

15 LIMITI DESTRO E SINISTRO

Definizione Se f è definita in un qualche intervallo della forma $(x_0, x_0 + \delta)$ allora si definisce il LIMITE DESTRO DI f IN x_0 e scriviamo

$$\lim_{x \rightarrow x_0+} f(x)$$

se nella definizione di limite teniamo conto solo dei punti $x > x_0$. Simmetricamente si definisce il LIMITE SINISTRO DI f IN x_0 e scriviamo

$$\lim_{x \rightarrow x_0-} f(x).$$

ESEMPIO: la funzione parte intera non ammette limite per $x \rightarrow 0$, però si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0-} [x] = -1 \quad \lim_{x \rightarrow 0+} [x] = 0.$$

Analogamente

$$\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{1}{x} = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{x} = +\infty.$$

Proposizione. Sono equivalenti le condizioni:

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad & \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \\ \text{ii)} \quad & \lim_{x \rightarrow x_0+} f(x) = L \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow x_0-} f(x) = L. \end{aligned}$$

DIMOSTRAZIONE i) $\implies$ ii): fissato ε (oppure M se il limite è $\pm\infty$) il δ che va bene per la def. di limite va bene anche per i limiti destro e sinistro;

ii) $\implies$ i): fissato ε (oppure $M...$) si trova δ' (risp. δ'') tale che se $x \in (x_0 - \delta', x_0)$ (risp. se $x \in (x_0, x_0 + \delta'')$ allora $|f(x) - L| \leq \varepsilon$ (risp. $f(x) \geq M...$). Prendendo $\delta = \min\{\delta', \delta''\}$ questo va bene nella def. di limite. $\square$

La proposizione precedente è utile nel calcolo dei limiti che si possono suddividere nel calcolo separato di limite destro e sinistro.

Esempio. Si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} = e.$$

Per provarlo mostriamo che coincidono i limiti destro e sinistro. Per il destro si ha, scrivendo $y = 1/x$,

$$\lim_{x \rightarrow 0+} (1+x)^{1/x} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y = e.$$

Analogamente per il sinistro.

LIMITI FONDAMENTALI (seconda parte)

Il limite che permette il calcolo di forme indeterminate in cui sono presenti funzioni logaritmiche è:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1.$$

La dimostrazione di questo limite si ha subito dal limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} = e.$$

Esempio. Si calcoli

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(\cos x)}{x^2}.$$

Scriviamo

$$\log(\cos x) = \log(1 + (\cos x - 1)),$$

per cui (pongo $y = \cos x - 1$)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(\cos x)}{\cos x - 1} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\log(1+y)}{y} = 1.$$

Allora il limite diventa

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = -\frac{1}{2}.$$

Il limite che permette di trattare limiti al finito in cui è presente un'esponenziale è

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

Questo limite si ottiene subito dal precedente, scrivendo

$$e^x - 1 = y, \quad x = \log(1+y),$$

per cui

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\log(1+y)} = 1.$$

Esempio. Se $a > 0$ allora

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \log a.$$

Infatti, basta scrivere

$$a^x = e^{x \log a},$$

e usare la sostituzione $y = x \log a$.

Esempio. Calcoliamo

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{1/x^2}.$$

Il limite è nella forma $1^{+\infty}$. Per ricondurlo ad una forma nota, riscriviamo la funzione in base e

$$(\cos x)^{1/x^2} = e^{\log(\cos x)/x^2}.$$

Dato che e^y è continua e

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(\cos x)}{x^2} = -\frac{1}{2},$$

il limite vale $e^{-1/2}$.

Nota. Abbiamo usato l'uguaglianza

$$f(x)^{g(x)} = e^{g(x) \log f(x)},$$

che si usa spesso per trattare le forme esponenziali quando la base è una funzione.

Esempio. Per calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{\sin x}{x - \sin x}}$$

scriviamo la funzione come

$$e^{\frac{\sin x}{x - \sin x} \log\left(\frac{\sin x}{x}\right)}.$$

Con il cambio di variabili

$$\frac{\sin x}{x} - 1 = y,$$

si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log\left(\frac{\sin x}{x}\right)}{\frac{\sin x}{x} - 1} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\log(1 + y)}{y} = 1,$$

quindi

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x - \sin x} \log\left(\frac{\sin x}{x}\right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x - \sin x} \left(\frac{\sin x}{x} - 1 \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x - \sin x} \cdot \frac{\sin x - x}{x} = - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = -1, \end{aligned}$$

e il limite vale e^{-1} .

16 ALCUNI ESERCIZI SUI LIMITI FONDAMENTALI

Risolvere i seguenti esercizi facendo uso dei limiti fondamentali.

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\tan 5x};$
2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi 4^x)}{\sin(4^{\pi x} - 1)};$
3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + 3x)^{2/x}}{(1 + 7x)^{1/x}};$
4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + 3x)^{2x} - 1}{\sin(x^2)};$
5. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^4 \left(\log(4 + x^4) - 4 \log x \right);$
6. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(1 + \frac{1}{x} \right)^{1/x}.$