17 CONFRONTI TRA FUNZIONI

Quando si ha una somma di più funzioni di cui si vuole calcolare il limite in un punto x_0 la 'strategia' è di individuare la funzione 'dominante' e isolarla da quelle 'trascurabili'.

Esempio. Per calcolare

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^4 + x^3 + 5}{6x^4 + 2x^2 + x},$$

si nota che sia al nmeratore che al denominatore l'andamento 'dominante' è quello di x^4 per cui lo si isola:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^4(3 + \frac{1}{x} + 5\frac{1}{x^4})}{x^4(6 + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3})} = \frac{1}{2}.$$

In questo passaggio abbiamo usato il fatto che x^3, $2x^2$, x e 5 sono 'trascurabili rispetto a x^4', ovvero divise per x^4 tendono a 0 (sono infinitesime).

Introduciamo ora una notazione per esprimere questo concetto di confronto tra comportamenti di funzioni.

Definizione Diciamo che g è un O PICCOLO di f per $x \to x_0$ se si ha

$$\lim_{x\to x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = 0.$$

In tal caso si scrive $g = o(f)$ (per $x \to x_0$).

Questo concetto verrà usato nel seguente modo: se $g = o(f)$ allora (h è un'altra funzione)

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) + g(x)}{h(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{h(x)}$$

(ovvero g si può 'trascurare'). Per convincersene, basta scrivere

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) + g(x)}{h(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)\Big(1 + \frac{g(x)}{f(x)}\Big)}{h(x)}.$$

Operazioni sugli o piccolo (1) $o(f) + o(f) = o(f)$ (ovvero: se sommiamo due funzioni trascurabili rispetto a f otteniamo ancora una funzione trascurabile rispetto a f)
(2) $o(o(f)) = o(f)$ (se una funzione è trascurabile rispetto ad una funzione trascurabile rispetto ad f, è trascurabile rispetto ad f)
(3) $g \cdot o(f) = o(fg)$ (se moltiplico una funzione trascurabile rispetto ad f per g ottengo una funzione trascurabile rispetto a fg)

(4) $o(f+o(f))=o(f)$, ecc.
Nota: (a) $g=o(1)$ equivale a g infinitesima;
(b) a volte scriveremo $g << f$ invece di $g=o(f)$ (e a volte leggeremo 'f è molto più grande di g' (per $x\to x_0$)).

Esempio. Dai limiti fondamentali otteniamo (per $x\to 0$):

$$\sin x = x+o(x); \qquad \cos x = 1-\frac{1}{2}x^2+o(x^2);$$

$$e^x = 1+x+o(x); \qquad \log(1+x)=x+o(x),$$

ecc.

Confronti tra 'infiniti' I limiti all'infinito calcolati per le successioni ci danno un certo numero di confronti per $x\to+\infty$:

$$1 << \log x << x^\beta << a^x$$

per ogni $a>1$ e $\beta>0$. Per dimostrare queste relazioni basta ricondursi agli analoghi limiti per successione tramite la funzione parte intera.
Esempio. Per calcolare

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2^x+x\log x+\sin x^2}{x+x\log x+4^{-x}}$$

notiamo che

$$\sin x^2\le 1 << x\log x << 2^x$$

e

$$4^{-x} << x << x\log x,$$

quindi (eliminando le funzioni trascurabili) il limite è

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2^x}{x\log x}=0$$

(per esempio perchè $x\log x << x^2 << 2^x$).

Esempi.
(1) $\lim_{x\to0^+} x\log x=0$ (per provarlo basta porre $y=1/x$);
(2) $\lim_{x\to0^+} x^x=1$ (per provarlo basta scrivere

$$x^x=e^{x\log x});$$

(3) $\lim_{x\to0^+}\frac{x^x-1}{x}=-\infty$. Per provarlo basta calcolare

$$\lim_{x\to0^+}\frac{e^{x\log x}-1}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{e^{x\log x}-1}{x\log x}\cdot\log x=\lim_{x\to0^+}\log x=-\infty.$$

18 Andamenti asintotici

Al finito: sia $f:(a,b)\to\mathbf{R}$ $(a,b\in\mathbf{R})$.

1. Se esiste il limite

$$\lim_{x\to a+} f(x) = L$$

allora diremo che f È ESTENDIBILE CON CONTINUITÀ (da destra) in a: la funzione

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & x\in(a,b) \\ L & x=a \end{cases}$$

è *continua a destra* in a.

Analogamente si definisce l'estendibilità (da sinistra) in b

Esempi. (a) $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ è estendibile con continuità (sia da destra che da sinistra) in 0, ovvero la funzione

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & x\in\mathbf{R}\setminus\{0\} \\ 1 & \text{se } x=0 \end{cases}$$

è *continua* in 0.
(b) $f(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{|x|}$ è estendibile con continuità da destra in 0, ma non da sinistra.

