21 IL RAPPORTO INCREMENTALE - DERIVATE

Definizione Sia f una funzione reale di variabile reale. Allora, dati $x, y \in \text{dom} f$ con $x \neq y$, si definisce il RAPPORTO INCREMENTALE di f tra x e y come

$$P_f(x, y) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y}.$$

OSSERVAZIONI: il rapporto incrementale ci permette di descrivere ‘quantitativamente’ il comportamento di una funzione. Per esempio:

- i) f è non decrescente $\iff P_f$ è non negativa;
- ii) f è strettamente crescente $\iff P_f$ è strettamente positiva;
- iii) se $f(x) = mx + q$ è affine allora P_f è il coefficiente angolare m .

Più in generale, $P_f(x, y)$ rappresenta la pendenza dell’angolo che la retta (la *secante* al grafico) passante per i punti $(x, f(x))$ e $(y, f(y))$ forma con l’asse coordinato orizzontale. Invece di studiare le proprietà di tutte le secanti è più comodo studiare le proprietà delle *tangenti*. Analiticamente, questo si traduce in un’operazione di limite che porta alla seguente definizione.

Definizione Sia I intervallo, $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ e x_0 un punto di I . Se esiste il limite

$$\lim_{x \rightarrow x_0} P_f(x, x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \overline{\mathbf{R}},$$

esso viene chiamato la DERIVATA di f nel punto x_0 e si indica con $f'(x_0)$. Se $f'(x_0) \in \mathbf{R}$ allora f si dice DERIVABILE in x_0 .

ALTRE NOTAZIONI per $f'(x_0)$: $Df(x_0)$, $\frac{d}{dx}f(x_0)$, $\frac{dy}{dx}$, y'

Definizione Sia I intervallo, $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ e x_0 un punto di I . Se esiste il limite

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} P_f(x, x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \overline{\mathbf{R}},$$

esso viene chiamato la DERIVATA SINISTRA di f nel punto x_0 e si indica con $f'_-(x_0)$.

Se esiste il limite

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} P_f(x, x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \overline{\mathbf{R}},$$

esso viene chiamato la DERIVATA DESTRA di f nel punto x_0 e si indica con $f'_+(x_0)$.

ESEMPLI: 1) $f = c$ costante $Dc = 0$ in ogni punto. Infatti per ogni coppia di punti $P_f(x, y) = 0$.

2) $f(x) = x$. Allora $P_f(x, y) = 1$ per ogni coppia di punti, per cui $f'(x) = 1$ per ogni x .

3) $f(x) = x^n$ ($n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$). Allora

$$P_f(x, y) = x^{n-1} + x^{n-2}y + \dots + xy^{n-2}x + y^{n-1}, \text{ per cui } f'(x) = nx^{n-1}.$$

$$\begin{aligned} 4) f(x) = \frac{1}{x}. \text{ Allora } (x \neq 0) f'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(1/x) - (1/x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x_0 - x)/(x_0x)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} -\frac{1}{x_0x} = -\frac{1}{x_0^2}. \end{aligned}$$

5) $f(x) = |x|$. Sia $x_0 > 0$; allora

$$P_f(x, x_0) = \frac{|x| - |x_0|}{x - x_0} = \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1 \text{ per tutti gli } x > 0, \text{ per cui } f'(x_0) = 1. \text{ Se}$$

invece $x_0 < 0$,

$$P_f(x, x_0) = \frac{|x| - |x_0|}{x - x_0} = \frac{-x - (-x_0)}{x - x_0} = -1 \text{ per tutti gli } x < 0, \text{ per cui } f'(x_0) = -1.$$

$$\text{Se } x_0 = 0 \text{ si ha } P_f(x, 0) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0, \\ -1 & \text{se } x < 0, \end{cases}$$

per cui $f'_-(x_0) = -1$ e $f'_+(x_0) = 1$; in particolare non esiste $f'(x_0)$. Riassumendo

$$D|x| = \frac{x}{|x|} = \frac{|x|}{x}.$$

$$6) f(x) = \operatorname{sgn}(x)\sqrt{|x|} = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{se } x \geq 0 \\ -\sqrt{|x|} & \text{se } x < 0 \end{cases}. \text{ Allora}$$

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x} - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty,$$

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-\sqrt{|x|} - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{\sqrt{|x|}} = +\infty.$$

Quindi $f'(0) = +\infty$, e f non è derivabile in 0.

$$7) f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}. \text{ Allora}$$

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - 1}{x - 0} = 0; f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{0 - 1}{x - 0} = +\infty.$$

8) calcoliamo la derivata di e^x . Si ha

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{e^x - e^{x_0}}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} e^{x_0} \left(\frac{e^{(x-x_0)} - 1}{x - x_0} \right) = e^{x_0}.$$

Dunque $De^x = e^x$.

