte intera di x). Abbiamo le diseguaglianze

$$n \le x \le n+1, \qquad \frac{1}{n+1} \le \frac{1}{x} \le \frac{1}{n},$$

da cui

$$\Big(1 + \frac{1}{n+1}\Big)^x \le \Big(1 + \frac{1}{x}\Big)^x \le \Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^x,$$

Inoltre (per la monotonia delle esponenziali di base > 1) si ha

$$\Big(1 + \frac{1}{n+1}\Big)^x \ge \Big(1 + \frac{1}{n+1}\Big)^n = \frac{\Big(1 + \frac{1}{n+1}\Big)^{n+1}}{1 + \frac{1}{n}},$$

e anche

$$\Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^x \le \Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^{n+1} = \Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^n \Big(1 + \frac{1}{n}\Big).$$

In conclusione, abbiamo la doppia diseguaglianza

$$\frac{\Big(1 + \frac{1}{n+1}\Big)^{n+1}}{1 + \frac{1}{n}} \le \Big(1 + \frac{1}{x}\Big)^x \le \Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^n \Big(1 + \frac{1}{n}\Big).$$

Quando $x \to +\infty$ (e in corrispondenza $n \to +\infty$) i termini estermi della diseguqglianza tendono ad e, e il limite è dimostrato per il teorema dei due carabinieri.

Limiti e composizione

L'operazione di limite si 'comporta bene' per composizione con funzioni continue.

Teorema. *Sia* $\lim_{x\to x_0} g(x) = y_0$ *e sia* f *continua in* y_0*. Allora esiste*

$$\lim_{x\to x_0} f(g(x)) = f(y_0).$$

Questo teorema ci dice che se $\lim_{x\to x_0} g(x) = y_0$ e se f è continua in y_0, per calcolare il limite

$$\lim_{x\to x_0} f(g(x)),$$

basta porre $y = g(x)$ e calcolare il limite

$$\lim_{y\to y_0} f(y).$$

Se f è continua questo limite è $f(y_0)$. Un altro modo per scrivere il risultato è che se f è continua allora

$$\lim_{x\to x_0} f(g(x)) = f\Big(\lim_{x\to x_0} g(x)\Big).$$

Corollario. *Se* g *è continua in* x_0 *e* f *è continua in* $y_0 = g(x_0)$ *allora la composizione* $f \circ g$ *è continua in* x_0*.*

Esempio. Calcoliamo

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$$

Per ricondurci al limite fondamentale, moltiplichiamo e dividiamo per $(1 + \cos x)$, per cui (ricordandoci che $1 - \cos^2 x = \sin^2 x$)

$$\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)} = \frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)} = \frac{\sin^2 x}{x^2(1+\cos x)}.$$

Dato che $(1 + \cos x) \to 2$, abbiamo

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \lim_{x\to 0} \Big(\frac{\sin x}{x}\Big)^2.$$

Possiamo vedere quest'ultimo limite come composizione delle funzioni

$$g(x) = \frac{\sin x}{x}, \qquad f(y) = y^2,$$

e applicare il teorema con $y_0 = 1$. Dunque

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

Esempio. Calcoliamo
$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$$

Si ha
$$\frac{\tan x - \sin x}{x^3} = \frac{\tan x}{x} \cdot \frac{1-\cos x}{x^2},$$
quindi il limite vale 1/2.

Esempio. Mostriamo che in generale non si può sostituire l'ipotesi che f sia continua in y_0 con l'ipotesi che esista il $\lim\limits_{y\to y_0} f(y)$.

Basta infatti prendere $f(y) = \begin{cases} 0 & \text{se } y \neq 0 \\ 1 & \text{se } y = 0 \end{cases}$ e g la costante 0. Allora per ogni x_0 abbiamo
$$\lim_{x\to x_0} g(x) = 0,$$
per cui $y_0 = 0$, ma
$$\lim_{x\to x_0} f(g(x)) = 1 \neq 0 = \lim_{y\to 0} f(y).$$

La ragione per cui non vale la conclusione del teorema in questo esempio è che la funzione g prende il valore 0 che è 'proibito' nel calcolo del limite $\lim\limits_{y\to 0} f(y)$. Se si evita il valore 'proibito' il teorema vale come segue:

Teorema. *Se* $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = y_0$, $\lim\limits_{y\to y_0} f(y) = L$, *e* $g(x) \neq y_0$ *per* $x \neq x_0$ *(per* x *sufficientemente vicino a* x_0*), allora*
$$\lim_{x\to x_0} f(g(x)) = L.$$

Esempio. Calcolare
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(5x+x^2)}{10x+7x^2}.$$

Scriviamo
$$\frac{\sin(5x+x^2)}{10x+7x^2} = \frac{\sin(5x+x^2)}{5x+x^2} \cdot \frac{5x+x^2}{10x+7x^2}.$$
Si ha
$$\lim_{x\to 0} \frac{5x+x^2}{10x+7x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x(5+x)}{x(10+7x)} = \lim_{x\to 0} \frac{5+x}{10+7x} = \frac{1}{2},$$
per cui
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(5x+x^2)}{10x+7x^2} = \frac{1}{2} \lim_{x\to 0} \frac{\sin(5x+x^2)}{5x+x^2}.$$
Poniamo
$$g(x) = 5x + x^2, \qquad f(y) = \frac{\sin y}{y}.$$

Possiamo applicare il teorema con $x_0 = 0$, e

$$y_0 = \lim_{x \to 0} g(x) = 0,$$

dato che $g(x) \neq 0$ per $x \neq 0$ (per x sufficientemente vicino a x_0). Si ha allora

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(5x + x^2)}{5x + x^2} = \lim_{y \to 0} f(y) = 1.$$

Esempio. Si ha

$$\lim_{x \to -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Possiamo scrivere $y = -x$, per cui

$$\lim_{x \to -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{y \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{y}\right)^{-y}$$

$$= \lim_{y \to +\infty} \left(\frac{y-1}{y}\right)^{-y} = \lim_{y \to +\infty} \left(\frac{y}{y-1}\right)^{y}$$

$$= \lim_{y \to +\infty} \left(\frac{y-1}{y}\right)^{-y} = \lim_{y \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{y-1}\right)^{y}$$

Poniamo $z = y - 1$. Allora si ha

$$= \lim_{y \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{y-1}\right)^{y} = \lim_{z \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{z}\right)^{z+1}$$

$$= \lim_{z \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{z}\right)^{z} \left(1 + \frac{1}{z}\right) = e.$$

Esempio. Per ogni $a \in \mathbf{R}$ si ha

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = e^a.$$

Se $a = 0$ il limite è banale. Altrimenti si usa la sostituzione $y = x/a$.