

25 ALCUNI ESERCIZI SULLE DERIVATE

Risolvere i seguenti esercizi:

1. Calcolare derivata destra e sinistra in $x = 0$ di

$$f(x) = 4\sqrt{\sin x^2} + 7\sqrt{\cos x^2};$$

2. Calcolare derivata destra e sinistra in $x = \pi$ di

$$f(x) = \left| 3 \sin |\pi - x| - 4 \cos |\pi + x| \right|.$$

(notare che per $x \rightarrow \pi+$ si ha

$$f(x) = 4 \cos(\pi + x) - 3 \sin(x - \pi),$$

mentre per $x \rightarrow \pi-$ si ha

$$f(x) = 4 \cos(\pi + x) - 3 \sin(\pi - x));$$

3. Calcolare la retta tangente in $x = 1$ al grafico di

$$f(x) = \frac{1 + \arctan(x^2 - x)}{|1 - 2x|};$$

4. Calcolare la retta tangente in $x = 6$ al grafico di

$$f(x) = e^x \cos(\pi x) \log(x - 5).$$

(notare che $D(f \cdot g \cdot h) = Df \cdot g \cdot h + f \cdot Dg \cdot h + f \cdot g \cdot Dh$);

5. Trovare i punti di non-derivabilità di

$$f(x) = \sqrt{||x| - 1|}$$

(notare che

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x-1} & \text{per } x < -1 \\ \sqrt{x+1} & \text{per } -1 < x < 0 \\ \sqrt{-x+1} & \text{per } 0 < x < 1 \\ \sqrt{x-1} & \text{per } x > 1 \end{cases}$$

e che nei rispettivi intervalli queste funzioni sono derivabili. Dedurre che 1 e -1 sono punti di cuspidi, 0 è punto angoloso).

26 IL TEOREMA DI De L'Hôpital

Teorema. Siano $f, g : I \rightarrow \mathbf{R}$ funzioni definite e derivabili in un intorno destro I di $x_0 \in [-\infty, +\infty[$. Supponiamo che sia verificata una delle due condizioni:

- i) (forma $0/0$) $\lim_{x \rightarrow x_0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0+} g(x) = 0$;
- ii) (forma ∞/∞) $\lim_{x \rightarrow x_0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0+} g(x) = \infty$

Se esiste il limite

$$\lim_{x \rightarrow x_0+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L,$$

allora esiste anche il limite

$$\lim_{x \rightarrow x_0+} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

Le stesse conclusioni sono valide per il limite $x \rightarrow x_0-$ (se f, g sono definite in un intorno sinistro di $x_0 \in]-\infty, +\infty]$).

ESEMPI: tramite questo teorema possiamo ritrovare la maggior parte dei limiti notevoli:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) = (H) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = 1;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) = (H) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{1} = 1;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) = (H) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x+1} = 1;$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) = (H) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{1} = +\infty;$$

$$\begin{aligned} (\alpha > 0) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log x}{x^\alpha} &= \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) = (H) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1/x}{\alpha x^{\alpha-1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\alpha x^\alpha} = 0; \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \log |x| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log |x|}{1/x} = \left(\frac{-\infty}{+\infty}\right) = (H) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} (-x) = 0.$$

Il Teorema di De L'Hôpital può semplificare il calcolo di limiti complicati:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(\sin x^2 + \cos x)}{x^2} &= \left(\frac{0}{0}\right) = (H) = \\ \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2x \cos x^2 - \sin x}{\sin x^2 + \cos x} \right) \frac{1}{2x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \cos x^2 - \sin x}{2x} = \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos x^2 - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Attenzione però a non “eccedere” nell’uso: il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^5 x}{x^5}$$

è banalmente uguale a 1 (applicando il limite fondamentale e la continuità di y^5); si può anche risolvere usando solo il teorema di De L’Hôpital, ma si deve derivare 5 volte:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^5 x}{x^5} &= (H) \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 \sin^4 x \cos x}{5x^4} &= (H) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \sin^3 x \cos^2 x - \sin^5 x}{4x^3} = (H) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{12 \sin^2 x \cos^3 x - 8 \sin^4 x \cos x - 5 \sin^4 x \cos x}{12x^2} = \dots \end{aligned}$$

Attenzione anche al fatto che se non esiste il limite del rapporto delle derivate allora non è detto che non esista il limite del rapporto delle funzioni: evidentemente, prendendo $f(x) = x + \sin x$ e $g(x) = x$, si ha

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{\sin x}{x} = 1,$$

ma invece

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \cos x$$

non esiste.