

27 DERIVATE DI ORDINI SUCCESSIVI

Definizione Sia f derivabile sull'intervallo I . Se esiste la derivata della funzione $x \mapsto f'(x)$ in x , allora $(f')'(x)$ si dice la DERIVATA SECONDA di f in x , e si denota con $f''(x)$ o $f^{(2)}(x)$.

Allo stesso modo si definiscono per induzione le DERIVATE DI ORDINE k : la funzione derivata 0-ima di f si definisce ponendo $f^{(0)} = f$; se è definita in ogni punto $x \in I$ la derivata k -ima $f^{(k)} \in \mathbf{R}$ e se ne esiste la derivata in un punto x_0 , si definisce $f^{(k+1)}(x_0) = D(f^{(k)})(x_0)$.

Definizione Sia I intervallo. Definiamo per ogni $k \in \mathbf{N}$ l'insieme $C^k(I)$ delle funzioni k volte derivabili su I tali che la derivata k -ima sia una funzione continua. Quindi:

$C^0(I)$ è l'insieme delle funzioni continue su I ;

$C^1(I)$ è l'insieme delle funzioni derivabili su I la cui derivata è una funzione continua; ecc.

Si noti che valgono le inclusioni: $\dots \subset C^2(I) \subset C^1(I) \subset C^0(I)$.

Definiamo inoltre lo spazio delle funzioni la cui derivata k -ima esiste per ogni $k \in \mathbf{N}$:

$$C^\infty(I) = \bigcap_{k \in \mathbf{N}} C^k(I).$$

NOTA: 1) le inclusioni sopra descritte sono strette. PER ESERCIZIO: fornire un esempio di funzione in $C^k(I)$ ma non in $C^{k+1}(I)$;

2) l'esistenza della derivata k -ima implica la continuità della derivata $k-1$ -ima e quindi, per induzione, di tutte le precedenti;

3) i polinomi, gli esponenziali, i logaritmi, $\sin$, $\cos$,... sono funzioni C^∞ . PER ESERCIZIO: calcolarne tutte le derivate;

4) dai teoremi di linearità delle derivate, si ha che per ogni k vale, per induzione, il teorema di linearità per funzioni di classe C^k .

5) se $f, g \in C^k(I)$, allora anche $fg \in C^k(I)$, e si ha

$$(fg)^{(k)} = \sum_{n=0}^k \binom{k}{n} f^{(n)} g^{(k-n)};$$

6) composizione di funzioni C^k è ancora C^k .

28 POLINOMI DI TAYLOR

OSSERVAZIONE: se f è continua nel punto a possiamo scrivere (ricordando la definizione di “o piccolo”) che

$$f(x) = f(a) + o(1) \quad \text{per } x \rightarrow a;$$

se f è derivabile in a , per la definizione di differenziabilità si ha

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + o(x - a) \quad \text{per } x \rightarrow a.$$

Vogliamo generalizzare questa formula a funzioni n volte derivabili: il problema è trovare un polinomio P di grado n tale che si possa scrivere

$$f(x) = P(x) + o(x - a)^n \quad \text{per } x \rightarrow a,$$

e se possibile esprimere P mediante le derivate di f in a fino all'ordine n .

Teorema. Siano $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 1$ e f una funzione definita in un intorno del punto $a \in \mathbf{R}$ e derivabile n volte in a . Allora esiste un unico polinomio P di grado $\leq n$ tale che

$$f(x) = P(x) + o(x - a)^n \quad \text{per } x \rightarrow a.$$

P è caratterizzato da $P^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)$ per $k = 0, \dots, n$, ed è quindi dato dalla formula

$$P(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k.$$

Questo polinomio viene detto POLINOMIO DI TAYLOR di f di ORDINE n e di CENTRO a .

Si ha quindi la formula

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k + o(x - a)^n \quad \text{per } x \rightarrow a,$$

detta FORMULA DI TAYLOR CON IL RESTO DI PEANO.

Questa formula è di ESTREMA UTILITÀ nel calcolo dei limiti.

DIMOSTRAZIONE Possiamo supporre, mediante una traslazione, che $a = 0$. Consideriamo il polinomio

$$P(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k,$$

e calcoliamo il limite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - P(x)}{x^n}$.

