23 INVERSIONE - DERIVATA DELL'INVERSA

RICORDIAMO: Se A, B sono insiemi e $f : A \to B$ è una funzione iniettiva, ovvero $a_1 \neq a_2 \Longrightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$, allora la relazione $g(b) = a \Longleftrightarrow f(a) = b$ definisce una funzione $g : \mathit{Im}\, f \to A$ ($\mathit{Im}\, f$ l'immagine di f). Questa funzione g si chiama la FUNZIONE INVERSA di f e viene denotata con f^{-1}. Una funzione iniettiva si dice anche INVERTIBILE.

Esempi. (1) $\arcsin : [-1, 1] \to [-\pi/2, \pi/2]$ è l'inversa del seno (o meglio della sua restrizione a $[-\pi/2, \pi/2]$);
(2) $\arctan : \mathbf{R} \to [-\pi/2, \pi/2]$ è l'inversa della tangente (o meglio della sua restrizione a $[-\pi/2, \pi/2]$);
(3) $\log_a : (0, +\infty) \to \mathbf{R}$ è l'inversa di a^x ($a > 0$, $a \neq 1$).

Teorema. *Siano I un intervallo e $f : I \to \mathbf{R}$ una funzione continua. Allora f è invertibile $\Longleftrightarrow$ f è strettamente monotona. In tal caso $\mathrm{dom} f^{-1}$ è un intervallo e f^{-1} è continua*

In particolare, arcsin, arctan, log sono funzioni continue.

NOTA. L'implicazione f strettamente monotona $\Rightarrow$ f invertibile è sempre valida (anche quando f non è continua).

Sia la continuità che il fatto che I sia intervallo sono essenziali. Infatti ci sono funzioni continue (non definite su intervalli) invertibili ma non strettamente monotone. Per esempio:

$$f(x) = \frac{1}{x} : \mathbf{R} \setminus \{0\} \to \mathbf{R} \setminus \{0\},$$

che è l'inversa di se stessa.

Ci sono anche funzioni definite su intervalli (non continue) invertibili ma non strettamente monotone. Ne costruiamo facilmente una:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in (-1, 1), \\ -x & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Anche questa è l'inversa di se stessa.

Teorema. (DERIVAZIONE DELLA FUNZIONE INVERSA) *Sia I intervallo e $f : I \to \mathbf{R}$ continua e invertibile in I. Se esiste $f'(x_0)$, allora esiste anche la derivata di f^{-1} nel punto $y_0 = f(x_0)$, e si ha*

$$D\big(f^{-1}\big)(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} \qquad \text{ovvero}$$

$$\big(f^{-1}\big)'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

NOTA: 1) l'ipotesi di invertibilità su f equivale alla stretta monotonia;

2) la formula per la derivata dell'inversa vale anche se $f'(x_0) = 0$ o $f'(y_0) = \pm\infty$, applicando le dovute convenzioni.

3) se $f'(x_0) \neq 0$, allora f^{-1} è derivabile in $f(x_0)$.

Dimostrazione si ha $\lim_{y \to y_0} \dfrac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \lim_{y \to y_0} \dfrac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{f(f^{-1}(y)) - f(f^{-1}(y_0))}$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)},$$

per il teorema sul limite di composizione. □

Esempio. Ora possiamo calcolare la derivata di $\log x$, usando il teorema della der. della funz. inversa, con $f(x) = e^x$, $f^{-1}(x) = \log x$. Si ha allora $D(\log x) = D(f^{-1})(x) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \dfrac{1}{\exp(\log x)} = \dfrac{1}{x}$;

Derivate delle funzioni inverse elementari

$$D(\log x) = \frac{1}{x}, \qquad D \arctan x = \frac{1}{1 + x^2}$$

$$D(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \qquad D(\arccos x) = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

(si intende che x appartiene al dominio della singola funzione).

ESERCIZIO: ottenere le formule di derivazione delle funzioni trigonometriche inverse usando il teorema della derivazione dell'inversa.

ESERCIZI: 1) $D(\log f) = \dfrac{f'}{f}$;

2) $D(e^f) = e^f\, f'$;

3) $D(x^\alpha) = D(e^{(\alpha \log x)}) = x^\alpha D(\alpha \log x) = \alpha x^{\alpha - 1}$ $(\alpha \neq 1)$.