2. Se esiste il limite

$$\lim_{x\to a+} f(x) = \pm\infty$$

allora diremo che la retta verticale $x=a$ è un ASINTOTO VERTICALE per f (analogamente in b)

Esempi. (a) $f(x)=\frac{1}{x^2}$, o $f(x)=-\log|x|$, ha $x=0$ come asintoto verticale e $f(x)\to+\infty$ per $x\to 0$;
(b) $f(x)=\frac{1}{x}$ ha $x=0$ come asintoto verticale ma non ne esiste il limite in 0;
(c) $f(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{|x|}$ ha $x=0$ come asintoto verticale, ma solo il limite sinistro è $+\infty$.

3. Se $f:(a,b)\cup(b,c)\to\mathbf{R}$ ed esistono i limiti

$$\lim_{x\to b-} f(x) \neq \lim_{x\to b+} f(x),$$

entrambi in $\mathbf{R}$, allora si dice che b è un PUNTO DI SALTO O PUNTO DI DISCONTINUITÀ per f. Notiamo che in questo caso f è estendibile con continuità in b sia da destra che da sinistra.

Esempi. (a) $f(x)=\operatorname{sign} x$ ha $x=0$ come punto di salto;
(b) $f(x)=[x]$ ha $x=0$ come punto di salto;

(c) $f(x) = \arctan(1/x)$ ha $x = 0$ come punto di salto.

All'infinito: $f : (a, +\infty) \to \mathbf{R}$ (le stesse considerazioni valgono se $f : (-\infty, b) \to \mathbf{R}$).

Diciamo che f e g sono ASINTOTICHE (per $x \to +\infty$) se si ha

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - g(x) = 0.$$

Esempi. (a) $\log(x^3 + \sin x)$ è asintotica a $3\log x$ per $x \to +\infty$ (ma per esempio $e^{x^3+\sin x}$ **non** è asintotica a e^{x^3}));
(b) $x + \frac{\sin e^x}{x}$ è asintotica a x per $x \to +\infty$ (notare che questa funzione oscilla sempre di piu' quando $x \to +\infty$);
(c) $x + \arctan x$ è asintotica a $x + \pi/2$ per $x \to +\infty$ e a $x - \pi/2$ per $x \to +\infty$.

Il caso in cui g è una costante o una funzione affine è particolarmente semplice, e merita una notazione separata.

Definizione Diremo che la retta $y = L$ è ASINTOTO ORIZZONTALE per f (per $x \to +\infty$) se f è asintotica alla costante L, o, semplicemente

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L.$$

Definizione Sia $m \neq 0$; diremo che la retta $y = mx + q$ è ASINTOTO OBLIQUO per f (per $x \to +\infty$) se f è asintotica alla funzione $g(x) = mx + q$.

In questo caso abbiamo $f(x) - mx - q = o(1)$, da cui (dividendo per x)

$$m = \frac{f(x)}{x} - \frac{q}{x} + \frac{1}{x}o(1) = \frac{f(x)}{x} + o(1),$$

mentre $q = f(x) - mx = o(1)$. Dunque si ha la seguente 'ricetta' per il calcolo di asintoti orizzontali/obliqui:
(1) si calcola il limite di $f(x)$. Se esiste finito ($= L$) questo da' l'asintoto orizzontale;
(2) se il limite è $\pm\infty$, allora si calcola il limite di $f(x)/x$. Se questo è infinito o non esiste, allora non c'e' asintoto. Se è finito il suo valore m ci da' il *coefficiente angolare* dell'asintoto;
(3) si calcola il limite di $f(x) - mx$. Se questo è finito allora il suo valore q da' il *termine noto* dell'asintoto

Esempio. Sia $f(x) = \log(7^x + 15x - 8)$. Il limite a $+\infty$ è $+\infty$, quindi non c'e' asintoto orizzontale. Calcoliamo il limite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\log\Big(7^x\Big(1 + \frac{15x}{7^x} - \frac{8}{7^x}\Big)\Big)}{x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\log 7^x + \log\left(1 + \frac{15x}{7^x} - \frac{8}{7^x}\right)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\log 7 + o(1)}{x} = \log 7.$$

Dunque $m = \log 7$ e

$$q = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - x\log 7) = \lim_{x\to+\infty} \log\left(1 + \frac{15x}{7^x} - \frac{8}{7^x}\right) = 0.$$

quindi l'asintoto obliquo è $x\log 7$.

Esempio. Sia $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 4\log(1 + x^3)}$. Notiamo che per $x \to +\infty$

$$f(x) = |x|\sqrt{1 + \frac{2}{x} + 4\frac{\log(1 + x^3)}{x^2}} = x(1 + o(1)) = x + o(x).$$

Allora

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x + o(x)}{x} = 1,$$

e

$$q = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - x) = \lim_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2 + 2x + 4\log(1 + x^3)} - x)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2x + 4\log(1 + x^3)}{\sqrt{x^2 + 2x + 4\log(1 + x^3)} + x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2x + 4\log(1 + x^3)}{2x + o(1)} = 1.$$

Quindi l'asintoto obliquo è $y = x + 1$.

Esempio. Sia $f(x) = x + \log x$. Questa funzione evidentemente non ammette asintoti a $+\infty$, anche se il calcolo da':

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} (1 + \frac{\log x}{x}) = 1.$$

In questo caso pero' $q = +\infty$.