Questa è una forma indeterminata $0/0$ Possiamo applicare l'Hôpital, ottenendo l'equivalenza con il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - P'(x)}{nx^{n-1}}.$$

Se $n = 1$ questo limite è uguale a 0 e quindi $f - P = o(x^1)$ per $x \rightarrow 0$. Altrimenti si ha di nuovo una forma indeterminata $0/0$, e si può ri-applicare l'Hôpital, ottenendo l'equivalenza con il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^{(2)}(x) - P^{(2)}(x)}{n(n-1)x^{n-2}} \dots$$

In generale, si applica l'Hôpital n volte, ottenendo alla fine l'equivalenza con il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^{(n)}(x) - P^{(n)}(x)}{n!} = 0.$$

Dunque $f - P = o(x)^n$.

Dalla applicazione dell'Hôpital vista sopra si ha che se $Q = \sum_{k=0}^n c_k x^k$ è un polinomio di grado $\leq n$ e si ha $c_k \neq f^{(k)}(0)/k!$ per qualche $k \in \{0, \dots, n\}$, allora, posto $m = \min\{k : c_k \neq f^{(k)}(0)/k!\}$, si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - Q(x)}{x^n} = (H) = \dots = (H) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^{(m)}(0) - c_m m!}{n(n-1) \dots (n-m+1)x^{n-m}} \neq 0.$$

e quindi $f - Q \neq o(x)^n$. Dunque il polinomio P è univocamente determinato. $\square$

L'operazione che associa ad una funzione f n -volte derivabile in un punto a il suo polinomio di Taylor di ordine n viene indicata con il simbolo T_a^n . Il teorema sopra si legge

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{T_a^n}{(x-a)^n}.$$

Per lo più avremo a che fare con $a = 0$, nel qual caso ci “dimenticheremo” dell'indice 0.

Per esempio:

$$T_0^3(\exp) = e^0 + \frac{e^0}{1!}x + \frac{e^0}{2!}x^2 + \frac{e^0}{3!}x^3 = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6};$$

$$T_0^4(\sin) = \sin 0 + \frac{\cos 0}{1!}x + \frac{-\sin 0}{2!}x^2 + \frac{-\cos 0}{3!}x^3 + \frac{\sin 0}{4!}x^4 = x - \frac{x^3}{6}.$$

OSSERVAZIONE IMPORTANTE (per il calcolo):

- 1) $T_a^n(f + g) = T_a^n f + T_a^n g$;
- 2) $T_a^n(fg) = T_a^n(T_a^n f \cdot T_a^n g)$;
- 3) $T_a^n(g \circ f) = T_a^n(T_{f(a)}^n g \circ T_a^n f)$.

(notare che se P è polinomio in $(x - a)$, allora l'operazione T_a^n corrisponde a “troncare” P al grado n). Infatti si verifica subito che le derivate k -ime dei secondi membri delle equaglianze sono quelle richieste, per $k = 1, \dots, n$.

Polinomi di Taylor elementari

(da imparare A MEMORIA, e da verificare calcolando le derivate in 0)

$$T^n(\exp)(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!};$$

$$T^{2n}(\cos)(x) = T^{2n+1}(\cos)(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!};$$

$$T^{2n+1}(\sin)(x) = T^{2n+2}(\sin)(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!};$$

$$T^n(\log(1+x)) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1} x^k}{k};$$

$$T^{2n+1}(\arctan)(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)};$$

$$T^n((1-x)^{-1}) = \sum_{k=0}^n x^k;$$

$$T^1((1+x)^\alpha) = 1 + \alpha x;$$

$$T^3 \tan x = T^4 \tan x = x + \frac{1}{3}x^3.$$

ESEMPI: 1) Calcoliamo il polinomio di Taylor di ordine 2 e centro 0 della funzione

$$f(x) = \begin{cases} \log\left(\frac{\sin 3x}{3x}\right) & \text{se } x \in]-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}[\\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Ricordando che si ha

$$\sin 3x = 3x - \frac{9}{2}x^3 + o(x^3)$$

e che $\log(1+y) = y + o(y)$, si ha

$$\log\left(\frac{\sin 3x}{3x}\right) = \log\left(1 - \frac{3}{2}x^2 + o(x^2)\right) = -\frac{3}{2}x^2 + o(x^2),$$

ovvero

$$T^2 f(x) = -\frac{3}{2}x^2.$$

1bis) Calcolare il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \left(\frac{\sin 3x}{3x} \right)^{\frac{1}{x \sin 2x}}.$$