9) dal limite fondamentale $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$ si deduce

$$\sin x = x + o(x) \quad \cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2),$$

da cui si ottiene subito la derivata di sin e cos. Per esempio si ha

$$\begin{aligned} D \sin x &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(x+t) - \sin x}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin x \cos t + \sin t \cos x - \sin x}{t} \\ &= \cos x \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} + \sin x \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos t - 1}{t} = \cos x + \sin x \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{t}{2} + o(t) \right) = \cos x. \end{aligned}$$

Differenziabilità

Definizione Sia I intervallo, $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ e $x_0 \in I$. Diciamo che f è DIFFERENZIABILE in x_0 quando esiste $\lambda \in \mathbf{R}$ tale che si abbia $f(x) = f(x_0) + \lambda(x - x_0) + o(x - x_0)$

per $x \rightarrow x_0$

SIGNIFICATO GEOMETRICO: la retta $y = f(x_0) + \lambda(x - x_0)$ approssima la curva $y = f(x)$ “ad un ordine superiore a $x - x_0$ ” (questa retta è TANGENTE alla curva).

Teorema. f differenziabile in $x_0 \iff f$ derivabile in x_0 . In tal caso $\lambda = f'(x_0)$ e la RETTA TANGENTE è data da

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

DIMOSTRAZIONE $f(x) = f(x_0) + \lambda(x - x_0) + o(x - x_0)$ per $x \rightarrow x_0 \iff$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - \lambda(x - x_0)}{x - x_0} = 0 \iff \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lambda. \quad \square$$

Teorema. f derivabile in $x_0 \implies f$ continua in x_0 .

DIMOSTRAZIONE Se $f(x) = f(x_0) + \lambda(x - x_0) + o(x - x_0)$ per $x \rightarrow x_0$, allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x_0) + \lambda(x - x_0) = f(x_0). \quad \square$$

22 CALCOLO DI DERIVATE

Dal teorema di linearità per i limiti si ha subito:

Teorema. (LINEARITÀ) Sia I intervallo e x_0 punto interno a I . Se $f, g : I \rightarrow \mathbf{R}$ sono derivabili in x_0 e $c \in \mathbf{R}$, allora sono derivabili in x_0 anche $f + g$ e cf e si ha $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$, $(cf)'(x_0) = c(f'(x_0))$.

Teorema. (DERIVATA DI COMPOSIZIONE) Siano I e J intervalli; $f : I \rightarrow \mathbf{R}$, $g : J \rightarrow \mathbf{R}$ x_0 un punto interno a I tale che $f(x_0)$ è interno a J . Se f è derivabile in x_0 e g è derivabile in $f(x_0)$, allora $g \circ f$ è derivabile in x_0 , e si ha

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) f'(x_0).$$

DIMOSTRAZIONE Sia $y_0 = f(x_0)$. Dalla differenziabilità di g in y_0 si ha $g(y) = g(y_0) + g'(y_0)(y - y_0) + o(y - y_0)$, per $y \rightarrow y_0$. In particolare per $y = f(x)$ e $x \rightarrow x_0$ si ha $g(f(x)) = g(y_0) + g'(y_0)(f(x) - y_0) + o(f(x) - y_0)$, ovvero

$(g \circ f)(x) = (g \circ f)(x_0) + g'(y_0)(f(x) - y_0) + o(f(x) - y_0)$. Dalla differenziabilità di f abbiamo

$$f(x) - y_0 = f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0) \text{ e dunque}$$

$$(g \circ f)(x) = (g \circ f)(x_0)$$

$$+ g'(y_0)(f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)) + o(f'(x_0)(x - x_0)) \\ = (g \circ f)(x_0) + g'(y_0)f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0).$$

Questo mostra che $(g \circ f)$ è differenziabile in x_0 e la sua derivata è $g'(y_0)f'(x_0)$. $\square$

ESEMPI: 1) $n \in \mathbf{N}$ $D(x^{-n}) = -nx^{-n-1}$.

