19 LIMITI DI FUNZIONI CON DOMINIO QUALSIASI

Definizione Sia $A \subseteq \mathbf{R}$; diremo che $x_0 \in \overline{\mathbf{R}}$ è un PUNTO DI ACCUMULAZIONE per A se c'e' una successione $\{x_n\}$ con $x_n \in A \setminus \{x_0\}$ che converge a x_0. Un punto di A che non sia un punto di accumulazione per A si dice un PUNTO ISOLATO di A.

ESEMPI: 1) $A = \{(1/n) : \ n \in \mathbf{N}, \ n \neq 0\}$. 0 è l'unico punto di accumulazione per A. Inoltre A è composto solo di punti isolati. 2) I punti di accumulazione per $\mathbf{Z}$ sono $+\infty$ e $-\infty$. Naturalmente, anche $\mathbf{Z}$ è composto solo di punti isolati.

Definizione Sia $f : A \to \mathbf{R}$ e x_0 di accumulazione per A. Allora diciamo che $f(x)$ tende a $L \in [-\infty, +\infty]$ per $x \to x_0$ (e scriviamo ancora $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$) se per ogni $x_n \to x_0$ con $x_n \in A \setminus \{x_0\}$ si ha $f(x_n) \to f(x_0)$.

NOTA: questa definizione può venire riscritta con la terminologia degli ε e δ, distinguendo i vari casi. Per esempio se $x_0, L \in \mathbf{R}$ $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$ significa che

$\forall\varepsilon > 0 \ \exists\delta > 0 : \ \forall x \neq x_0 : \ x \in dom f$ e $|x - x_0| \leq \varepsilon$, si ha $|f(x) - L| < \delta$

(PER ESERCIZIO: riscrivere i vari casi).

ESEMPI: 1) ogni successione è una funzione con dominio $\mathbf{N}$, e quindi $+\infty$ è l'unico punto per cui si possa applicare questa definizione (che naturalmente coincide con la solita definizione di limite di una successione). 2) $A = \{(1/n) : \ n \in \mathbf{N}, \ n \neq 0\}$, $f : A \to \mathbf{R}$ sia data da $f(x) = (1 + x)^{\frac{1}{x}}$ per $x \in A$. Allora si ha $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = e$.

Teorema. (Unicità) *Sia x_0 di accumulazione per $dom f$. Se $f(x) \to L$ e $f(x) \to L'$ per $x \to x_0$, allora $L = L'$*

DIMOSTRAZIONE (supponiamo x_0, L e L' numeri reali) Supponiamo $L \neq L'$. Sia $\dfrac{|L - L'|}{2} > \varepsilon > 0$. Allora $\exists\ \delta > 0$: $x_0 \neq x \in dom f$ e $|x - x_0| \leq \delta \Longrightarrow |f(x) - L| \leq \varepsilon$, ed esiste $\delta' > 0$: $x_0 \neq x \in dom f$ e $|x - x_0| \leq \delta' \Longrightarrow |f(x) - L'| \leq \varepsilon$. Quindi $x \neq x_0$ e $|x_0 - x| \leq \min\{\delta, \delta'\}$ si ha $|L - L'| \leq |L - x| + |x - L'| \leq 2\varepsilon < |L - L'|$. Assurdo. $\square$

PER ESERCIZIO: dimostrare il teorema negli altri casi, anche usando la definizione mediante successioni.

20 PROPRIETÀ GLOBALI DELLE FUNZIONI CONTINUE

Definizione f si dice CONTINUA se è continua in ogni punto del suo dominio.
NOTA: se il dominio contiene *punti isolati* (ovvero punti che non sono di accumulazione, come per esempio tuuti i punti di $\mathbf{N}$) allora la funzione è continua in ogni punto isolato (per definizione).
NOTA: polinomi, esponenziali, funzioni trigonometriche sono continue. $x \mapsto \frac{1}{x}$ è continua (con dominio $\mathbf{R} \setminus \{0\}$), $x \mapsto \sin(\frac{1}{x})$ è continua (con dominio $\mathbf{R} \setminus \{0\}$).
NOTA: essere f continua su un intervallo si può pensare come una proprietà del grafico "che può essere tracciato senza staccare la penna dal foglio". Questa proprietà vaga viene resa più precisa dai seguenti teoremi, che non dimostreremo

Teorema. (di Weierstrass) *Ogni funzione reale continua in un intervallo chiuso e limitato ha massimo e minimo.*
Corollario. Ogni funzione continua su un intervallo chiuso e limitato è limitata.