Possiamo scrivere in forma esponenziale

$$\left(\frac{\sin 3x}{3x} \right)^{\frac{1}{x \sin 2x}} = \exp \left(\frac{1}{x \sin 2x} \log \left(\frac{\sin 3x}{3x} \right) \right).$$

Il limite dell'esponente (ricordando il limite fondamentale di $\sin y/y$ e l'esempio 1)) vale

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{2x^2} \log \left(\frac{\sin 3x}{3x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0+} \left(-\frac{3}{2}x^2 + o(x^2) \right) \frac{1}{2x^2} = -\frac{3}{4}.$$

Dunque il nostro limite vale $e^{-3/4}$.

2) Calcoliamo il polinomio di Taylor di ordine 6 in 0 della funzione

$$f(x) = \log(1 + x^2) - x^2 \cos x.$$

Ricordiamo che

$$\log(1 + z) = z - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3}z^3 + o(z^3)$$

e che

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)$$

per cui

$$\log(1 + x^2) = x^2 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^6 + o(x^6)$$

e anche

$$x^2 \cos x = x^2 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{24}x^6 + o(x^6).$$

Quindi si ha

$$f(x) = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{24} \right) x^6 + o(x^6) = \frac{7}{24} x^6 + o(x^6),$$

e dunque

$$T^6 f(x) = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{24} \right) x^6 = \frac{7}{24} x^6.$$

2bis) Calcoliamo il limite

$$L = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x^2 \cos x - \log(1+x^2)}{7x^2 \tan(x^4)}.$$

Ricordando che

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x^4}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1,$$

il limite è uguale a

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x^2 \cos x - \log(1+x^2)}{7x^6}.$$

Per l'esempio 2) si ha quindi

$$L = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{7x^6} \left(-\frac{7}{24}x^6 + o(x^6) \right) = -\frac{1}{24}.$$

PER ESERCIZIO: risolvere i limiti negli esempi con la regola dell'Hôpital.

3) Calcolare il limite

$$L = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\sqrt[2]{x} - \sqrt[3]{\sin(x^{\frac{3}{2}})}}{(x - \sin x) \sqrt[2]{x}}.$$

Per prima cosa semplifichiamo il limite ricordandoci che $\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$, per cui

$$L = 6 \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\sqrt[2]{x} - \sqrt[3]{\sin(x^{\frac{3}{2}})}}{x^3 \sqrt[2]{x}}.$$

Per avere solo potenze intere cambiamo variabile ponendo $y = \sqrt{x}$. Il limite diventa

$$\lim_{y \rightarrow 0+} \frac{y - \sqrt[3]{\sin(y^3)}}{y^6 y} = 6 \lim_{y \rightarrow 0+} \frac{1 - \sqrt[3]{\frac{\sin(y^3)}{y^3}}}{y^6} = 6 \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{1 - \sqrt[3]{\frac{\sin t}{t}}}{t^2}$$

(abbiamo usato il cambiamento di variabili $t = y^3$). Si ha

$$\frac{\sin t}{t} = \frac{t - \frac{1}{6}t^3 + o(t^3)}{t} = 1 - \frac{1}{6}t^2 + o(t^2)$$

e $\sqrt[3]{1+z} = (1+z)^{1/3} = 1 + \frac{1}{3}z + o(z)$, per cui

$$\sqrt[3]{\frac{\sin t}{t}} = \sqrt[3]{1 - \frac{1}{6}t^2 + o(t^2)} = 1 - \frac{1}{18}t^2 + o(t^2).$$

Dunque

$$L = 6 \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{1 - \sqrt[3]{\frac{\sin t}{t}}}{t^2} = 6 \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\frac{1}{18}t^2 + o(t^2)}{t^2} = \frac{1}{3}.$$