La funzione $x \mapsto x^{-n}$ si può considerare come composizione delle funzioni $f(x) = x^n$ e $g(y) = 1/y$; e sappiamo che $f'(x) = nx^{n-1}$, $g'(y) = -1/y^2$. Dunque $D(x^{-n}) = g'(f(x)) f'(x) = -\frac{1}{(x^n)^2} (nx^{n-1}) = -nx^{-n-1}$;

$$2) D\left(\frac{1}{f}\right) = -\frac{1}{f^2} f' \text{ (considerare } \frac{1}{f} \text{ come composizione di } f \text{ e } 1/y).$$

Teorema. (DERIVATA DEL PRODOTTO) Siano $f, g : I \rightarrow \mathbf{R}$ derivabili in $x_0 \in I$; allora anche fg è derivabile in x_0 , e si ha

$$(fg)'(x_0) = f(x_0)g'(x_0) + f'(x_0)g(x_0).$$

DIMOSTRAZIONE $(fg)(x) - (fg)(x_0) = f(x)(g(x) - g(x_0)) + g(x_0)(f(x) - f(x_0))$, per cui

$$P_{fg}(x, x_0) = f(x)P_g(x, x_0) + g(x_0)P_f(x, x_0).$$

Passando al limite per $x \rightarrow x_0$ (ricordando che $f(x) \rightarrow f(x_0)$) si ha la tesi. $\square$

Esercizio. $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$. (Applicare la derivazione del prodotto di f e $1/g$ ricordando che $D(g^{-1}) = -g^{-2}g'$).

La funzione derivata

Definizione Sia $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ una funzione tale che

$$I' = \{x \in I : f \text{ è derivabile in } x\} \neq \emptyset,$$

allora si chiama DERIVATA DI f la funzione $f' : I' \rightarrow \mathbf{R}$, $x \mapsto f'(x)$ che associa ad ogni punto $x \in I'$ la derivata di f in x .

ESEMPI: 1) $f(x) = x$, $\text{dom } f = \text{dom } f' = \mathbf{R}$; $f' = 1$;

2) $f(x) = |x|$, $\text{dom } f' = \mathbf{R} \setminus \{0\} \neq \text{dom } f = \mathbf{R}$; $f' = \frac{x}{|x|}$;

3) $f(x) = \text{sgn}(x) \sqrt{|x|}$ $\text{dom } f' \neq \text{dom } f = \mathbf{R}$ in quanto $0 \notin \text{dom } f'$.

4) $f(x) = \frac{1}{x}$, $\text{dom } f = \text{dom } f' = \mathbf{R} \setminus \{0\}$; $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$.

Derivate delle funzioni elementari

È utile *imparare a memoria* le derivate delle funzioni più usate. In particolare:

$$D(e^x) = e^x, \quad D1 = 0, \quad D(x^\alpha) = \alpha x^{\alpha-1} \quad (\alpha \in \mathbf{R} \setminus \{0\}),$$

$$D \cos x = -\sin x \quad D \sin x = \cos x$$

e quindi anche $D \tan x = 1 + \tan^2 x$

$$D \cosh x = \sinh x \quad D \sinh x = \cosh x,$$

dove $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ sono COSENO E SENO IPERBOLICO.

Esercizi. Usando le derivate delle funzioni elementari e le regole di calcolo calcoliamo:

1) $D(\sin 2x) = (\cos 2x) 2$;

2) $D(\log \cos x) = \frac{1}{\cos x} (-\sin x) = -\frac{\sin x}{\cos x} = -\tan x$;

3) la derivata di $(\log x)^{\sqrt{x}}$ ($x > 1$): possiamo scrivere

$$(\log x)^{\sqrt{x}} = \exp\left(x^{1/2} \log(\log x)\right).$$

Si ha

$$D\left(x^{1/2} \log(\log x)\right) = \log(\log x) D x^{1/2} + x^{1/2} D \log(\log x).$$

Dato che

$$D x^{1/2} = \frac{1}{2} x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \text{e} \quad D \log(\log x) = \frac{1}{\log x} \frac{1}{x}, \quad \text{si ha dunque}$$

$$\begin{aligned}
D\left(x^{1/2} \log(\log x)\right) &= \log(\log x) \frac{1}{2\sqrt{x}} + x^{1/2} \frac{1}{x \log x} \\
&= \frac{\log x \log(\log x) + 2}{2\sqrt{x} \log x},
\end{aligned}$$

e infine

$$\begin{aligned}
D(\log x)^{\sqrt{x}} &= \exp\left(x^{1/2} \log(\log x)\right) \frac{\log x \log(\log x) + 2}{2\sqrt{x} \log x} \\
&= (\log x)^{(\sqrt{x}-1)} \frac{\log x \log(\log x) + 2}{2\sqrt{x}}.
\end{aligned}$$

Esercizio: verificare la formula generale per la derivata di f^g :

$$D(f^g) = f^g \left(\frac{f'}{f} g + g' \log f \right).$$

(scrivere $f^g = \exp(g \log f)$...)