NOTA. La continuità è essenziale: la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in (0,1) \\ \\ \frac{1}{2} & \text{se } x = 0 \text{ o } x = 1 \end{cases}$$

non ammette max/min in $[0,1]$ (dove non è continua), ne' in $(0,1)$ (dove è continua).

Teorema. (di Bolzano o "degli zeri") *Sia* $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ *una funzione continua tale che* $f(a)f(b) < 0$. *Allora esiste almeno un punto* $x \in]a,b[$ *tale che* $f(x) = 0$.
NOTA. Questo teorema afferma una cosa 'naturale' per una curva 'tracciata senza staccare la penna dal foglio': se il punto iniziale sta sopra l'asse delle x e quello finale sotto, ad un certo punto la curva deve attraversare l'asse delle x.

Esempio. Sia P un polinomio di grado 3. Allora l'equazione $P(x) = 0$ ha almeno una soluzione.

Infatti, a meno di dividere per il coefficiente di x^3 se $P(x) = x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3$ si ha $P(x) \to \pm\infty$ per $x \to \pm\infty$. Quindi esiste M tale che $f(-M) < 0$ e $f(M) = 0$. Possiamo quindi applicare il teorema con $a = -M$ e $b = M$.

NOTAZIONE: se $f : A \to B$ è una funzione e $C \subseteq A$, allora definiamo $f(C) = \{f(x) : \ x \in C\} \subseteq B$. In particolare $f(domf)$ è l'*immagine* di f (imf).

Teorema. ("dei valori intermedi") *Sia I intervallo, e $f : I \to \mathbf{R}$ continua, allora $f(I)$ è intervallo*

DIMOSTRAZIONE Dobbiamo mostrare che se $x, y \in f(I)$ e $x < z < y$, allora $z \in f(I)$.

Siano $c, d \in I$ tali che $f(c) = x$, $f(d) = y$. Allora possiamo considerare la funz. $g(x) = f(x) - z$ sull'intervallo $[a, b] = [\min\{c, d\}, \max\{c, d\}]$. Si ha allora $g(a)g(b) < 0$ e g è continua. Per il teorema di Bolzano $\exists\ x \in]a, b[\colon g(x) = 0$, ovvero $f(x) = z$. I intervallo $\Longrightarrow x \in I \Longrightarrow z \in f(I)$. □

NOTA. Questo teorema ci dice che per provare che l'equazione $f(x) = y$ ha soluzione, nel caso di f continua e definita su un intervallo chiuso e limitato, allora basta verificare che $\min f \leq y \leq \max f$.

Esempio. Proviamo che esiste un mumero $x > 0$ tale che

$$e^x = \frac{1}{x}.$$

Questo problema si risolve con una 'risoluzione grafica': vicino allo 0 il grafico di e^x 'sta sotto' a quello di $1/x$, verso $+\infty$ la situazione si capovolge, quindi ci deve essere un punto in cui i grafici si intersecano... in questo ragionamento stiamo usando in verità la continuità delle funzioni come nel teorema degli zeri.

Per applicare il teorema degli zeri, consideriamo la funzione

$$f(x) = \frac{1}{x} - e^x.$$

Dato che $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ esiste $a > 0$ tale che $f(a) > 0$; dato che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$, esiste $b > a$ tale che $f(b) < 0$. A questo punto il teorema degli zeri ci assicura che esiste $x \in (a, b)$ tale che $f(x) = 0$, che è quello che volevamo.

Esempio. Trovare (se esiste) il

$$\min\Big\{\log\Big(3 + \Big|e^x - \frac{1}{x}\Big|\Big) : x > 0\Big\}.$$

Per quello che abbiamo visto sopra, esiste un punto in cui la quantità nel modulo si annulla, per cui il minimo è ottenuto in questo punto e vale $\log 3$.