24 PUNTI DI NON DERIVABILITÀ

Se la funzione f *non* è derivabile in un punto x_0 si possono presentare vari casi. Se f è continua in x_0 allora si usa la seguente nomenclatura:

1) $\exists\, f'_-(x_0), f'_+(x_0) \in \overline{\mathbf{R}}$ e almeno uno dei due è finito. Allora x_0 si dice un PUNTO ANGOLOSO.
Esempi: $(x_0 = 0)$ $f(x) = |x|$, $f(x) = \sqrt{x + |x|}$;

2) $\exists\, f'(x_0) = \pm\infty$; allora x_0 si dice un PUNTO DI FLESSO A TANGENTE VERTICALE.
Esempi: $(x_0 = 0)$ $f(x) = \sqrt[3]{x}$ (l'inversa di x^3), $f(x) = sgn(x)\sqrt{|x|}$;

3) $f'_-(x_0), f'_+(x_0) \in \{+\infty, -\infty\}$ $f'_-(x_0) \neq f'_+(x_0)$; allora x_0 si dice un PUNTO DI CUSPIDE.
Esempi: $(x_0 = 0)$ $f(x) = \sqrt{|x|}$

NOTA: possono anche non esistere $f'_-(x_0)$ e $f'_+(x_0)$; per esempio si prenda

$$f(x) = \begin{cases} x\sin(1/x) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0, \end{cases} \quad \text{e } x_0 = 0.$$

Esercizi. Descrivere i punti di non derivabilità delle seguenti funzioni.

1. $f(x) = |\log|x||$.

Dato che $\log|x|$ è derivabile ovunque (nel suo dominio), e $|y|$ non è derivabile in $y = 0$, la composizione PUÒ non essere derivabile solo per $\log|x| = 0$, ovvero per $|x| = 1$, cioè $x = \pm 1$. Si ha

$$f'_-(\pm 1) = -1, \qquad f'_+(\pm 1) = 1,$$

quindi questi due sono punti angolosi.

2. $f(x) = \sqrt{|x^3 + x^2|}$.

Dato che $x^3 + x^2$ è derivabile ovunque (nel suo dominio), e $\sqrt{|y|}$ non è derivabile in $y = 0$, la composizione può non essere derivabile solo per $x^3 + x^2 = 0$, ovvero per $x = 0$ e $x = -1$.

Si ha

$$f'_\pm(-1) = \lim_{x \to -1\pm} \frac{\sqrt{x^2|x+1|}}{x+1} = \lim_{y \to 0\pm} \frac{|y-1|\sqrt{|y|}}{y} = \pm\infty,$$

e quindi -1 è un punto di cuspide.

Si ha
$$f'_{\pm}(0) = \lim_{x\to 0\pm} \frac{\sqrt{x^2|x+1|}}{x-0} = \lim_{x\to 0\pm} \frac{|x|\sqrt{|x+1|}}{x} = \pm 1,$$
quindi 0 è punto angoloso. Notare che $\sqrt{|y|}$ ha un punto di cuspide, quindi: *non si può dedurre il tipo di non-derivabilità di una composizione sapendo solo i tipi di non-derivabilità delle funzioni separatamente.*

3. $f(x) = \sqrt{|\sin x|}$.

Si ha
$$f'_{\pm}(0) = \lim_{x\to 0\pm} \frac{\sqrt{|\sin x|}}{x} = \pm\infty,$$
e analogamente ogni punto della forma $k\pi$, quindi tutti questi sono punti di cuspide.

4. $f(x) = \sqrt{1-\cos x}$.

Si ha
$$f'_{\pm}(0) = \lim_{x\to 0\pm} \frac{\sqrt{1-\cos x}}{x} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}},$$
e analogamente ogni punto della forma $2k\pi$, quindi tutti questi sono punti angolosi.

5. $f(x) = |\sin x||x+x^2|$ nel'intervallo $[-2, 2]$.

La funzione $|\sin x|$ ha un punto angoloso in 0 e la funzione $|x+x^2|$ ha due punti angolosi in 0 e -1, quindi i possibili punti di non derivabilità sono 0 e -1.

Si ha
$$f'_{\pm}(-1) = \lim_{x\to -1\pm} \frac{|\sin x||x+x^2|}{x+1} = \sin 1 \lim_{x\to -1\pm} \frac{|x+1|}{x+1} = \pm\sin 1,$$
quindi $x=-1$ è punto angoloso.

Si ha
$$f'_{\pm}(0) = \lim_{x\to 0\pm} \frac{|\sin x||x+x^2|}{x} = \lim_{x\to 0\pm} \frac{|\sin x||x|}{x} = \lim_{x\to 0\pm} \frac{|\sin x|}{|x|}x = 0,$$
e quindi f è derivabile in 0. Dunque $x=0$ non è un punto di non derivabilità anche se lo era per entrambe le funzioni $|\sin x|$ e $|x+x^2|$.